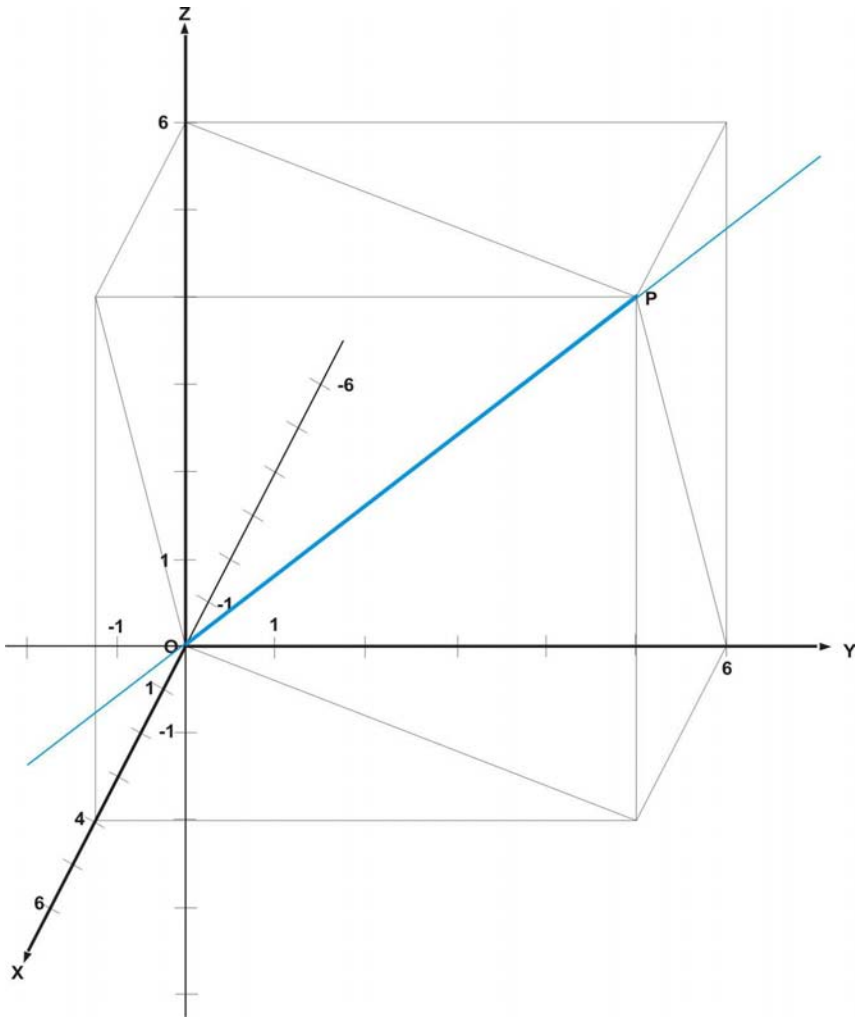
# Ein Exkurs in analytischer Geometrie des Raumes anhand Euklidischer Lehrsätze

Im Koordinatenkreuz mit 3 Koordinatenachsen gilt:




Ein Punkt P hat die Koordinaten P: (x, y, z).
Die Koordinaten x, y, z sind Werte der Lage von P auf den Skalen in 3 Dimensionen.
Der Punkt P ist durch seine Lage eindeutig identifiziert; er kann kontextabhängig anders benannt werden.

Die Größe $\overline{OP}$ ist die Entfernung des Punktes P vom Ursprung O.
$\overline{OP} = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$,

Für die Ursprungsgerade OP ergeben sich die Geradengleichungen aus: $x / x_P = y / y_P = z / z_P$.

**Beispiel 1:**
P: (4, 6, 6)
OP: $y = 6/4\ x$, $z = 6/4\ x$.
$\overline{OP} = 9{,}38$

---

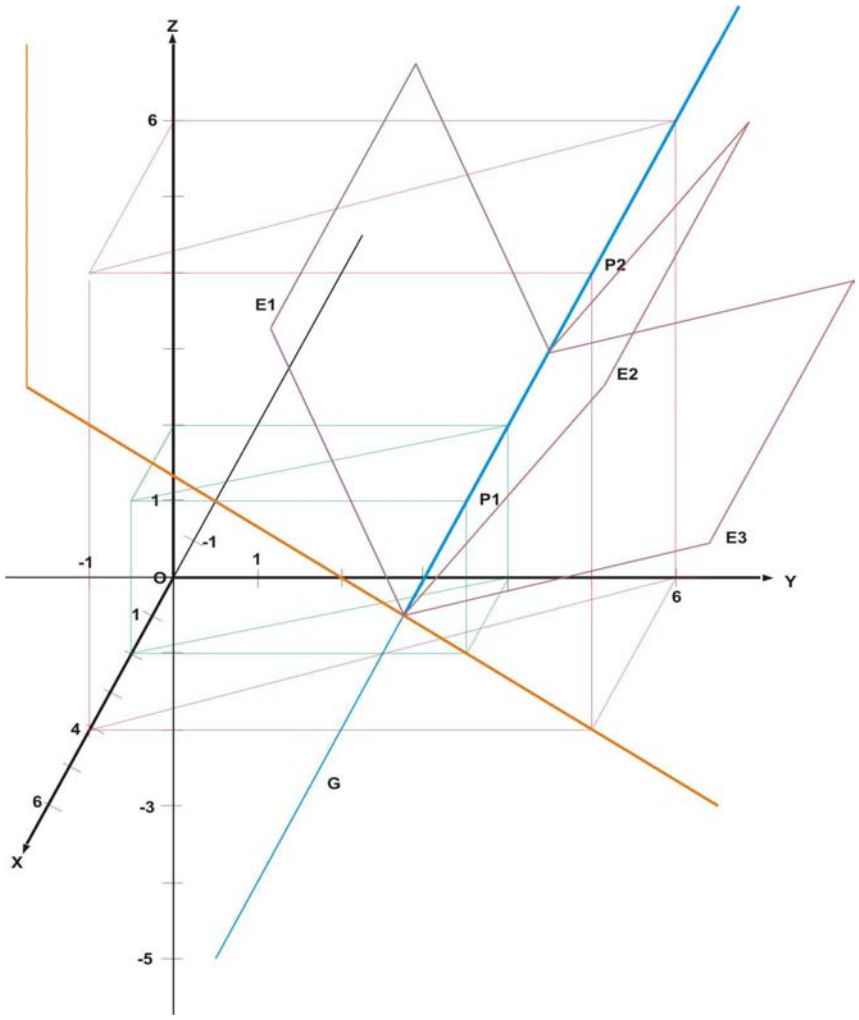
**1. Stoicheia XI.1:**
**Eine Gerade liegt in einer Ebene und nicht zum Teil nicht in ihr.**

**Bestimmung einer Geraden durch zwei Punkte:**

Eine Gerade ist im 3-dimensionalen Raum gegeben durch zwei Gleichungen für reelle Werte $y$ und $z$:
G: $y = m\,x + b$, $z = n\,x + c$ für alle reellen Zahlen $x$ mit den reellen Parametern $m, b, n, c$.

Für eine Gerade durch zwei Punkte $P_1$: $(x_1, y_1, z_1)$ und $P_2$: $(x_2, y_2, z_2)$ gilt:
$(x - x_1) / (x_2 - x_1) = (y - y_1) / (y_2 - y_1) = (z - z_1) / (z_2 - z_1)$.

Gerade durchstoßen an den Spurpunkten die x-y-, die x-z- und die y-z-Ebene, es sei denn, die Gerade ist parallel zu einer dieser Ebenen.
Um die Spurpunkte zu finden, setzt man in den Geradengleichungen jeweils eine Koordinate = 0.




**Beispiel 2:**

$P_1$: (2, 4, 2), $P_2$: (4, 6, 6)
aus $(x - 2) / 2 = (y - 4) / 2$ ist $y = x + 2$
aus $(x - 2) / 2 = (z - 2) / 4$ ist $z = 2\,x - 2$.

Die Gerade durchstößt in (1, 3, 0) die x-y-Ebene, in (-2, 0, -6) die x-z- und in (0, 2, -2) die y-z-Ebene.

Die Gleichungen der Geraden sind: G: $y = x + 2$; $z = 2\,x - 2$.

G liegt in unbegrenzt vielen Ebenen $E_1$, $E_2$, $E_3$ .., die man sich durch die Gerade liegend vorstellen kann.
Für jede dieser Ebenen gilt: Ein Punkt, der die Ebenengleichung nicht erfüllt, liegt auch nicht in G.

**2. Stoicheia XI.2:**

**Zwei Gerade, deren eine die andere schneidet, liegen in einer Ebene und es liegen alle Dreiecke jeweils in einer Ebene.**

Eine Ebene ist gegeben durch 3 Punkte $P_1$: $(x_1, y_1, z_1)$, $P_2$: $(x_2, y_2, z_2)$, $P_3$: $(x_3, y_3, z_3)$.
Die Ebenengleichung erhält man durch Berechnung der Determinanten der Ebene:

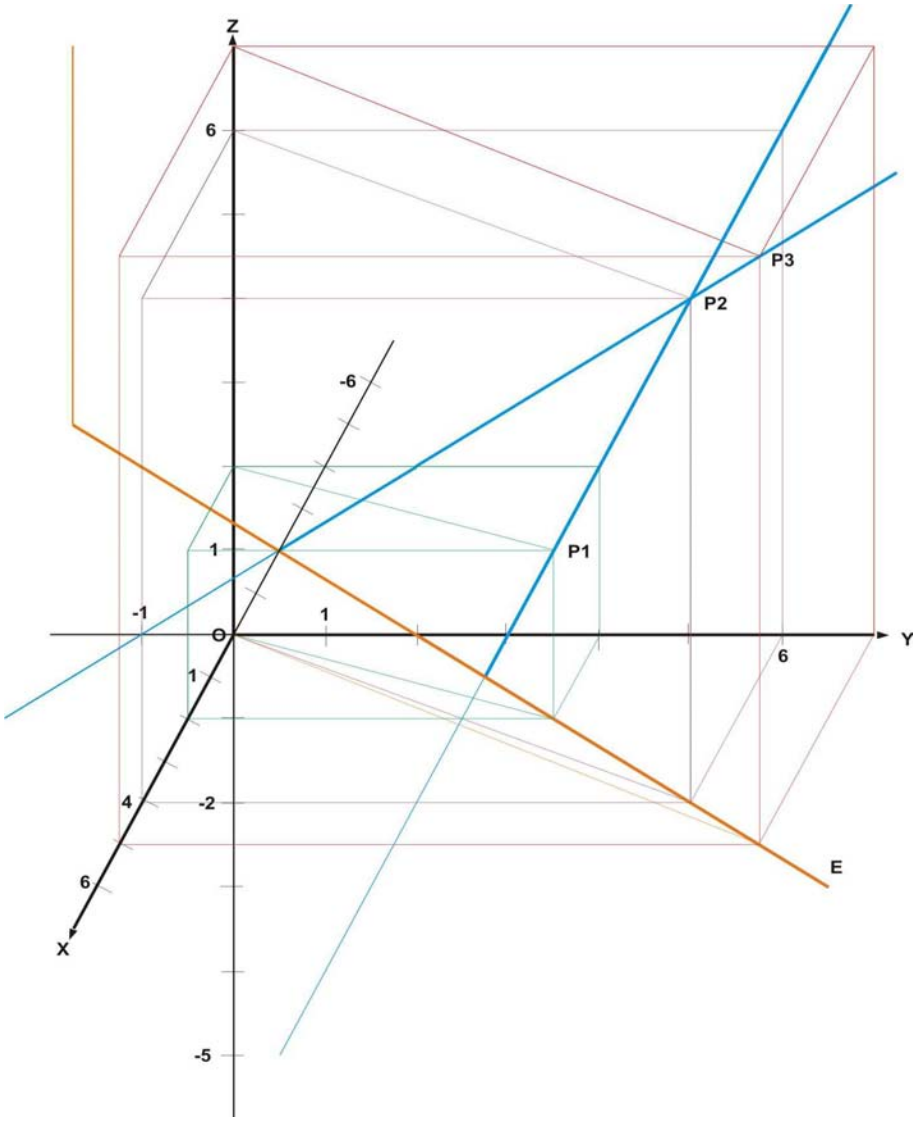
$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = (x - x_1)(y_2 - y_1)(z_3 - z_1) + (y - y_1)(x_3 - x_1)(z_2 - z_1) + (z - z_1)(x_2 - x_1)(y_3 - y_1)$$
$$- (x - x_1)(y_3 - y_1)(z_2 - z_1) - (y - y_1)(x_2 - x_1)(z_3 - z_1) - (z - z_1)(x_3 - x_1)(y_2 - y_1) = 0.$$

**Beispiel 3:**

Gerade $P_1P_2$: $y = x + 2$, $z = 2x - 2$

Gerade $P_2P_3$: $y = x + 2$, $z = x + 2$

$P_1$: (2, 4, 2), $P_2$: (4, 6, 6), $P_3$: (5, 7, 7)

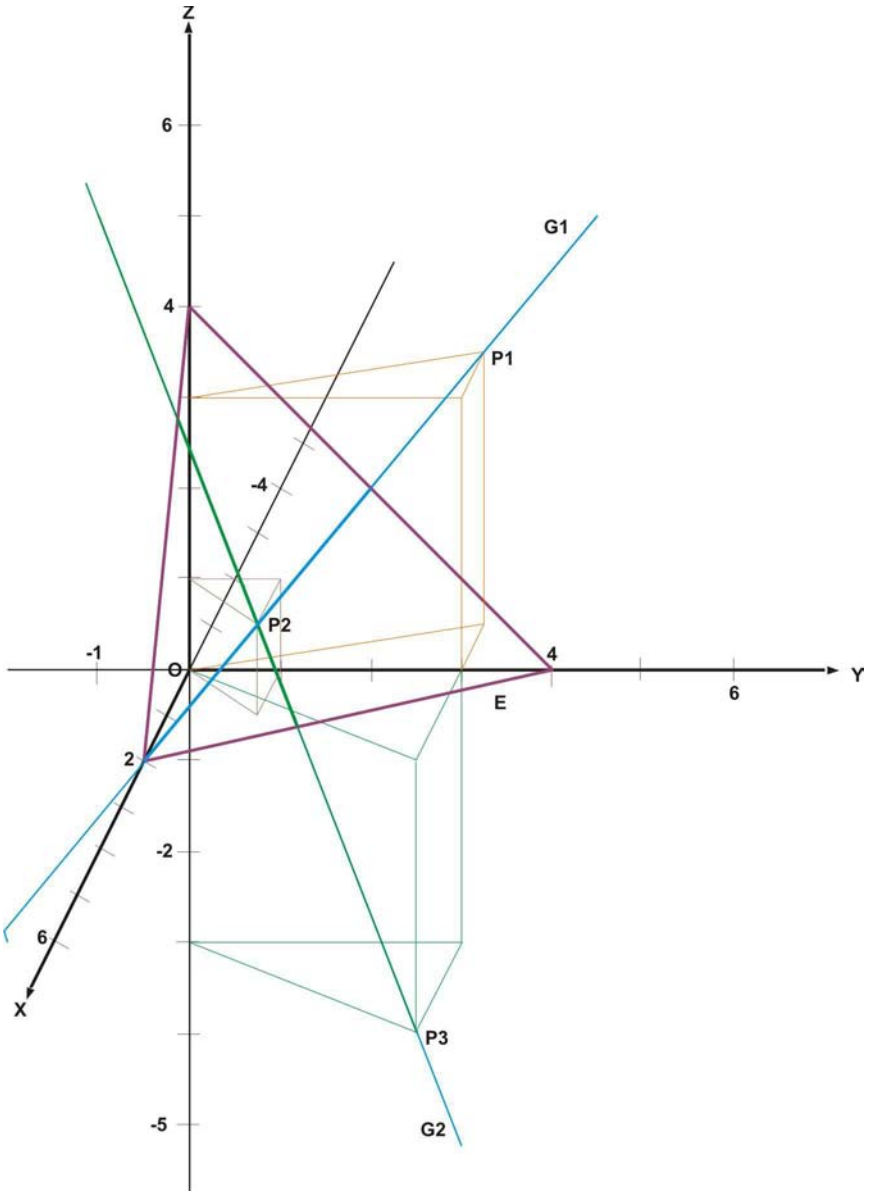



$$\begin{vmatrix} x - 2 & y - 4 & z - 2 \\ 4 - 2 & 6 - 4 & 6 - 2 \\ 5 - 2 & 7 - 4 & 7 - 2 \end{vmatrix} = 0$$

ergibt E: $y = x + 2$. E liegt parallel zur z-Achse.

Da sich zwei Seiten eines Dreiecks schneiden, ist stets eine Ebene gegeben, in der das Dreieck liegt.

**Beispiel 4:**
Ebene durch die 3 Punkte
$P_1$: (-1, 3, 3), $P_2$: (1, 1, 1), $P_3$: (2, 3, -3)




G1: $P_1P_2$: $y = -x + 2$, $z = -x + 2$,
G2: $P_2P_3$: $y = 2x - 1$, $z = -4x + 5$.

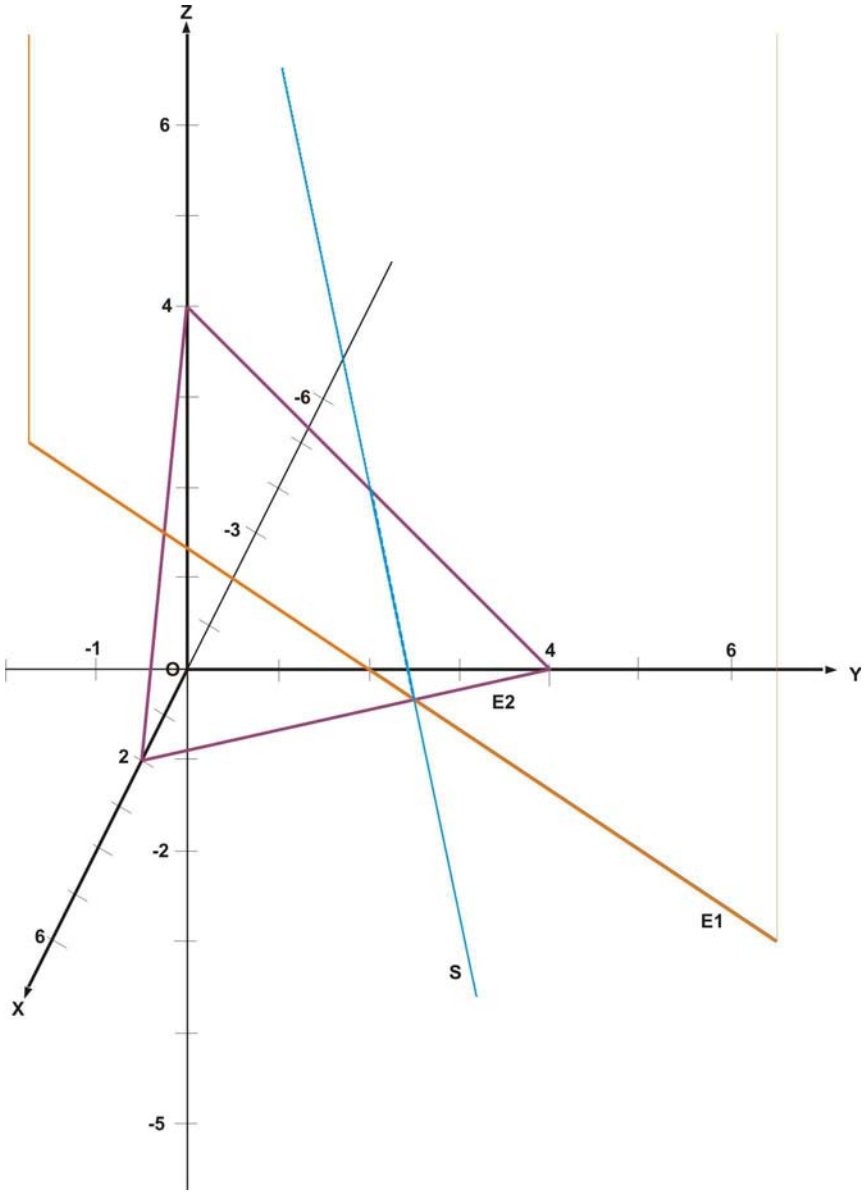
Die Auswertung der Determinanten der Ebene ergibt
$y = 4 - 2x - z$.

Setzt man in der Ebenengleichung jeweils zwei Koordinaten = 0 erhält man
$x = 2$, $y = 4$, $z = 4$
und damit die Achsenabschnitte der Ebene.

Es seien $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ die Achsenabschnitte einer Ebene.
Da $x / \bar{x} + y / \bar{y} + z / \bar{z} = 1$,
ist die Achsenabschnittsform der obigen Ebenengleichung somit: $x / 2 + y / 4 + z / 4 = 1$.

**3. Stoicheia XI.3:**
**Zwei Ebenen, deren eine die andere schneidet, schneiden sich in einer Geraden, die beiden gemeinsam ist.**

Die Gleichungen der Schnittgerade erhält man durch Gleichsetzen der Ebenengleichungen.




**Beispiel 5:**

Die Ebenen
E1: $y = x + 2$ und $x = y - 2$
E2: $y = 4 - 2x - z$ und $x = 2 - 1/2\, y - 1/2\, z$
schneiden sich,
wegen $x + 2 = 4 - 2x - z$ und $y - 2 = 2 - 1/2\, y - 1/2\, z$,
in der Geraden
S: $y = x + 2$, $z = 2 - 3x$,
die in (2/3, 8/3, 0) die x-y-Ebene, in (0, 2, 2) die y-z- und in (-2, 0, 8) die x-z-Ebene durchstößt.

Die Schnittgerade S liegt in jeder der beiden Ebenen, denn die Durchstoßpunkte von S liegen in jeder der beiden Ebenen.

**4. Stoicheia XI.4:**

**Bildet eine Gerade mit zwei Geraden in ihrem Schnittpunkt rechte Winkel, dann steht sie senkrecht zur Ebene, in der die Geraden liegen.**

Zwei Gerade $G_1$: $y = m_1 x + b_1$, $z = n_1 x + c_1$

$G_2$: $y = m_2 x + b_2$, $z = n_2 x + c_2$

schneiden sich, wenn

$$(b_1 - b_2) / (c_1 - c_2) = (m_1 - m_2) / (n_1 - n_2)$$

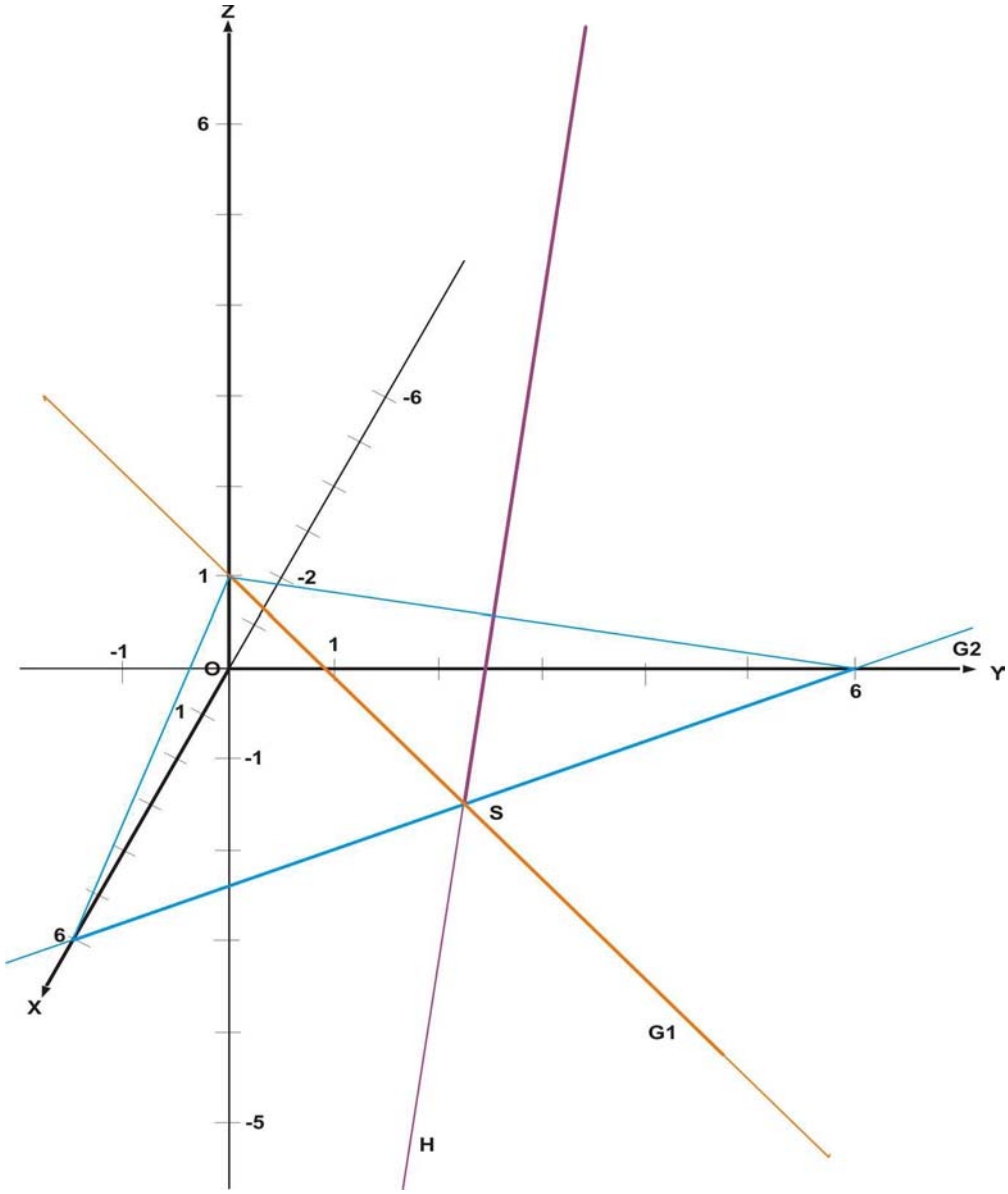
und liegen dann in der gleichen Ebene.

Die Koordinaten des Schnittpunktes S sind:

$$x_S = (b_2 - b_1) / (m_1 - m_2) = (c_2 - c_1) / (n_1 - n_2),$$
$$y_S = (m_1 b_2 - m_2 b_1) / (m_1 - m_2),$$
$$z_S = (n_1 c_2 - n_2 c_1) / (n_1 - n_2).$$

Für den Schnittwinkel $\varphi$ zweier Geraden $G_1$ und $G_2$ gilt:

$\cos \varphi = ( 1 + m_1 m_2 + n_1 n_2) / ((1 + m_1^2 + n_1^2)(1+ m_2^2 + n_2^2))^{1/2}$ .




**Beispiel 6:**

Die Geraden $G_1$: $y = x$, $z = -1/3\, x + 1$; $G_2$: $y = -x + 6$, $z = 0$;

schneiden sich in S: (3, 3, 0).

Welche Winkel bildet H: $y = x$, $z = 6x - 18$ mit $G_1$ und $G_2$?

Der Schnittwinkel sowohl von $G_1$, wie auch von $G_2$ mit H: $\cos \varphi = 0$, $\varphi$ ist ein rechter Winkel, womit die Gerade H senkrecht zur Ebene steht, in der $G_1$ und $G_2$ liegen.

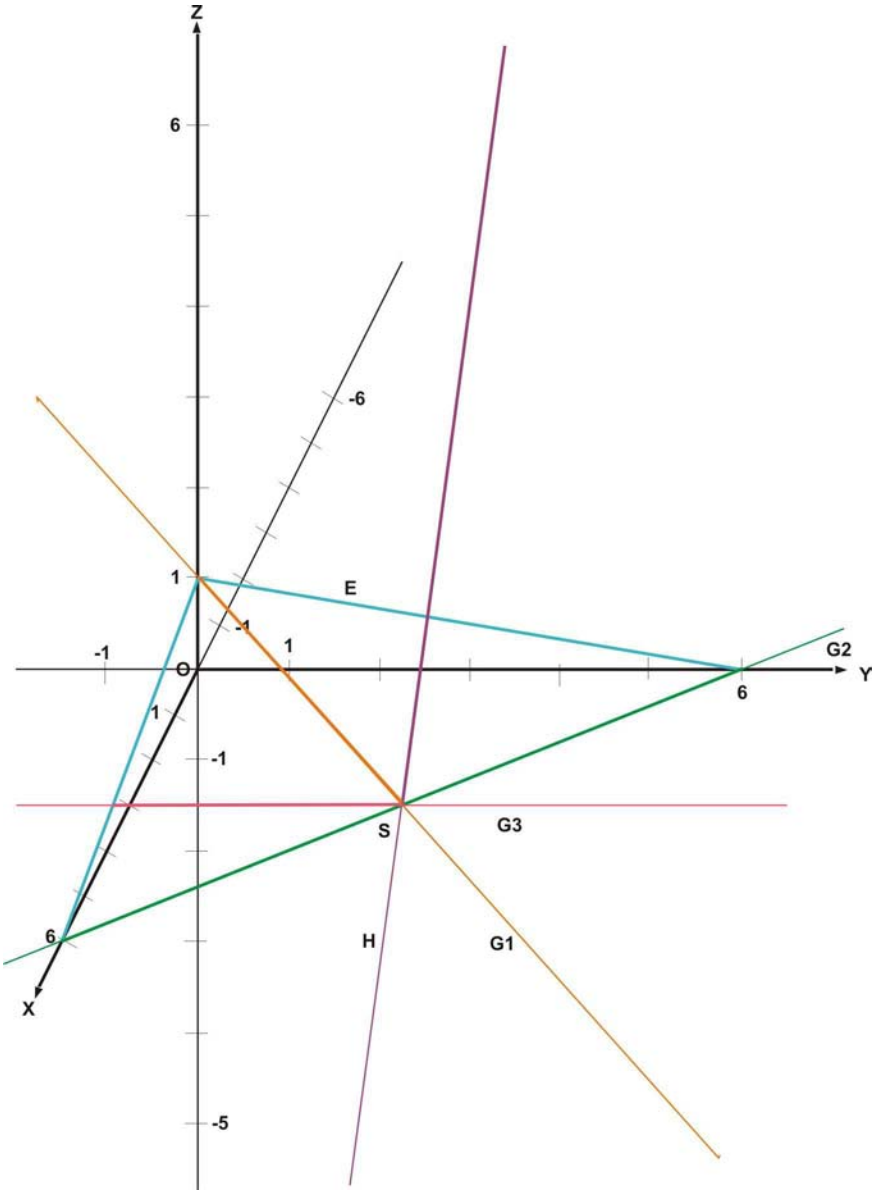
**5. Stoicheia XI.5:**
**Drei Gerade, in deren gemeinsamen Schnittpunkt eine Senkrechte errichtet ist, liegen in derselben Ebene.**

Ist für zwei Gerade

$G: y = m_1 x + b_1,\ z = n_1 x + c_1,$

$H: y = m_2 x + b_2,\ z = n_2 x + c_2,$

$m_1 m_2 + n_1 n_2 = -1$, dann steht H senkrecht auf G.




**Beispiel 7:**
Die Geraden:

$G_1: y = x,\ z = -1/3\, x + 1$

$G_2: y = -x + 6,\ z = 0$

$G_3: y = -4\, x + 15,\ z = 1/2\, x - 3/2$

haben in S: (3, 3, 0) einen gemeinsamen Schnittpunkt.

Die Gerade H: $y = x,\ z = 6x - 18$ steht in S senkrecht auf $G_1$, $G_2$ und $G_3$.
H steht damit senkrecht auf der Ebene, die durch $E_1$: $G_1G_2$ und auf der Ebene, die durch $E_2$: $G_2G_3$ gegeben ist. Da $E_1$ und $E_2$ auch den Schnittpunkt der Geraden gemeinsam haben ist $E_1 = E_2$.

$P_1$: (1, 1, 2/3) liegt auf $G_1$, $P_2$: (1, 5, 0) liegt auf $G_2$.
Die Auswertung der Determinanten der Ebene durch S: (3, 3, 0), $P_1$: (1, 1, 2/3) und $P_2$: (1, 5, 0) ergibt:
$E: y = -x - 6\, z + 6$.

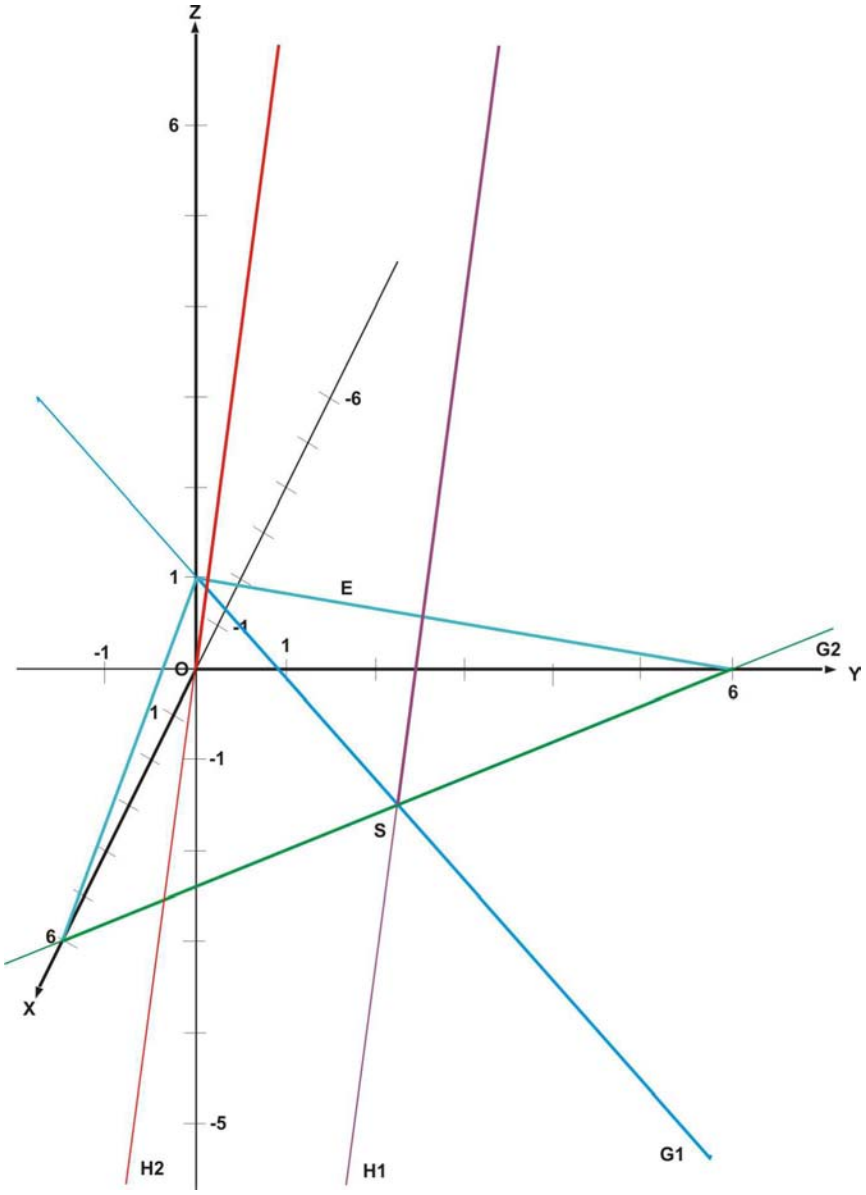
**6. Stoicheia XI.6:**
**Zwei zur selben Ebene senkrechte Gerade sind parallel.**

Ist für zwei Gerade

$G: y = m_1 x + b_1,\ z = n_1 x + c_1$

$H: y = m_2 x + b_2,\ z = n_2 x + c_2,$

$m_1 = m_2$ und $n_1 = n_2$, dann ist G parallel zu H.




**Beispiel 8:**

Zur Ebene $E: y = -x - 6z + 6$
in der die Geraden

$G_1: y = x,\ z = -1/3\, x + 1$

$G_2: y = -x + 6,\ z = 0$

liegen, ist

$H_1: y = x,\ z = 6x - 18$ eine Senkrechte.

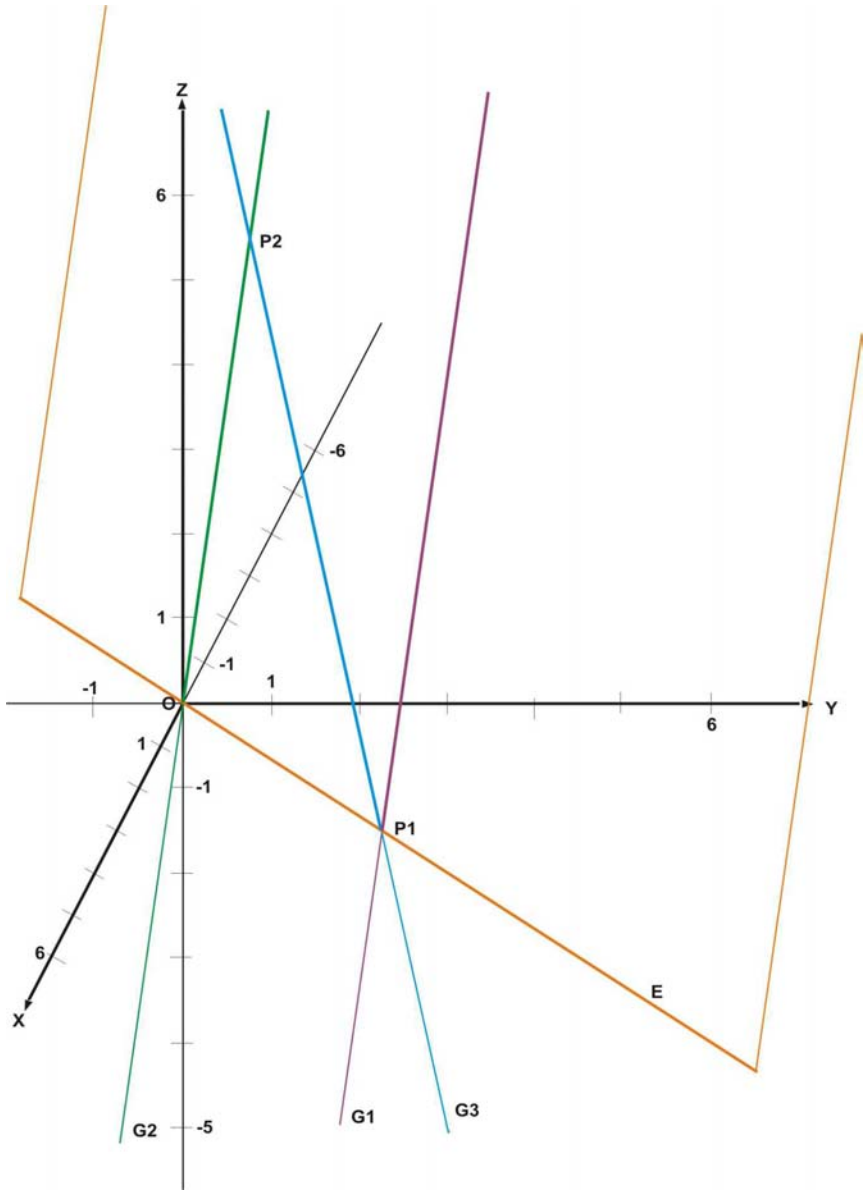
Es ist auch

$H_2: y = x,\ z = 6x$

eine Senkrechte auf E (wie in 5.) und ist, da $m_{H1} = m_{H2}$ und $n_{H1} = n_{H2}$, parallel zu $H_1$.
Jede Senkrechte auf E ist eine Parallele zu $H_2$.

**7. Stoicheia XI.7:**
**Die Gerade durch zwei beliebige Punkte auf Parallelen liegt in der Ebene der Parallelen.**

Punkte auf Parallelen erfüllen die Gleichung der Ebene, in der diese liegen, ihre Verbindungsgerade liegt in dieser Ebene.




**Beispiel 9:**

Auf der Geraden $G_1$: $y = x$, $z = 6x - 18$ liegt der Punkt $P_1$: (3, 3, 0),
auf der dazu parallelen $G_2$: $y = x$, $z = 6x$ liegt der Punkt $P_2$: (1, 1, 6).

Die Gerade durch $P_1$ und $P_2$ ist:

$G_3$: $y = x$, $z = -3x + 9$.

Die Ebene E, in der $G_1$ und $G_2$ liegen, ist:

E: $y = x$.

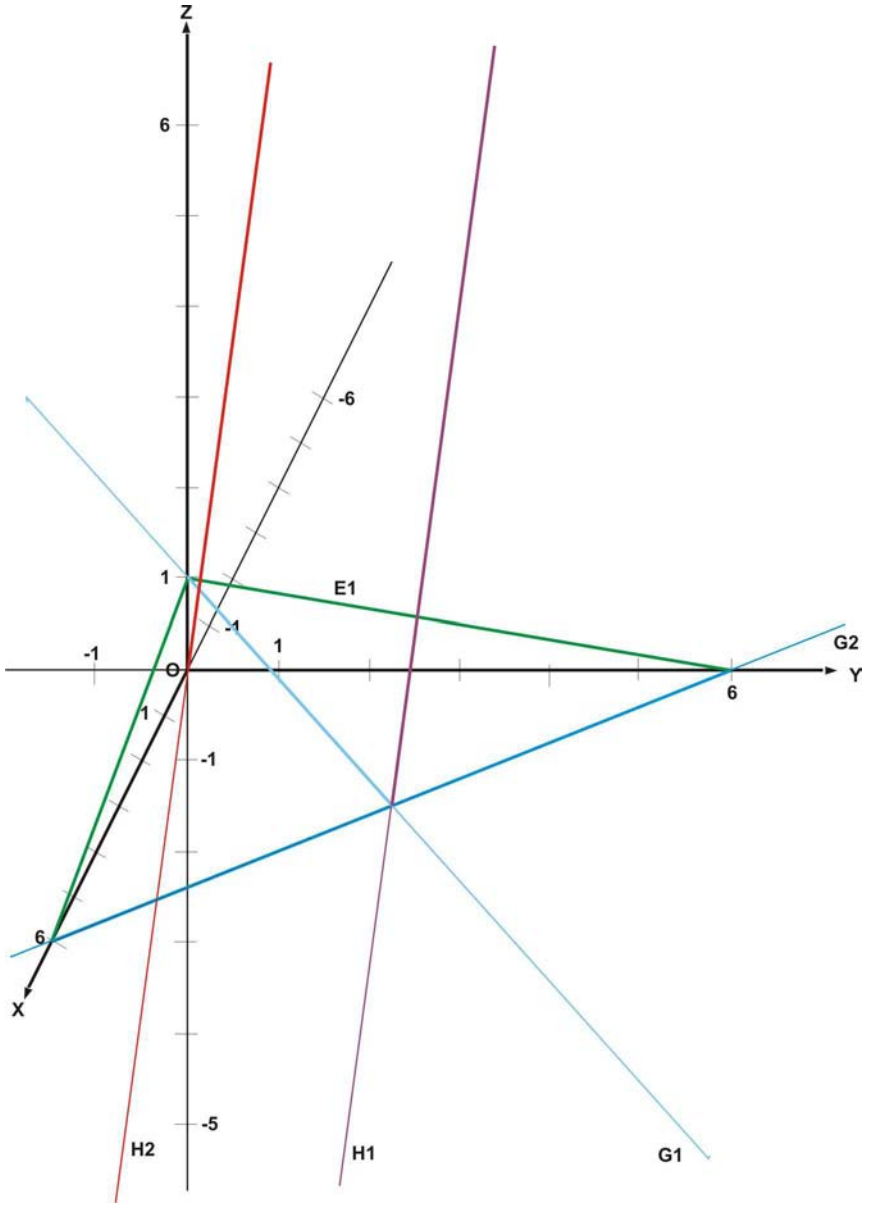
Da $y = x$ auch für $G_3$ gilt, liegt auch $G_3$ in E.

Die Verbindungsgeraden von drei Punkten auf zwei Parallelen bilden ein Dreieck, das in der Ebene der Parallelen liegt.

**8. Stoicheia XI.8:**
**Steht eine von zwei Parallelen senkrecht zu einer Ebene, dann steht auch die andere senkrecht zu derselben Ebene.**

Parallele Gerade in einer Ebene stehen senkrecht auf einer Ebene, wenn sie in einer Ebene liegen, in der eine der Parallelen eine Senkrechte auf der Ebene ist.

Zur Geraden G: $y = m x + b$, $z = n x + c$
ist G': $y = m x + b + v$, $z = n x + c + w$, wobei $v, w$ reelle Zahlen sind, eine Parallele.

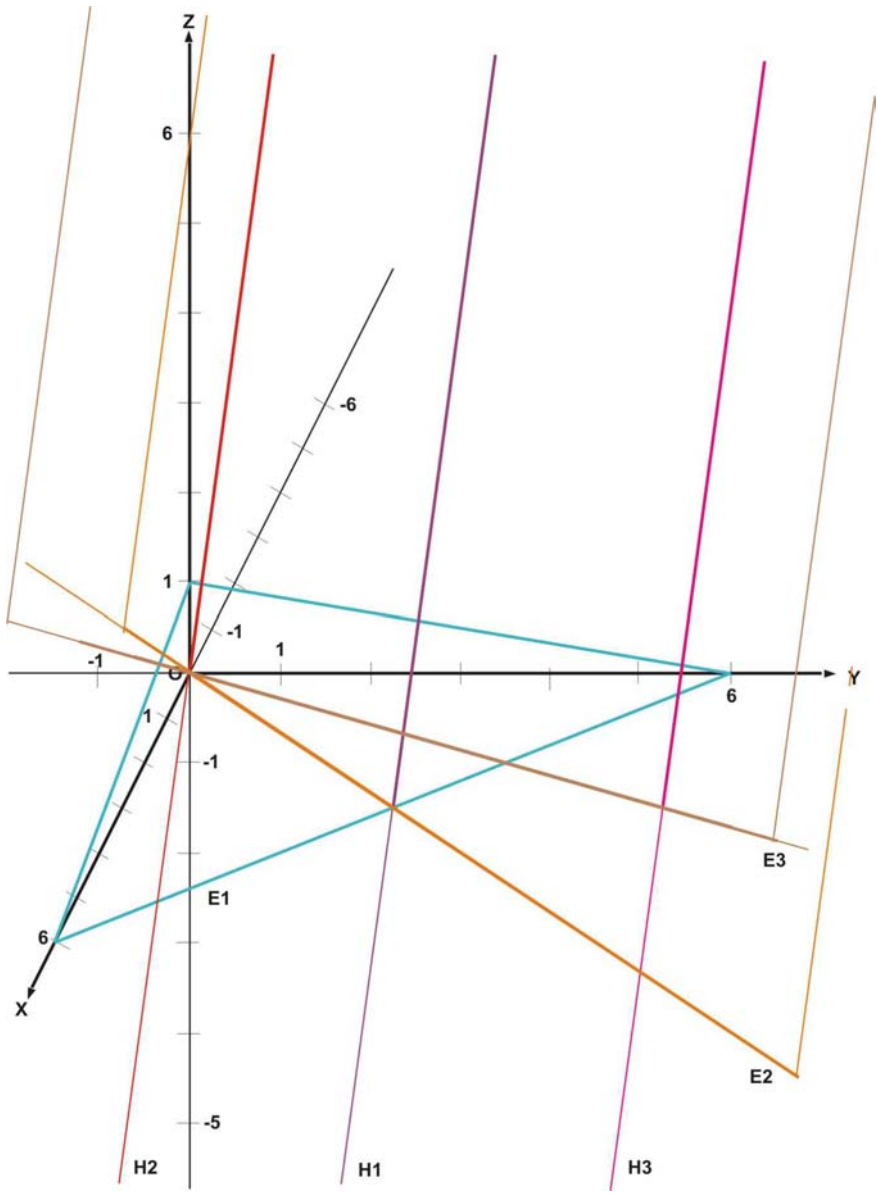



**Beispiel 10:**
Auf der Ebene $E_1$: $y = -x - 6 z + 6$
die durch die Geraden
$G_1$: $y = x$, $z = -1/3 x + 1$
$G_2$: $y = -x + 6$, $z = 0$
gegeben ist, steht
$H_1$: $y = x$, $z = 6 x - 18$ senkrecht und liegt in der Ebene $E_2$: $y = x$.

Die dazu parallele
$H_2$: $y = x$, $z = 6 x$
liegt ebenfalls in der Ebene $E_2$ und ist ebenfalls senkrecht zu $E_1$.

**9. Stoicheia XI.9:**
**Gerade sind parallel, die einer anderen parallel sind, auch wenn sie nicht mit ihr in derselben Ebene liegen.**

Parallele Gerade liegen nicht notwendig in der gleichen Ebene, aber sind stets alle senkrecht zur gleichen Ebene.




**Beispiel 11:**

Auf der Ebene $E_1$: $y = -x - 6z + 6$
die durch die Geraden

$G_1$: $y = x$, $z = -1/3\,x + 1$
$G_2$: $y = -x + 6$, $z = 0$

gegeben ist, stehen die Parallelen $H$ senkrecht (wie in 5.):

$H_1$: $y = x$, $z = 6x - 18$
$H_2$: $y = x$, $z = 6x$
$H_3$: $y = x + 3$, $z = 6x - 18$

$H_1$ und $H_2$ liegen in der Ebene $E_2$: $y = x$.
$H_2$ und $H_3$ liegen in der Ebene $E_3$, die durch die Punkte P1: (1, 1, 6), P2: (1, 4, –12), P3: (2, 5, –6) gegeben ist. Die Diskriminante der Ebene ergibt: $E_3$: $y = 2x - 1/6\,z$.

$H_3$ liegt nicht in der Ebene durch $G_1$ und $G_2$, ist jedoch parallel zu $G_1$ und $G_2$.

**10. Stoicheia XI.10:**
**Zwei sich schneidende Gerade, die schneidenden Geraden einer anderen Ebene parallel sind, bilden gleiche Winkel.**

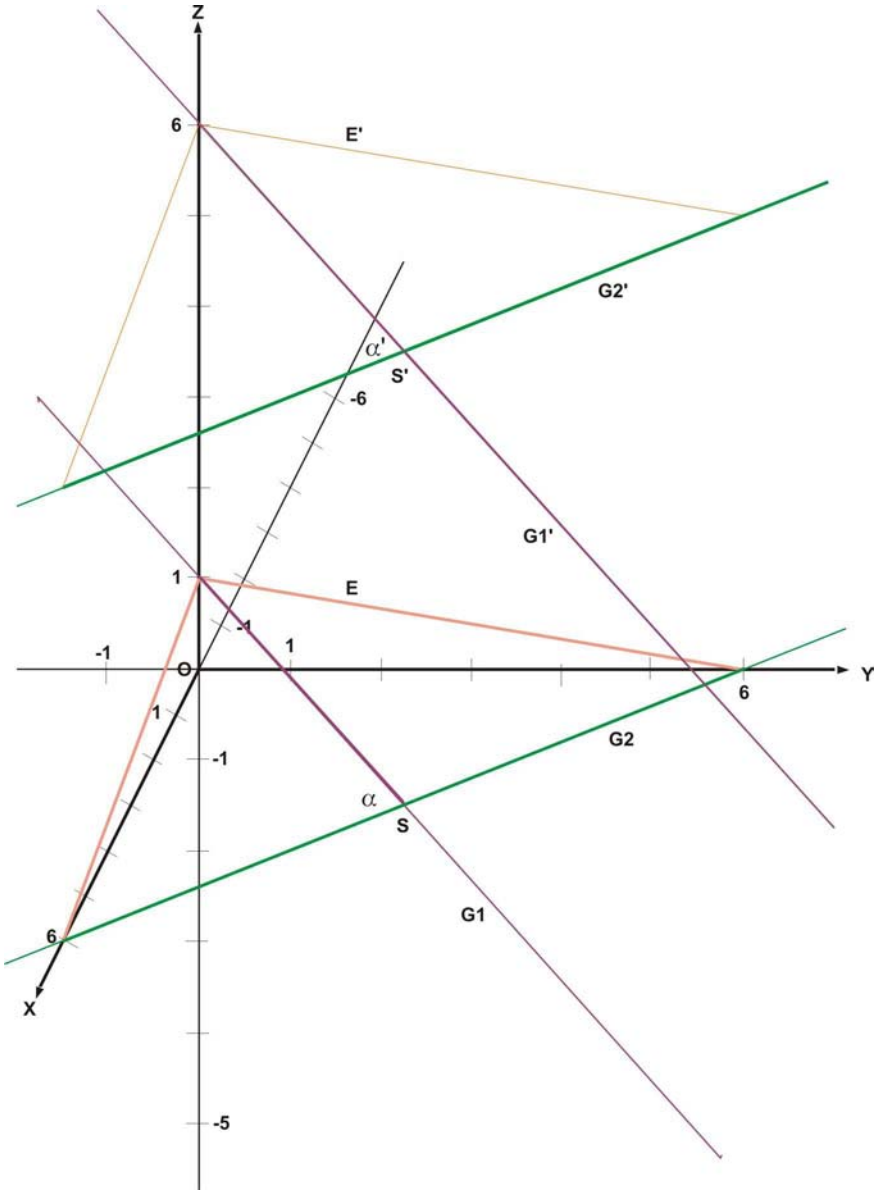
Bei Berechnung des Winkels, den zwei sich sich schneidende Gerade einschließen wie in 4., ergibt sich der gleiche Wert, wenn für

$G_1$: $y = m_1 x + b_1$, $z = n_1 x + c_1$

$G_2$: $y = m_2 x + b_2$, $z = n_2 x + c_2$

gilt:

$m_1 = m_2$ und $n_1 = n_2$.




**Beispiel 12:**

Die Geraden

$G_1$: $y = x$, $z = -1/3\, x + 1$

$G_2$: $y = -x + 6$, $z = 0$

in der Ebene E: $y = -x - 6z + 6$ sind den Geraden

$G'_1$: $y = x$, $z = -1/3\, x + 6$

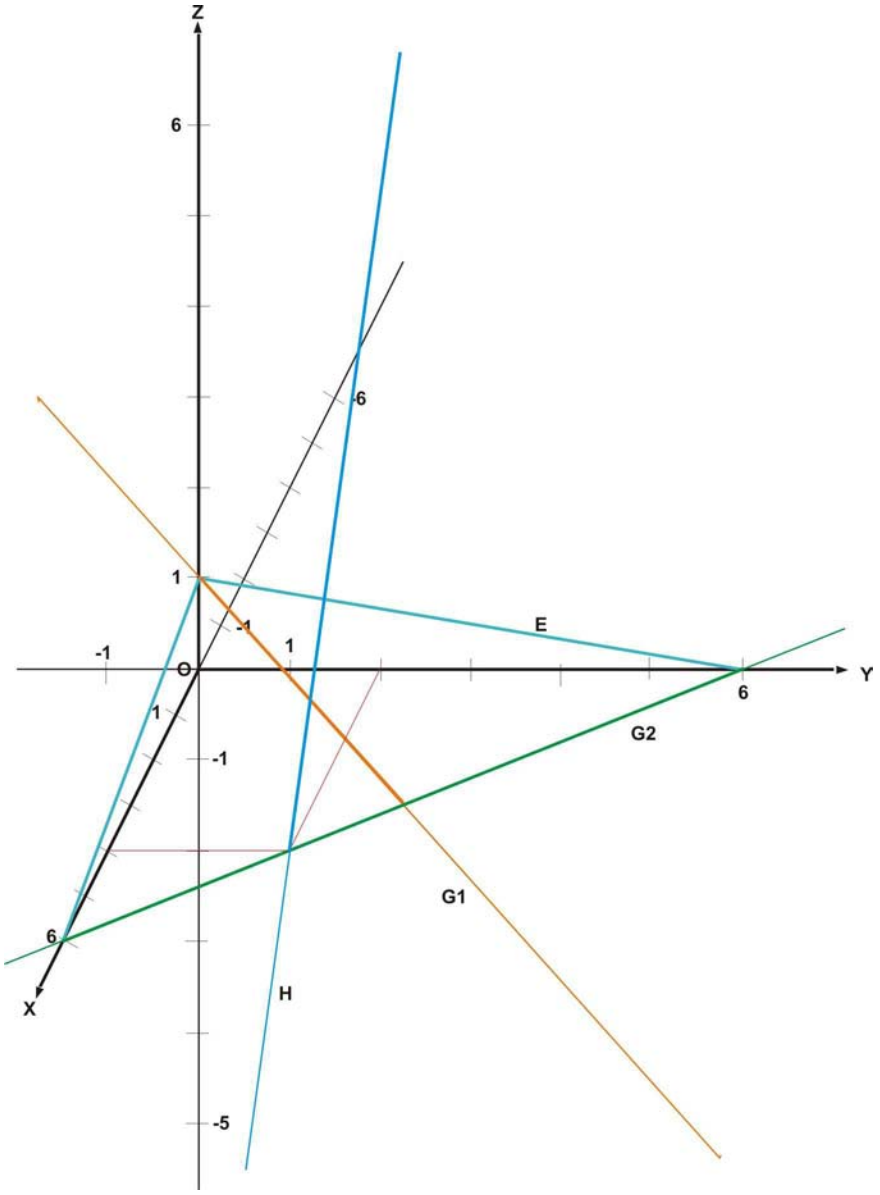
$G'_2$: $y = -x + 6$, $z = 5$

in der Ebene E': $y = -x - 6z + 36$ parallel.

Da G1 mit G2 einen rechten Winkel bildet, schließt auch G1' mit G2' einen rechten Winkel ein.

**11. Stoicheia XI.12:**
**An einem Punkt einer Ebene die Senkrechte errichten.**

Die Senkrechte auf einer Ebene steht senkrecht auf zwei sich schneidenden Geraden der Ebene.




**Beispiel 13:**

Auf der Ebene E: $y = -x - 6z + 6$
die durch die Geraden

$G_1$: $y = x$, $z = -1/3\,x + 1$

$G_2$: $y = -x + 6$, $z = 0$

gegeben ist, soll im Punkt

P: (4, 2, 0)

die Senkrechte H errichtet werden.

Da $m_G\, m_H + n_G\, n_H = -1$, ist für $G_1$: $m_H - 1/3\, n_H = -1$ und für $G_2$: $-m_H = -1$.

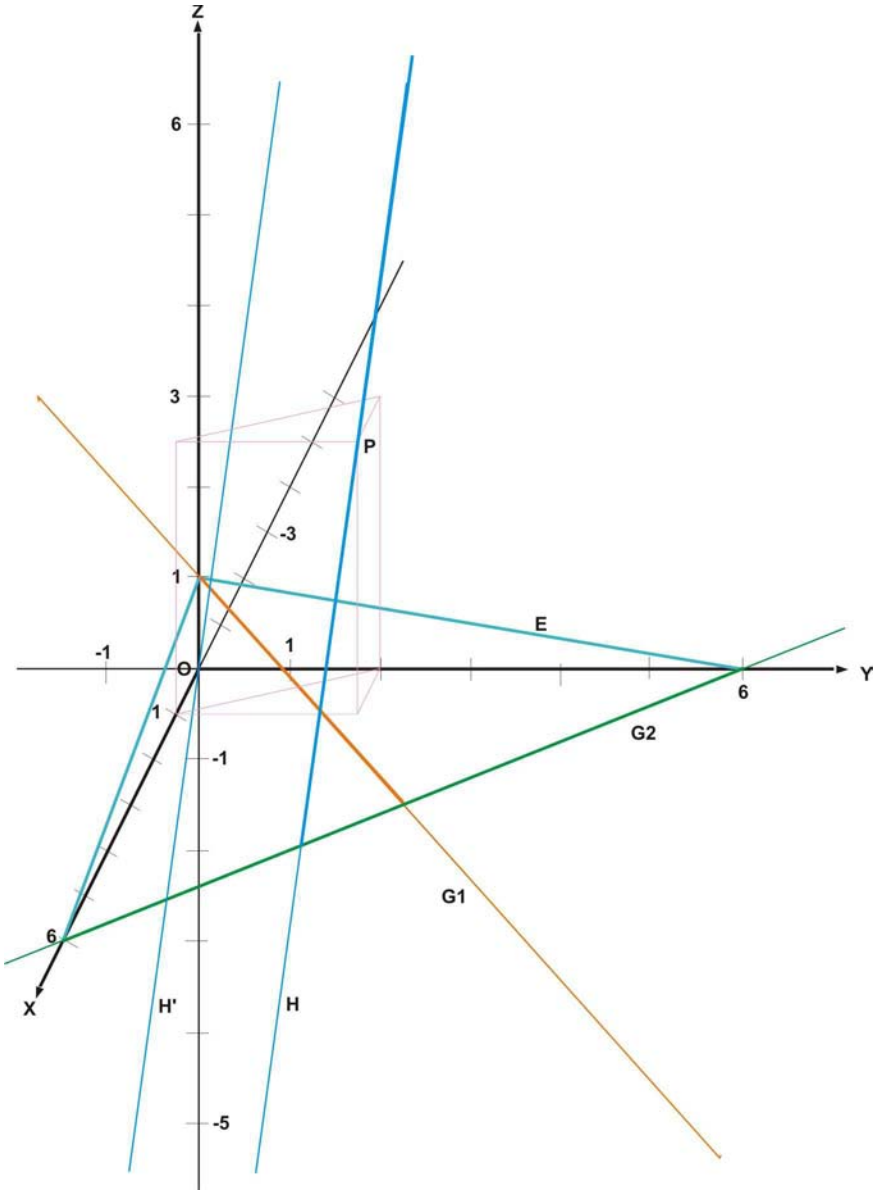
Eine Senkrechte auf E ist damit: H': $y = x$, $z = 6x$.

Die Parallele zu H', so dass H durch P geht (wie in 8.), ist:

H: $y = x - 2$, $z = 6x - 24$.

**12. Stoicheia XI.11:**
**Auf einer Ebene die Senkrechte durch einen nicht in ihr liegenden Punkt errichten.**

Die Senkrechte auf einer Ebene durch einen Punkt, der nicht auf ihr liegt, ist parallel zu einer Senkrechten durch einen Punkt auf der Ebene.




**Beispiel 14:**

Auf der Ebene E: $y = -x - 6z + 6$, $x/6 + y/6 + z/1 = 1$
die durch die Geraden

$G_1$: $y = x$, $z = -1/3\,x + 1$,

$G_2$: $y = -x + 6$, $z = 0$,

gegeben ist, soll durch den Punkt

P: (1, 2, 3),

der nicht in E liegt, die Senkrechte H errichtet werden.

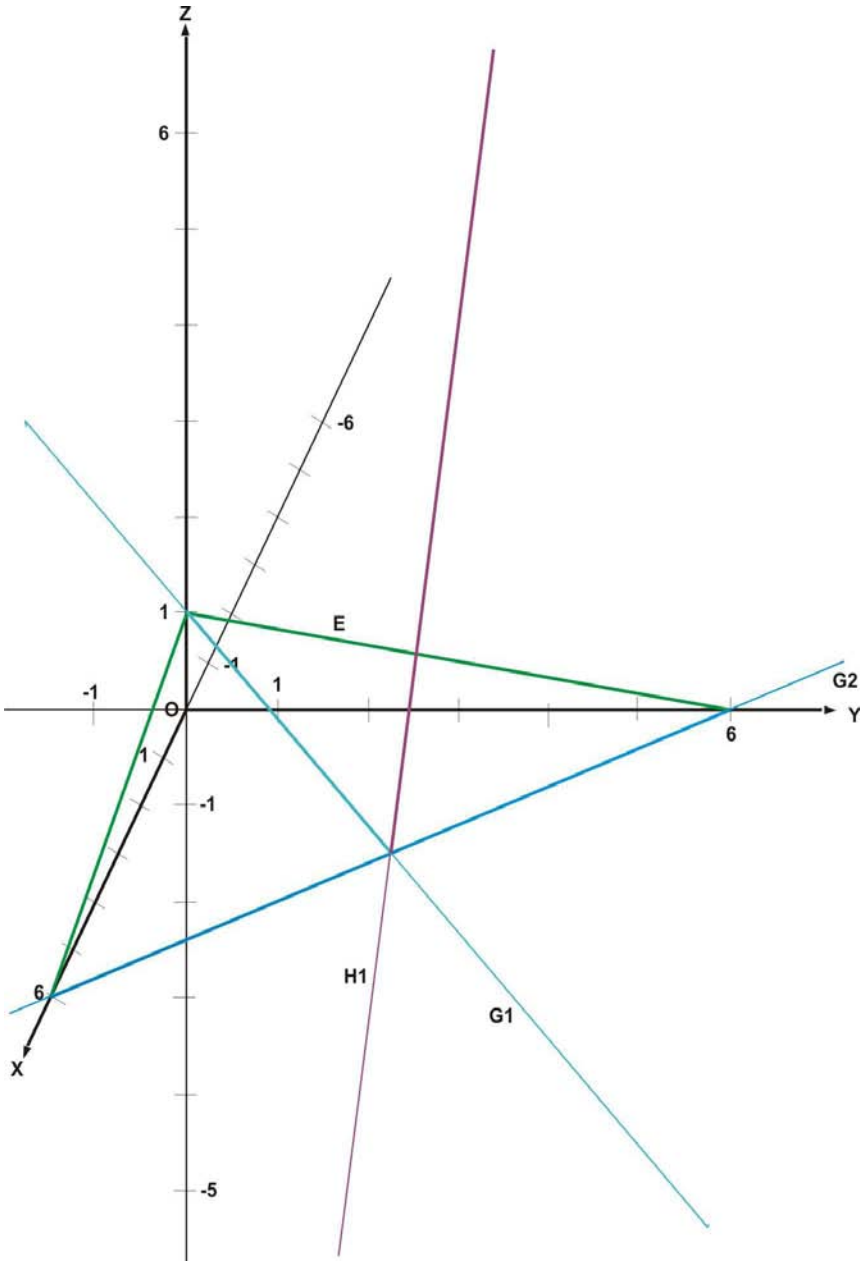
Eine Senkrechte auf E ist H': $y = x$, $z = 6x$, (wie in 11.),

Die Gerade H parallel dazu (wie in 8.) durch P ist:

H: $y = x + 1$, $z = 6x - 3$.

**13. Stoicheia XI.13:**
**Durch denselben Punkt einer Ebene können nicht zwei Senkrechte gezogen werden.**

Eine Senkrechte im Schnittpunkt zweier Geraden bildet mit der Ebene rechte Winkel.




**Beispiel 15:**

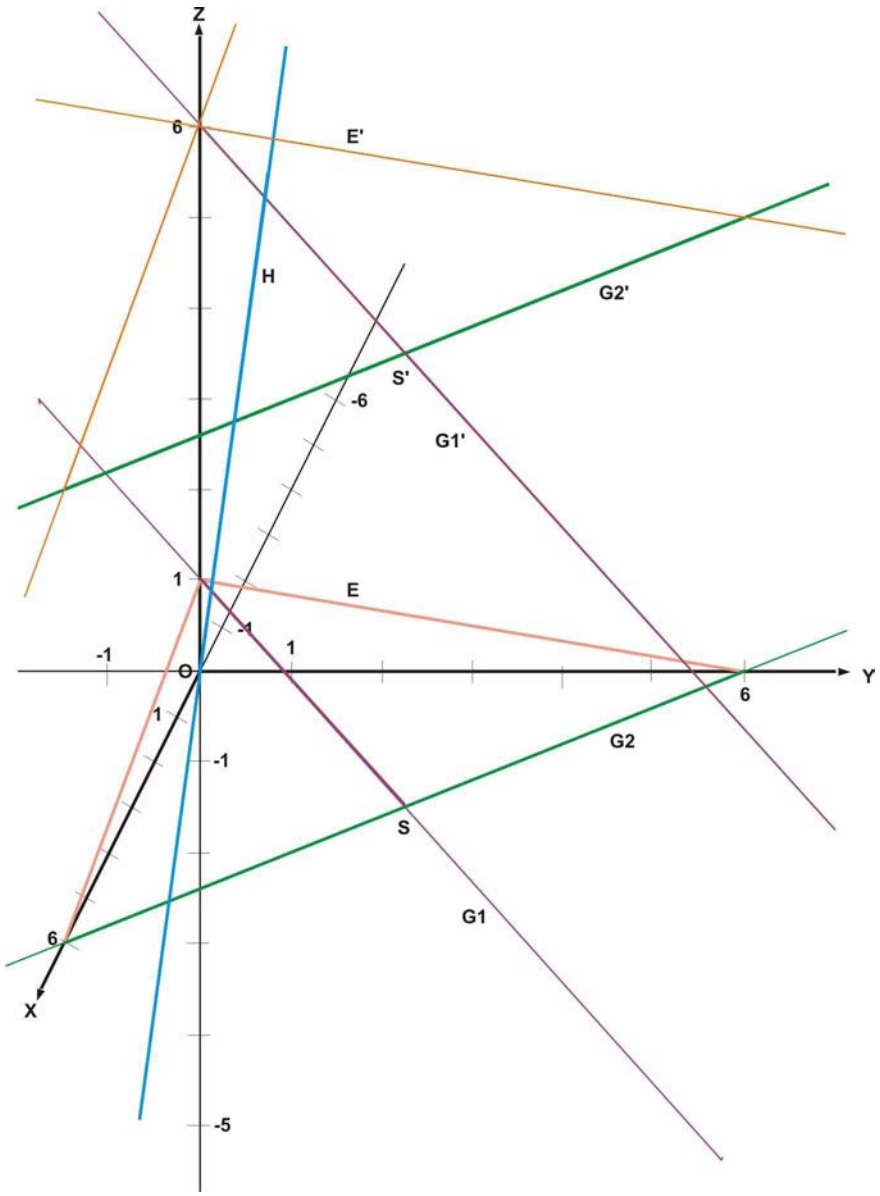
Die Geraden:
$G_1$ : $y = x$, $z = -1/3\,x + 1$
$G_2$ : $y = -x + 6$, $z = 0$
schneiden sich in in S: (3, 3, 0).

Die Gerade H: $y = x$, $z = 6x - 18$ steht in S senkrecht auf $G_1$ und $G_2$ und damit auf der mit ihnen gegebenen E: $y = -x - 6\,z + 6$.

Jede Senkrechte durch S hat Geradengleichungen, die der von H gleich sind.

**14. Stoicheia XI.14:**
**Ebenen, zu denen dieselbe Gerade senkrecht steht, sind parallel.**

Die Senkrechte durch parallele Ebenen bildet mit diesen Ebenen rechte Winkel.




**Beispiel 16:**

Die Gerade

$H: y = x, z = 6x - 18$

steht senkrecht auf

$G_1 : y = x, z = -1/3\, x + 1$

$G_2 : y = -x + 6, z = 0,$

und auf

$G'_1: y = x,\ z = -1/3\, x + 6$

$G'_2: y = -x + 6,\ z = 5,$

und damit auf der mit $G_1$ und $G_2$ gegebenen Ebene $E: y = -x - 6\, z + 6$

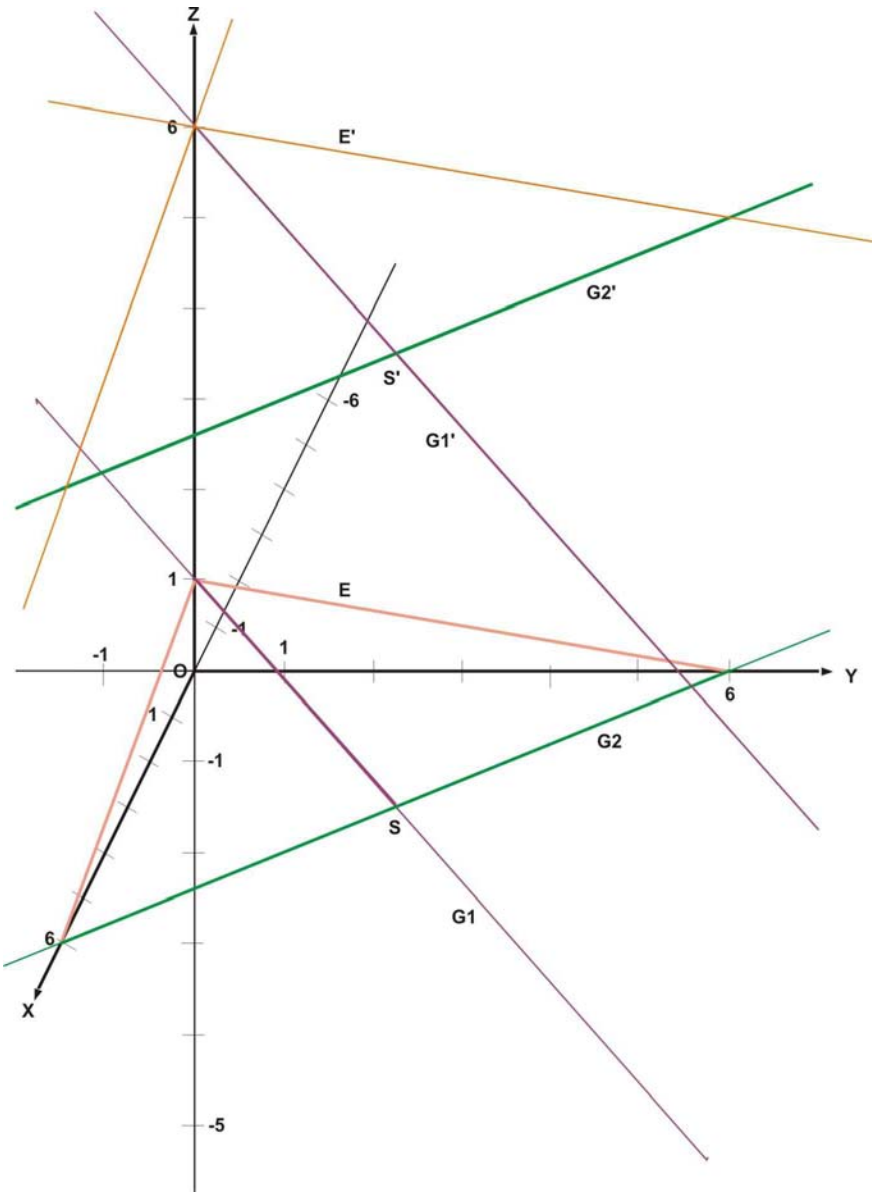
und auf der mit $G_1'$ und $G_2'$ gegebenen Ebene $E': y = -x - 6\, z + 36$ .

H bildet mit E und E' rechte Winkel, damit ist E parallel zu E', denn Gerade in E schneiden sich nicht mit Geraden in E'.

**15. Stoicheia XI.15:**

**Sind zwei sich schneidende Gerade einer Ebene den Geraden einer anderen Ebene parallel, dann sind die Ebenen parallel.**

Die Ebenen E: $y = u\,x + v\,z + w$
und E': $y = u'\,x + v'\,z + w'$.
sind parallel, wenn $u = u'$ und $v = v'$.




**Beispiel 17:**

Werden in der Ebene E: $y = -x - 6\,z + 6$,
die durch die Geraden

$G_1$: $y = x$, $z = -1/3\,x + 1$

$G_2$: $y = -x + 6$, $z = 0$ gegeben ist, die z-Werte um 5 erhöht, erhält man
die Geradengleichungen der Parallelen

$G'_1$: $y = x$, $z = -1/3\,x + 6$

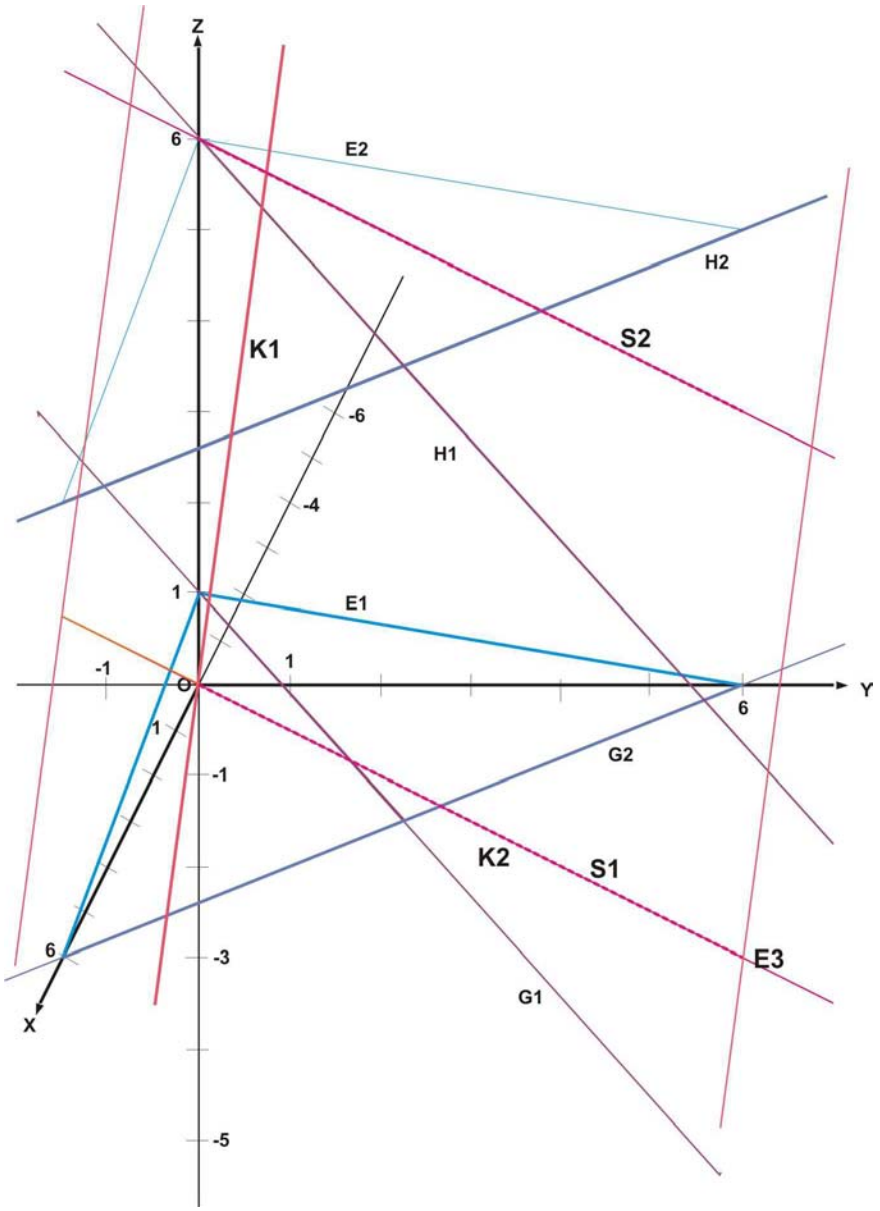
$G'_2$: $y = -x + 6$, $z = 5$,

und die Ebenengleichung E': $y = -x - 6\,z + 36$.

Die Ebenen E und E' sind parallel.

**16. Stoicheia XI.16:**
**Die Schnittgeraden in parallelen Ebenen, die von einer Ebene geschnitten werden, sind parallel.**

Schnittgerade paralleler Ebenen mit einer Ebene sind parallele Gerade der schneidenden Ebene.




**Beispiel 18:**

Die Ebene $E_1$: $y = -x - 6z + 6$, die durch die Geraden

$G_1$: $y = x$, $z = -1/3\,x + 1$

$G_2$: $y = -x + 6$, $z = 0$ gegeben ist,

ist parallel zur Ebene $E_2$: $y = -x - 6z + 36$, die durch die Geraden

$H_1$: $y = x$, $z = -1/3\,x + 6$

$H_2$: $y = -x + 6$, $z = 5$ gegeben ist.

Durch die Geraden

$K_1$: $y = x$, $z = 6x$

und $K_2$: $y = x$, $z = 0$

wird die Ebene $E_3$: $y = x$ gegeben, denn $K_1$ und $K_2$ schneiden sich (wie in 4.).

$E_3$ schneidet $E_1$ und $E_2$, denn die Schnittgeraden sind

$E_1$ mit $E_3$ ist $S_1$: $y = x$, $z = -1/3\,x + 1$

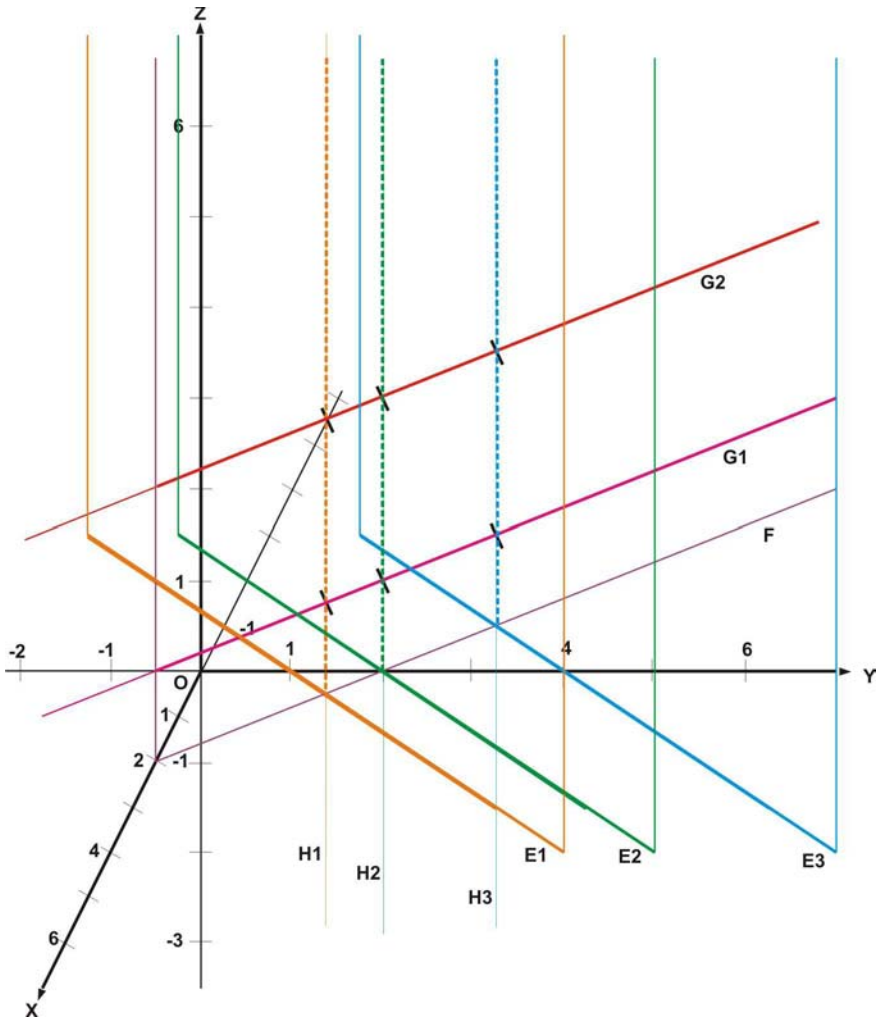
$E_2$ mit $E_3$ ist $S_2$: $y = x$, $z = -1/3\,x + 6$.

Die Schnittgeraden sind parallel (wie in 6.).

**17. Stoicheia XI.17:**
**Die Abschnitte der Geraden, die von parallelen Ebenen geschnitten werden, stehen im gleichen Verhältnis.**

Schneiden zwei Gerade mehrere parallele Ebenen liegen die schneidenden Geraden in einer Ebene, deren Schnittgeraden parallel sind (wie in 16.).

Ein Abschnitt einer Geraden ist eine Strecke d zwischen zwei Punkten $P_1$ und $P_2$ :
$d = ((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2)^{1/2}$




**Beispiel 19:**

Die Geraden

$G_1$: $y = -x + 2$, $z = 1$, $G_2$: $y = -x + 2$, $z = 3$

schneiden die parallelen Ebenen

$E_1$: $y = x + 1$, $E_2$: $y = x + 2$, $E_3$: $y = x + 4$ (graphisch: in den Ebenen liegende Flächen).

$G_1$ und $G_2$ liegen in der Ebene

F: $y = -x + 2$.

Die Schnittgeraden mit F sind:

mit $E_1$ die $H_1$: $y = 3/2$, $x = 1/2$,
mit $E_2$ die $H_2$: $y = 2$, $x = 0$,
mit $E_3$ die $H_3$: $y = 3$, $x = -1$. Die Schnittgeraden sind parallel zur z-Achse.

Die Schnittpunkte der $G_1$ sind: $P_1$: (1/2, 3/2, 1), $P_2$: (0, 2, 1), $P_3$: (-1, 3, 1),
die Schnittpunkte der $G_2$ sind: $Q_1$: (1/2, 3/2, 3), $Q_2$: (0, 2, 3), $Q_3$: (-1, 3, 3).

Der Abschnitt $P_2 P_1$ ist $\sqrt{2} / 2$, der Abschnitt $P_3 P_2$ ist $\sqrt{2}$,
dasselbe Verhältnis 1 : 2 gilt, da die Schnittgeraden parallel sind, auch für die Abschnitte auf $G_2$.

**18. Stoicheia XI.18:**
**Die Ebenen, in denen eine Senkrechte zu einer Ebene liegt, stehen senkrecht zu dieser Ebene.**

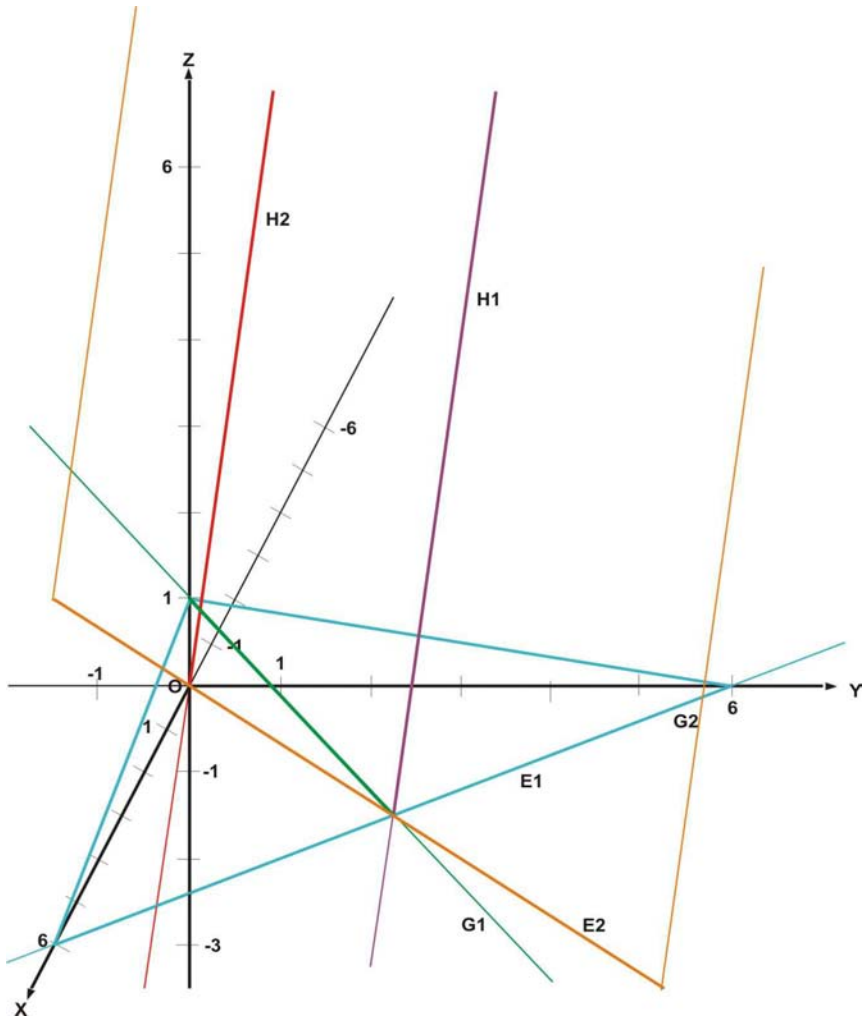
Die auf einer Ebene senkrechten Ebenen sind nicht notwendig parallel, aber alle Senkrechten auf einer Ebene sind parallel (wie in 8.).

Zwei Ebenen

$E: y = u\,x + v\,z + w$

$E': y = u'\,x + v'\,z + w'$.

stehen senkrecht aufeinander, wenn $u\,u' + v\,v' = -1$.




**Beispiel 20:**

Auf der Ebene

$E_1: y = -x - 6\,z + 6$,

die durch die Geraden:

$G_1: y = x,\ z = -1/3\,x + 1,\ \ G_2: y = -x + 6,\ z = 0$

gegeben ist, steht

$H_1: y = x,\ z = 6\,x - 18$ senkrecht, denn $H_1$ ist senkrecht zu $G_1$ und $G_2$ (wie in 5.).

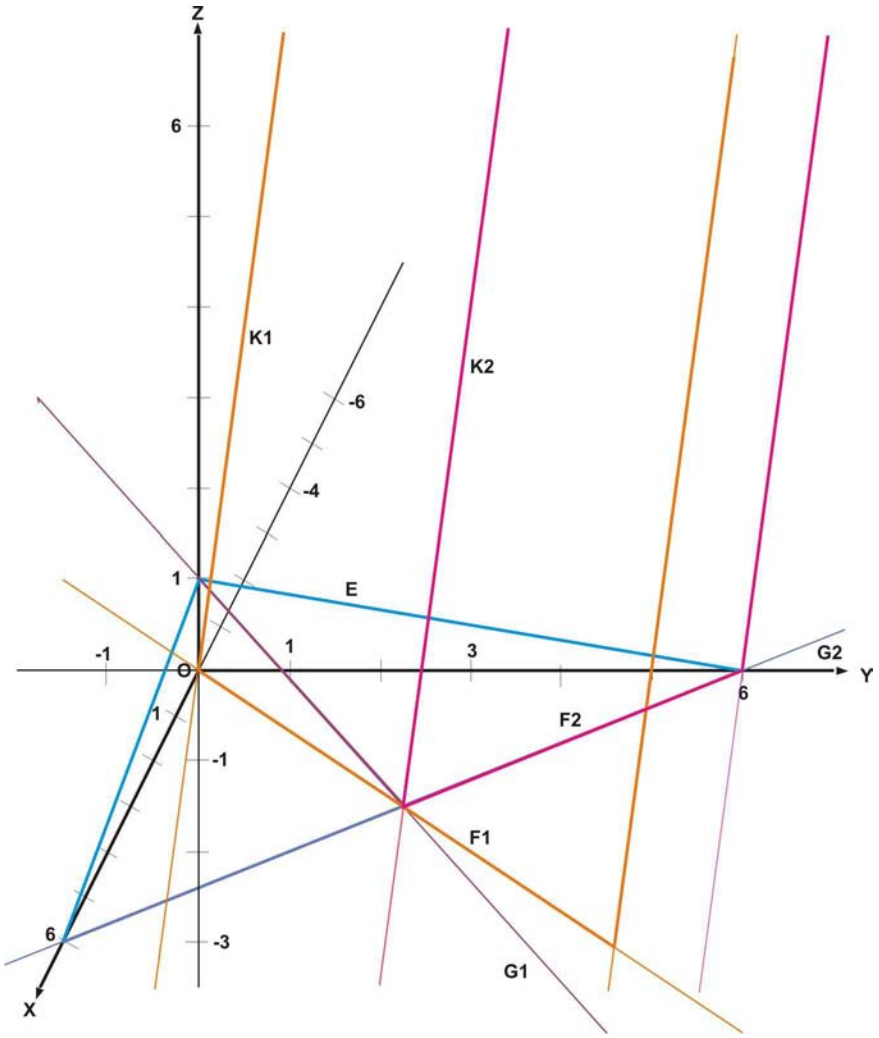
Eine Parallele zu $H_1$ ist $H_2: y = x,\ z = 6\,x$.

$H_1$ und $H_2$ liegen in der Ebene $E_2: y = x$.

$E_2$ steht senkrecht auf $E_1$.

**19. Stoicheia XI.19:**
**Die Schnittgerade von Ebenen, die senkrecht zu einer Ebene stehen, steht senkrecht zu dieser Ebene.**

Liegen in senkrecht auf einer Ebene stehende Ebenen parallele Senkrechte, ist auch die Schnittgerade eine parallele Senkrechte.




**Beispiel 21:**

Die Ebene E: $y = -x - 6z + 6$, ist durch die Geraden

$G_1$: $y = x$, $z = -1/3\,x + 1$

$G_2$: $y = -x + 6$, $z = 0$ gegeben.

Durch die Geraden

$K_1$: $y = x$, $z = 6x$

und $K_2$: $y = x$, $z = 6x - 18$

wird die Ebene $F_1$: $y = x$ gegeben. $K_1$ und $K_2$ stehen senkrecht auf E.

$F_1$ steht senkrecht auf E (wie in 18.) und schneidet E in $G_1$: $y = x$, $z = -1/3\,x + 1$.

Durch die Geraden

$G_2$: $y = -x + 6$, $z = 0$

und $K_2$: $y = x$, $z = 6x - 18$

wird die Ebene $F_2$: $y = -x + 1/3\,z + 6$ gegeben.

$F_2$ steht senkrecht auf E und schneidet E in $G_2$: $y = -x + 6$, $z = 0$.

Die Ebene $F_1$ schneidet die Ebene $F_2$ in $K_2$: $y = x$, $z = 6x - 18$.

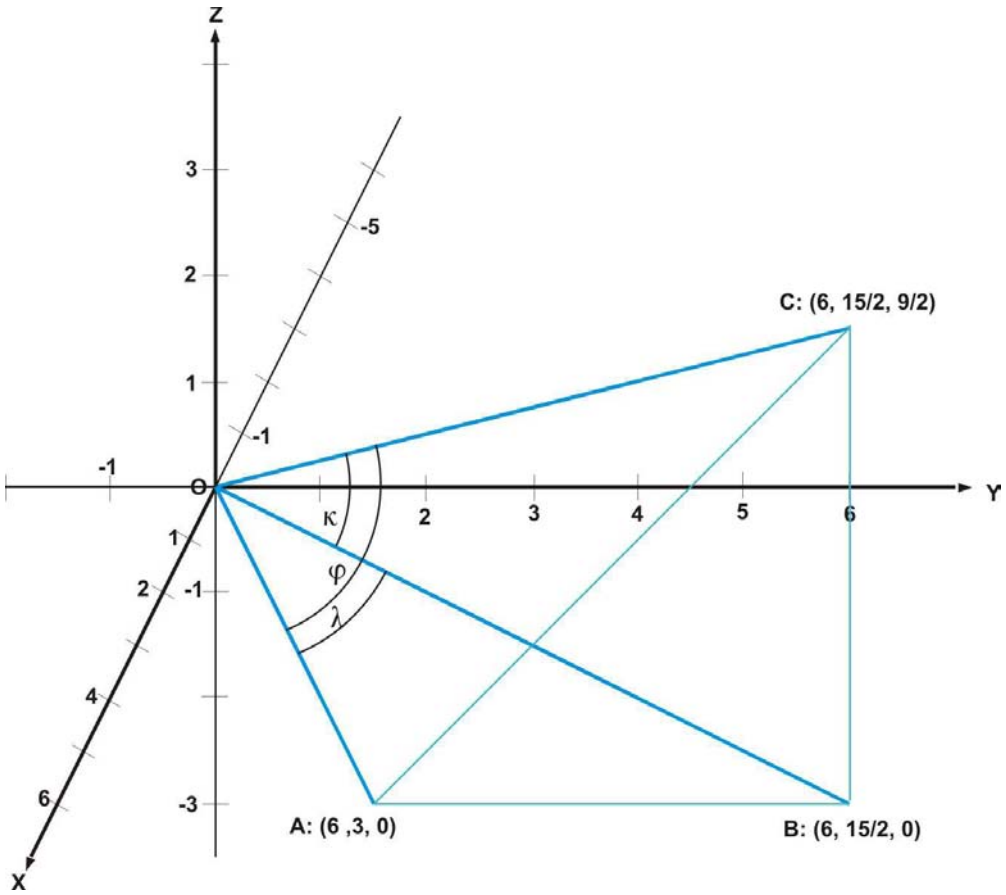
Die Schnittgerade der auf E senkrecht stehenden Ebenen steht somit senkrecht auf E.

**20. Stoicheia XI.20:**
**Im Raumwinkel, der von drei ebenen Winkeln gebildet wird, sind je zwei Winkel zusammen größer als der dritte.**

Die Angabe eines Raumwinkels $(\varphi, \kappa, \lambda)$ enthält keine Angabe über dessen Lage, mit der Angabe der Geraden, die den Raumwinkel aufspannen, ist jedoch dessen Lage gegeben.

Ein Raumwinkel, der von drei ebenen Winkeln gebildet wird, wird von drei Geraden aufgespannt, die sich in einem gemeinsamen Punkt schneiden.

Wird auf jeder dieser drei Geraden ein Punkt A, B, C ungleich O gewählt, der zum Eckpunkt eines Dreiecks wird, überspannt jede Dreiecksseite des Dreiecks ABC einen der drei ebenen Winkel des Raumwinkels. Zwei Dreiecksseiten überspannen deshalb zwei Winkel, die zusammen größer sind als der Winkel über der übrigen Dreiecksseite.




**Beispiel 22:**

Der Raumwinkel $(\varphi, \kappa, \lambda)$ wird aufgespannt von den Ursprungsgeraden
OA: $y = 1/2\ x,\ z = 0,$
OB: $y = 5/4\ x,\ z = 0,$
OC: $y = 5/4\ x,\ z = 3/4\ x.$

O ist der gemeinsame Schnittpunkt.

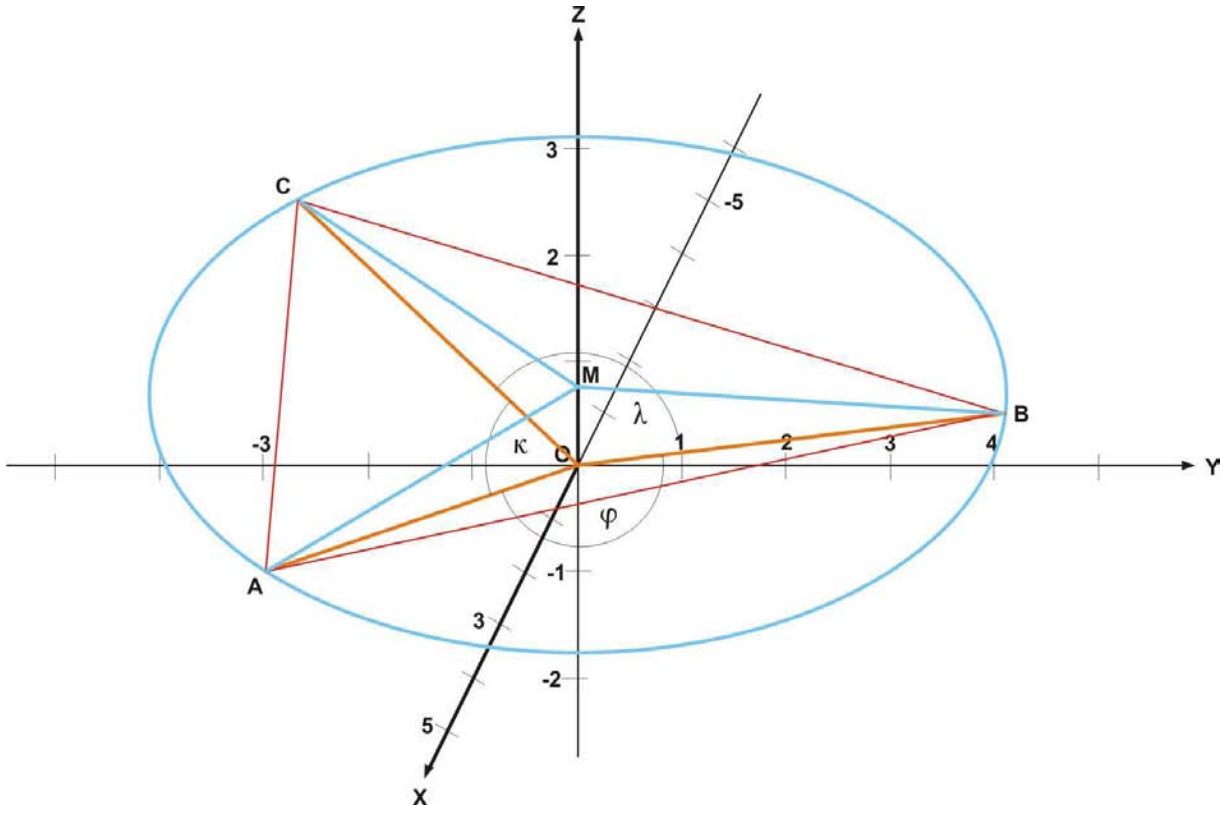
Die Schnittwinkel der Geraden werden wie in 4. berechnet:
$\varphi = 34{,}7°,\ \ \kappa = 25{,}1°,\ \ \lambda = 24{,}8°.$

**21. Stoicheia XI.21:**
**Die ebenen Winkel, die einen Raumwinkel bilden, sind zusammen kleiner als vier rechte Winkel.**

Nach diesem Lehrsatz kann kein ebener Winkel des Raumwinkels gleich oder größer als zwei rechte Winkel sein, denn, wenn ein ebener Winkel größer als zwei rechte wäre, könnten die anderen Winkel zusammen nicht größer als dieser Winkel sein.

Wählt man auf den Geraden, die den Raumwinkel aufspannen, Punkte im gleichen Abstand vom gemeinsamen Schnittpunkt, liegen diese Punkte auf einem Kreis K und zusammen mit dem Mittelpunkt M des Kreises in der gleichen Ebene.

Je zwei der gewählten Punkte auf dem Kreis sind mit dem Mittelpunkt M Eckpunkte eines Kreisausschnitts des Kreises K. Die Winkel dieser Kreisausschnitte ergänzen sich zu vier rechten Winkeln.




**Beispiel 23:**

Die Geraden, die den Raumwinkel aufspannen, seien:
$OP_1$: $y = -1/2\ x$, $z = 1/4\ x$. $OP_2$: $y = \sqrt{19}\ x$, $z = x$. $OP_3$: $y = 1/3\ \sqrt{11}\ x$, $z = -1/3\ x$.

Auf den Geraden, die den Raumwinkel aufspannen, liegen die Punkte
A: (4, -2, 1), B: (1, $\sqrt{19}$, 1), C: (-3, $-\sqrt{11}$, 1), mit Abstand $\sqrt{21}$ zum Schnittpunkt O des Raumwinkels.

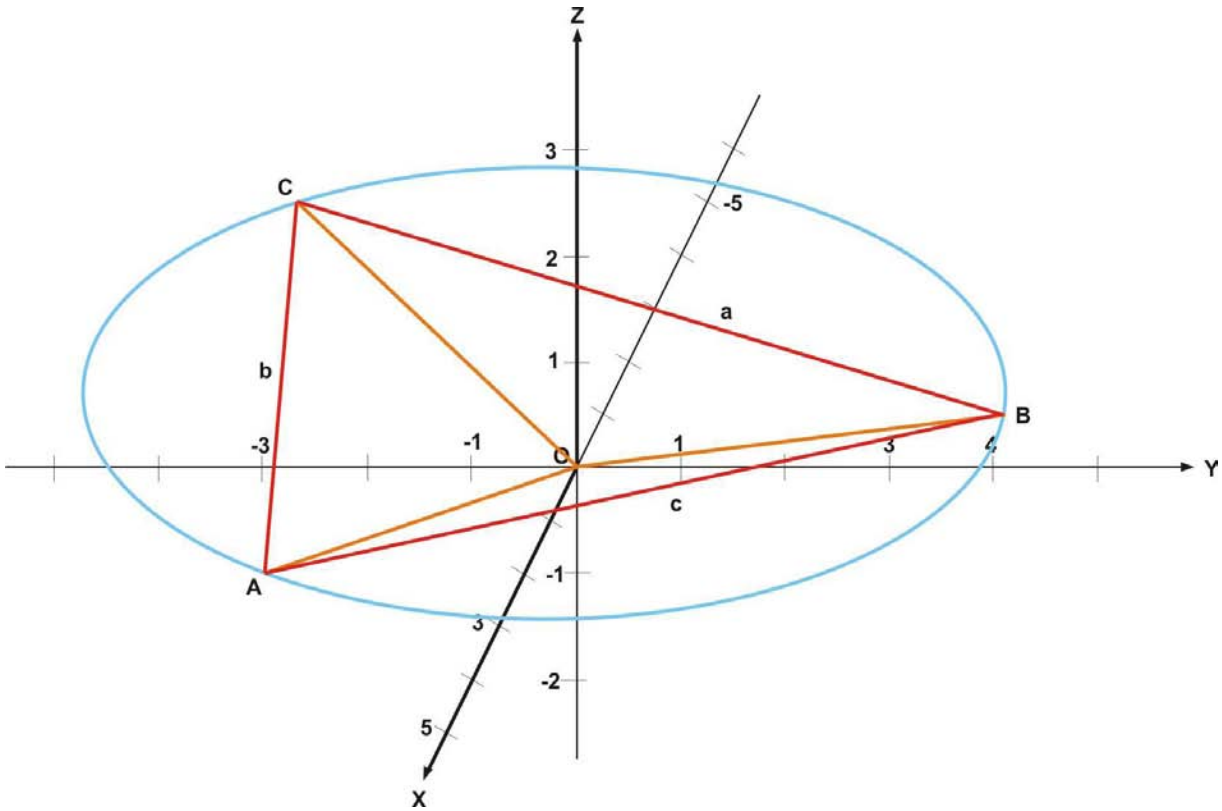
Die Schnittwinkel der Geraden werden berechnet wie in 4.:
im Raumwinkel $(\varphi, \kappa, \lambda)$ ist $\varphi = 100{,}2°$, $\kappa = 78°$, $\lambda = 38{,}4°$.

**22. Stoicheia XI.22:**

**Drei Strecken über denen ebene Winkel errichtet sind, von denen je zwei zusammen größer sind als der dritte und die jeweils von gleichen Strecken eingeschlossen werden, sind den Seiten eines Dreiecks gleich.**

Wählt man auf den Geraden, die den Raumwinkel aufspannen, Punkte im gleichen Abstand vom gemeinsamen Schnittpunkt, liegen diese Punkte auf einem Kreis und in der gleichen Ebene.

Je zwei dieser Punkte auf dem Kreis sind mit dem Schnittpunkt des Raumwinkels Eckpunkte von Dreiecken. Die Seiten dieser Dreiecke in der Ebene des Kreises sind Seiten eines Dreiecks und je zwei von ihnen zusammen sind größer als die dritte.




**Beispiel 24:**

Die Geraden, die den Raumwinkel aufspannen, seien:

OA: $y = -1/2\ x,\ \ z = 1/4\ x.$

OB: $y = \sqrt{19}\ x,\ z = x.$

OC: $y = \sqrt{11}\ /\ 3\ x,\ \ z = -1/3\ x.$

Auf den Geraden, die den Raumwinkel aufspannen, liegen die Punkte

A: (4, -2, 1),

B: $(1, \sqrt{19}, 1)$, C: $(-3, -\sqrt{11}, 1)$, mit Abstand $\sqrt{21}$ zum Schnittpunkt O des Raumwinkels.

Der Abstand d zweier Punkte $P_1$ und $P_2$ ist $d = ((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y)^2 + (z_2 - z_1)^2)^{1/2}$

Die Seiten des Dreiecks ABC sind damit

a = 8,6

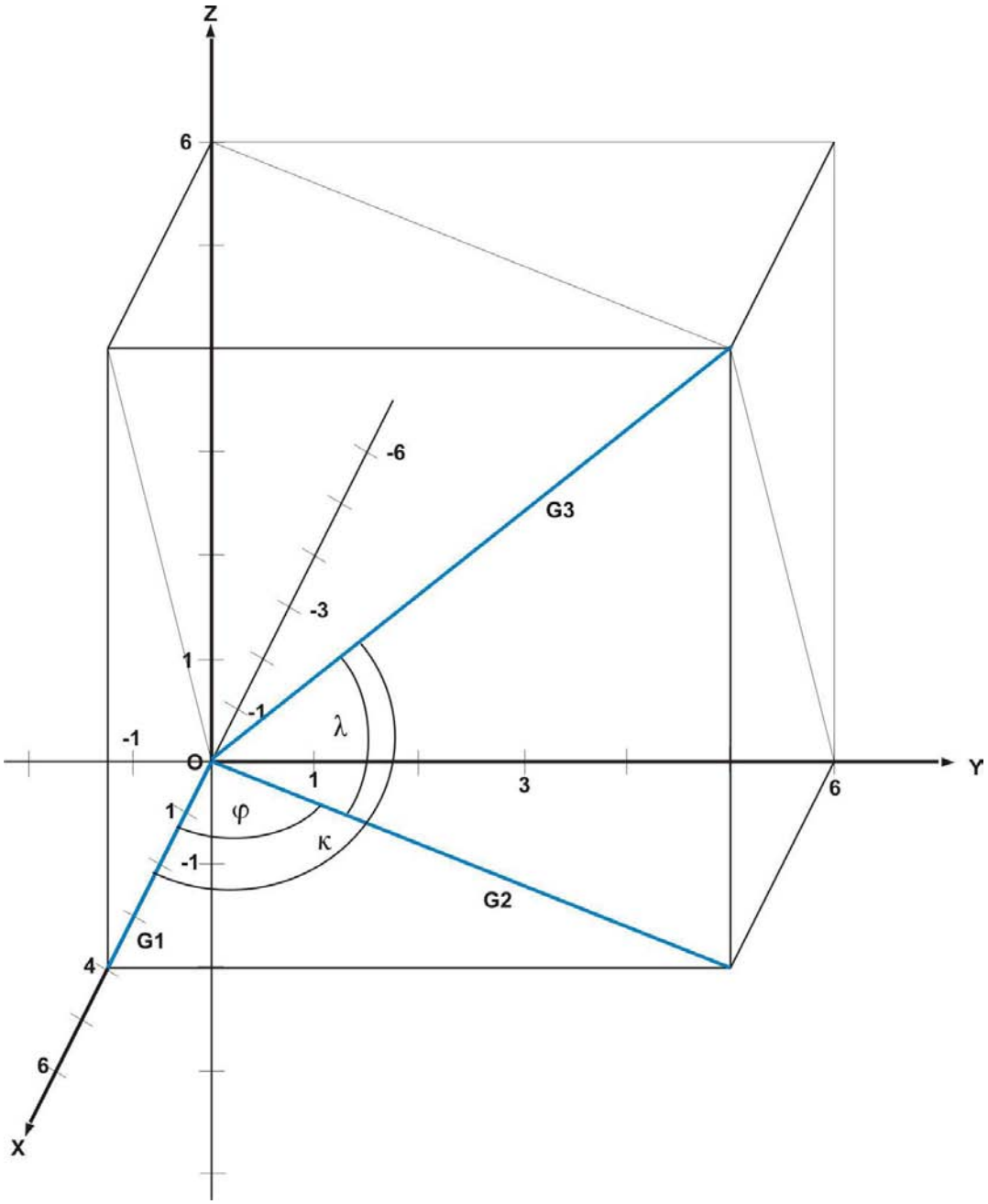
b = 7,1

c = 7,0

**23. Stoicheia XI.23:**

**Aus drei ebenen Winkeln, die zusammen kleiner als vier rechte Winkel sind und von denen je zwei zusammen größer sind als der dritte, einen Raumwinkel bilden.**

Mit den Geraden, die den Raumwinkel aufspannen, ist die Lage des Raumwinkels und sind die ebenen Winkel gegeben, aus denen er zusammengesetzt ist.




**Beispiel: 25:**

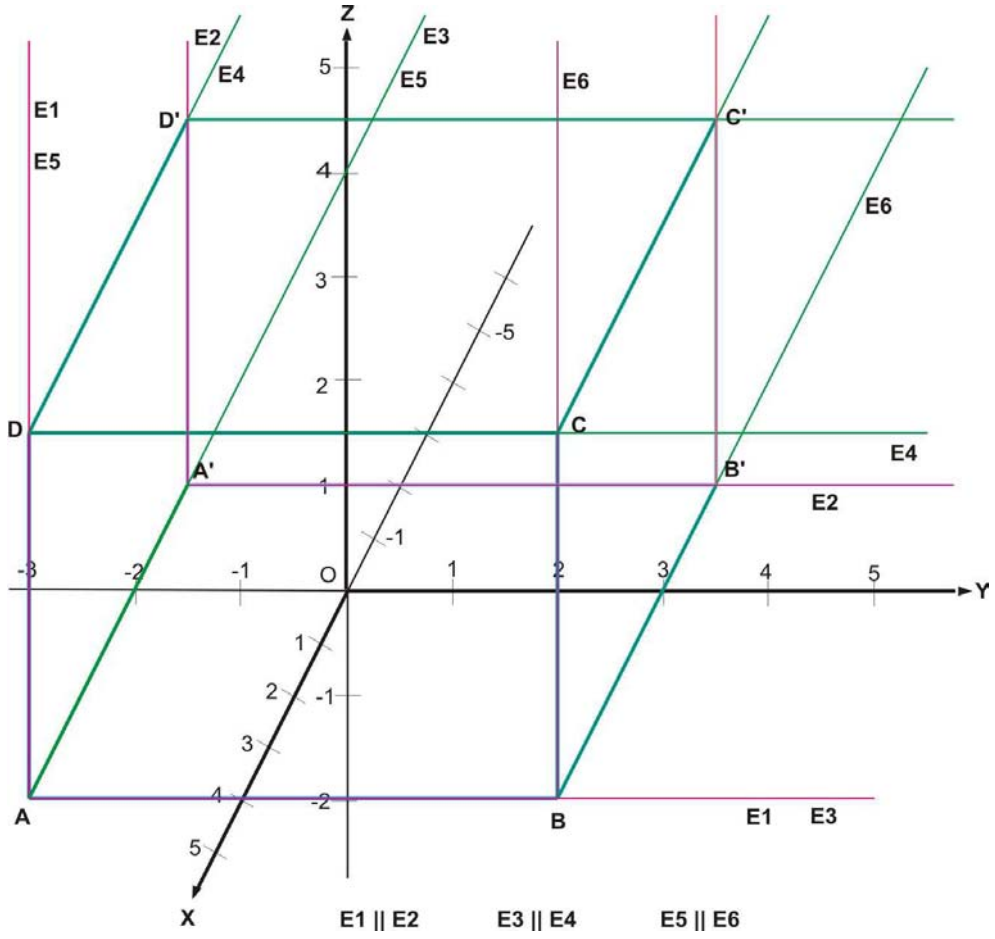
Es wird der Raumwinkel $(\varphi, \kappa, \lambda) = (56{,}3°; 64{,}7°; 39{,}6°)$ errichtet.

$G_1$: $y = 0$, $z = 0$,
$G_2$: $y = 3/2\ x$, $z = 0$,
$G_3$: $y = 3/2\ x$, $z = 3/2\ x$.

Der Winkel der $G_1$ mit $G_2$ ist $\varphi = \arctan m_2$.
Für den Winkel der $G_1$ mit $G_3$ ist $\cos \kappa = 1 / (1 + m_3^2 + n_3^2)^{1/2}$.
Da für den Schnittwinkel $\lambda$ der Geraden $G_2$ mit $G_3$
$\cos \lambda = (1 + m_2 m_3 + n_2 n_3) / ((1 + m_2^2 + n_2^2)(1 + m_3^2 + n_3^2))^{1/2} = 0{,}77$ ist $\lambda = 39{,}6°$.

**24. Stoicheia XI.24:**
**Die gegenüberliegenden Flächen eines Körpers, der in Länge, Breite und Höhe zwischen parallelen Ebenen liegt, sind gleiche Parallelogramme.**

Nach 16. sind die Kanten eines Parallelepipeds parallel, denn es sind Schnittgerade von parallelen Ebenen. Die gegenüberliegenden Kanten und Flächen eines Parallelepipeds sind nicht nur parallel, sondern auch einander gleich.

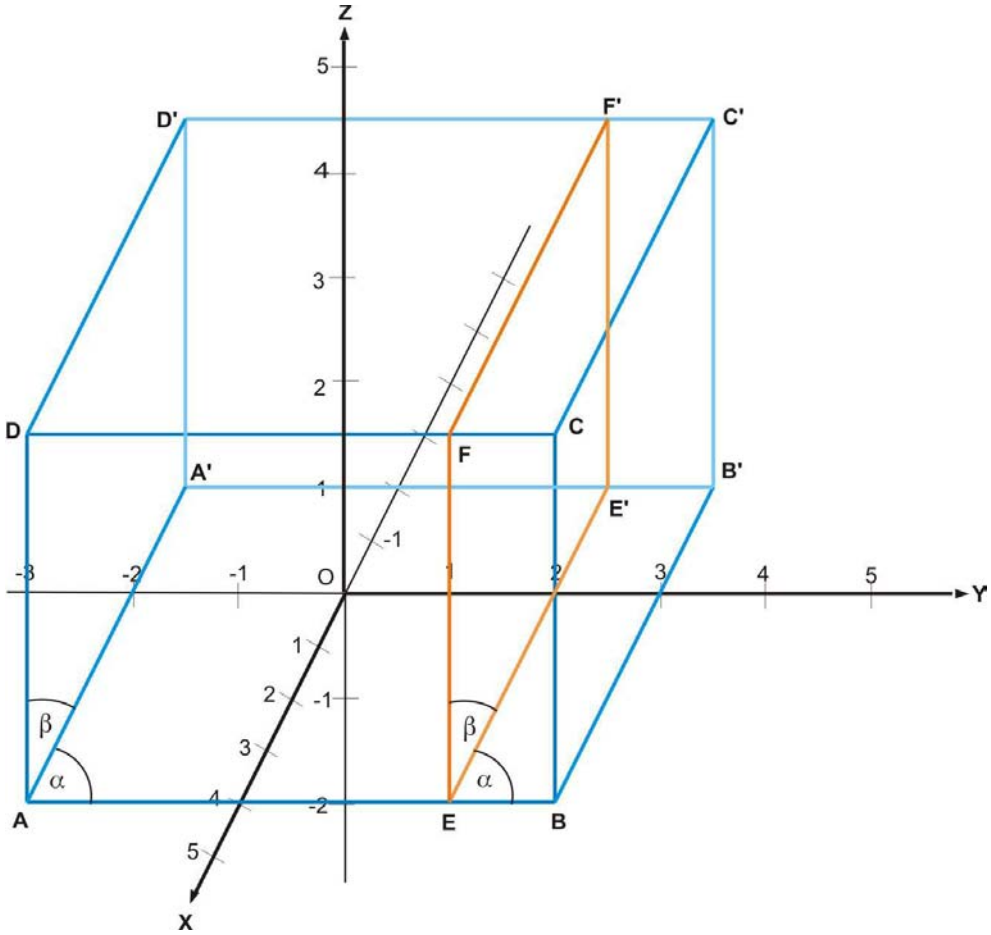



**Beispiel 27:**
Der Körper, der zwischen den parallelen Ebenen
E1: x = 4 und E2: x = –2 ,
zwischen den parallelen Ebenen
E3: z = 0 und E4: z = 3,5 ,
und zwischen den parallelen Ebenen
E5: y = –2 und E6: y = 3
liegt, ist ein Parallelepiped.

Das Parallelogramm ABCD mit
A: (4, -2, 0), B: (4, 3, 0), C: (4, 3, 3,5), D: (4, -2, 3,5)
und das Parallelogramm A'B'C'D' mit
A': (-2, -2, 0), B': (-2, 3, 0), C': (-2, 3, 3,5), D': (-2, -2, 3,5)
sind gleiche Parallelogramme,
denn jede Kante von ABCD ist gleich der gegenüberliegenden Kante von A'B'C'D' und der Winkel DAB ist gleich dem Winkel D'A'B' (wie in 10.).

**25. Stoicheia XI.25:**
**Von den durch eine, zu einer der gegenüberliegenden Flächen eines parallelepipeden Körpers parallelen, schneidende Ebene abgeteilten Körpern verhält sich einer zum andern wie seine Grundfläche zur andern.**

Wie in 10. bilden zwei sich schneidende Gerade, die schneidenden Geraden einer anderen Ebene parallel sind, gleiche Winkel.




**Beispiel 28:**

Das zwischen den gegenüberliegenden Ebenen E: y = –2 und E': y = 3 liegende Parallelepiped wird durch die Ebene F: y = 2 geteilt.

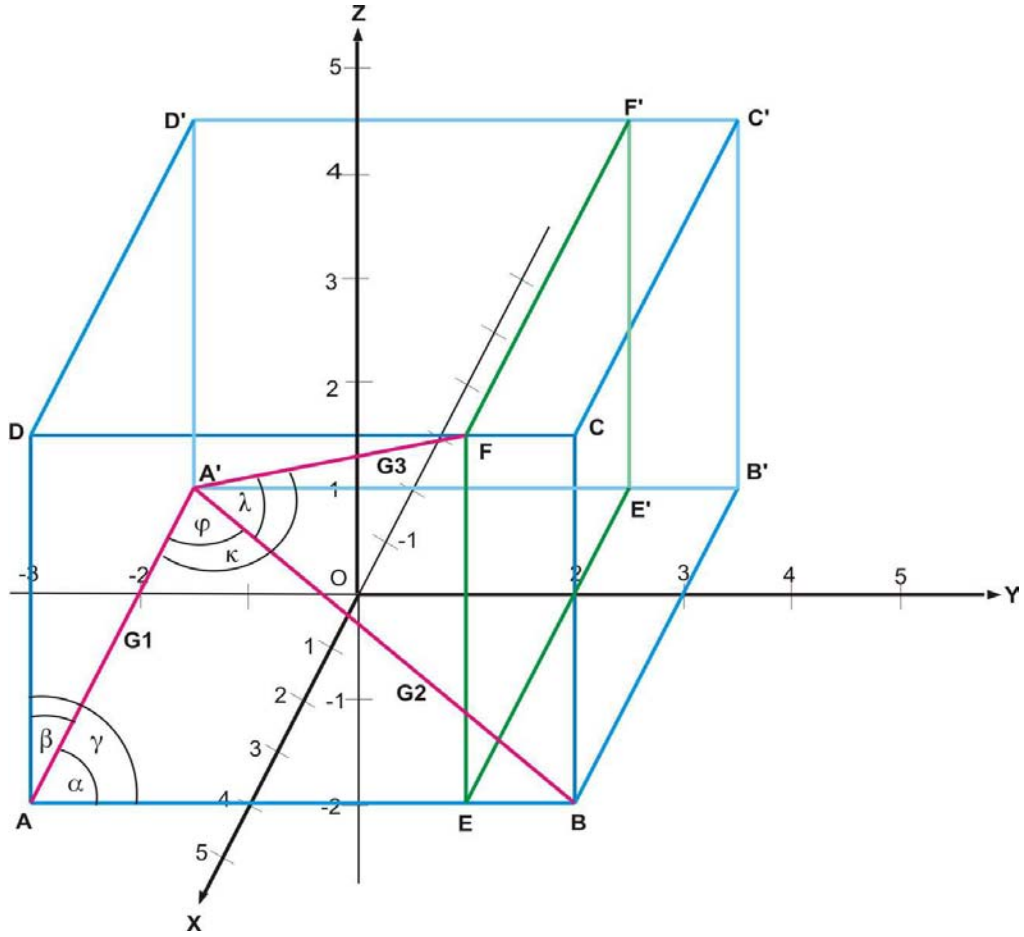
Es sei der Winkel A'AE = E'EB = $\alpha$ und DAA' = FEE' = $\beta$.

Das Parallelepiped AF' = $\overline{AE} \cdot \overline{AA'} \cdot \sin\alpha \cdot \overline{AD} \cdot \sin\beta$ verhält sich dann zum
Parallelepiped EC' = $\overline{BE} \cdot \overline{BB'} \cdot \sin\alpha \cdot \overline{BC} \cdot \sin\beta$
wie die Grundfläche AE' = $\overline{AE} \cdot \overline{AA'} \cdot \sin\alpha$
zur Grundfläche EB' = $\overline{BE} \cdot \overline{BB'} \cdot \sin\alpha$, denn $\overline{AD} \cdot \sin\beta = \overline{BC} \cdot \sin\beta$, und
wie die Kante $\overline{AE}$ zur Kante $\overline{EB}$,
denn $\overline{AA'} \cdot \sin\alpha = \overline{BB'} \cdot \sin\alpha$.

Im graphischen Beispiel:
AF' : EC' = 84 : 21 = AE' : EB' = 24 : 6 = $\overline{AE} : \overline{EB}$ = 4 : 1.

**26. Stoicheia XI.26:**
**An einer Geraden in einem gegebenen Punkt einen Raumwinkel anlegen, der einem gegebenen gleich ist.**

Ein Raumwinkel kann mittels eines Parallelepipeds gegeben werden.




**Beispiel 29a:**

Daten des Raumwinkels, zu dem ein gleicher errichtet werden soll.

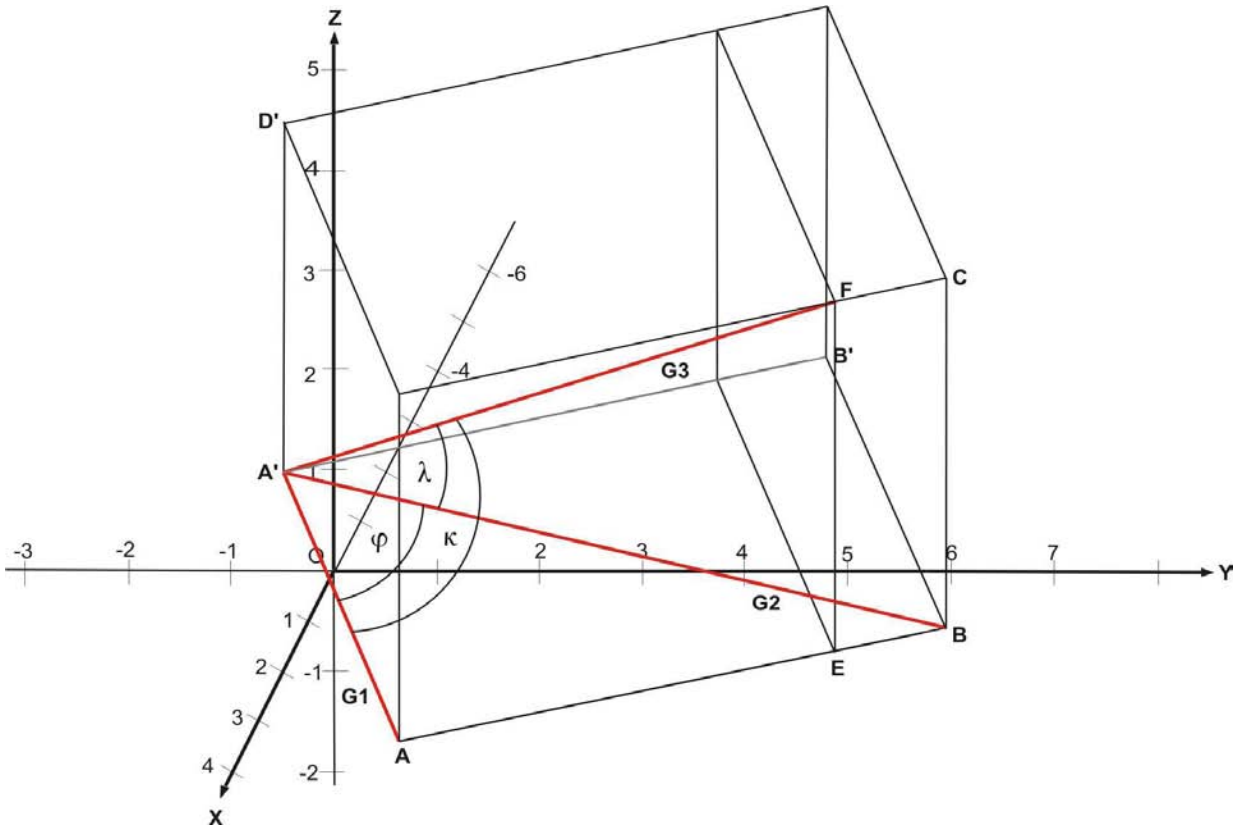
Der Raumwinkel $(\varphi, \kappa, \lambda) = (39{,}8°; 41{,}5°; 26{,}5°)$
wird aufgespannt zwischen den Punkten
A: (4, -2, 0), B: (4, 3, 0), F: (4, 2, 3,5),
dabei ist
A': (–2, –2, 0) der gemeinsame Schnittpunkt der
Geraden
$G_1$: $y = -2$, $z = 0$,
$G_2$: $y = 5/6\,x + 43/15$, $z = 0$,
$G_3$: $y = 2/3\,x + 14/3$, $z = 7/12\,x + 7/6$.

E: (4, 2, 0) ist der Fußpunkt der Senkrechten durch F auf der Ebene E: $z = 0$,
in der das Dreieck ABA' liegt.

$\overline{G1}$ bildet mit der Geraden AB den Winkel $\alpha = 90°$.
AD steht senkrecht auf der Ebene E, somit mit den Winkeln $\beta = 90°$ und $\gamma = 90°$.

$\overline{AA'} = 6$, $\overline{AB} = 5$, $\overline{A'B} = 7{,}81$, $\overline{A'D'} = 3{,}5$, $\overline{AE} : \overline{EB} = 4 : 1$.

Da im Parallelepiped gegenüberliegende Kanten parallel sind, sind nebeneinanderliegende ebene Winkel in den Eckpunkten Nebenwinkel des andern und sind Raumwinkel in diagonal gegenüberliegenden Eckpunkten gleich. Ein Raumwinkel kann deshalb zu einem Parallelepiped ergänzt werden.




**Beispiel 29b**:

Einen dem Raumwinkel aus Beispiel 29a gleichen Raumwinkel $(\varphi, \kappa, \lambda) = (39{,}8°; 41{,}5°; 26{,}5°)$
im Punkt A': (–2, –1, 0)
an die Gerade $G_1$: $y = 1/2\ x$, $z = 0$, anlegen.

Der Punkt A liegt auf $G_1$; da AA' = 6 ist A: (3,37; 1,68; 0).
Die Gerade durch A' und B' bildet mit $G_1$ den Winkel $\alpha = 90°$ und geht durch A'.
A'B': $y = -2\ x - 5$, $z = 0$.
Da $\overline{A'B'} = 5$ ist B': (–4,24; 3,48; 0)

Dazu parallel ist AB: $y = -2\ x + 8{,}42$; $z = 0$;
Der Punkt B liegt auf AB und damit ist B: (1,13; 6,16; 0).

Die Kante A'D' schließt mit der x-y-Ebene die Winkel $\beta = 90°$ und $\gamma = 90°$ ein und ist damit eine Parallele zur z-Achse. Also ist D': (–2; –1; 3,5).

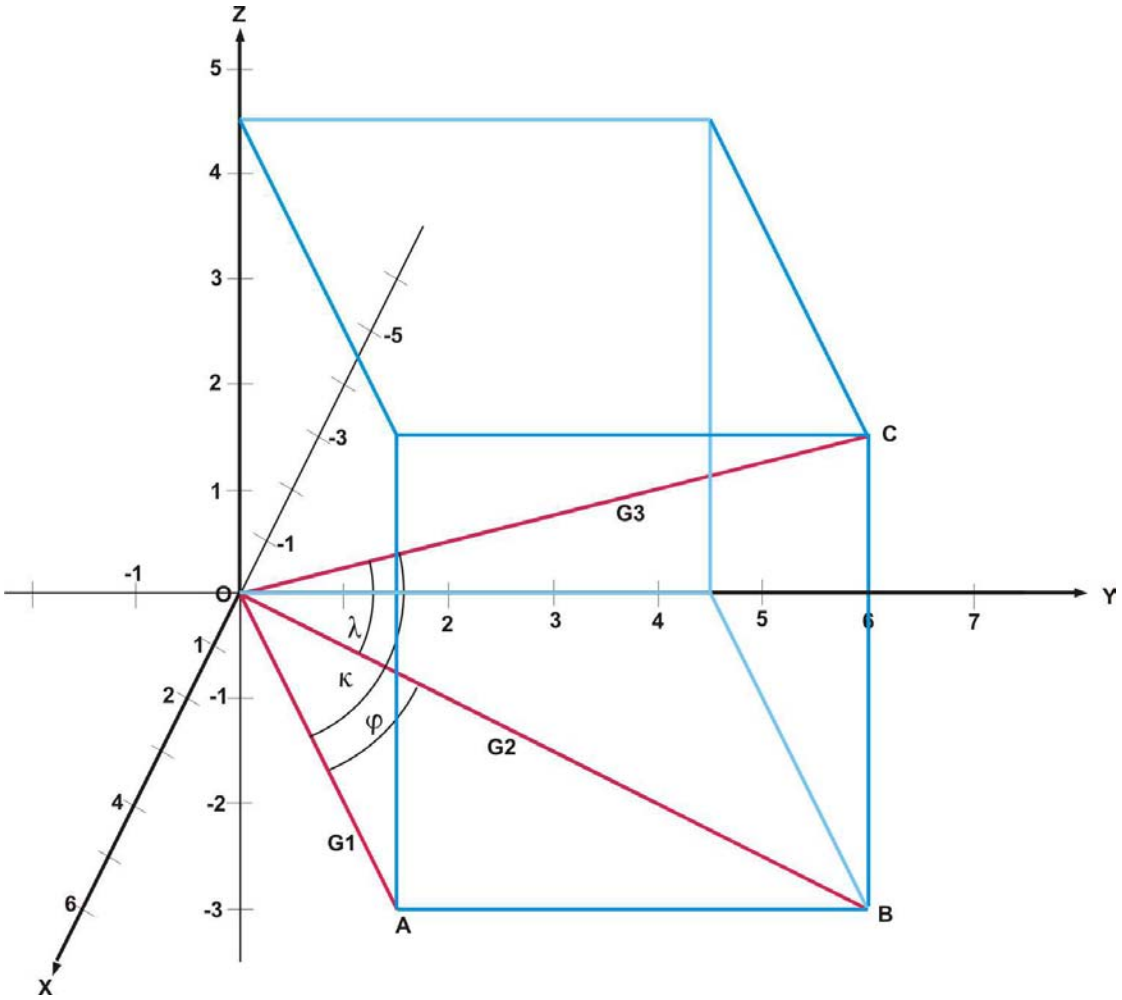
Damit sind die Kanten A'A, A'B' und A'D' gegeben; die übrigen Kanten des Parallelepipeds sind Parallele zu diesen Kanten.

Für die Teilung einer Strecke AB im Verhältnis k gilt: $x_k = (x_1 + k\ x_2) / (1 + k)$, $y_k = (y_1 + k\ y_2) / (1 + k)$,
mit k = 4 :1 ist $x_k = 1{,}58$ und $y_k = 5{,}26$, damit ist E: (1,58; 5,26; 0) und F: (1,58; 5,26; 3,5).

Die Geraden
$G_1$: $y = 1/2\ x$, $z = 0$;
$G_2$: $y = 2{,}287\ x + 3{,}575$, $z = 0$;
$G_3$: $y = 1{,}75\ x + 2{,}5$, $z = 0{,}977\ x + 1{,}955$.
bilden die verlangten Winkel (Berechnung wie unter 4.).

**27. Stoicheia XI.27:**
**An einer Strecke ein Parallelepiped, das einem gegebenen ähnlich ist, gleich errichten.**

Durch die Geraden, die einen Raumwinkel aufspannen, deren gemeinsamem Schnittpunkt und Eckpunkten auf den Geraden wird ein Parallelepiped gegeben.

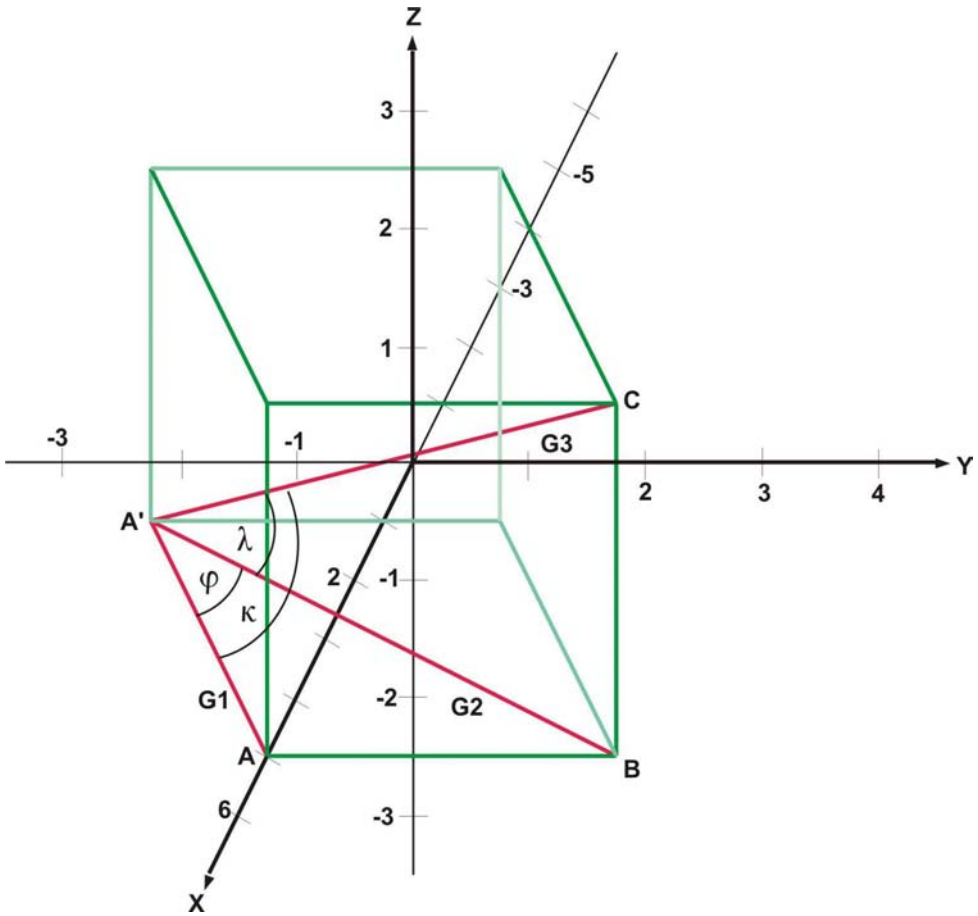



**Beispiel 30a:**
Das Parallelepiped wird durch den Raumwinkel $(\varphi, \kappa, \lambda) = (34{,}7°; 25{,}1°; 24{,}8°)$ gegeben mit den Ursprungsgeraden
$G_1 = OA$: $y = 1/2\ x$, $z = 0$,
$G_2 = OB$: $y = 5/4\ x$, $z = 0$,
$G_3 = OC$: $y = 5/4\ x$, $z = 3/4\ x$.

O ist der gemeinsame Schnittpunkt.

Die gegebenen Punkte sind A: (6; 3; 0), B: (6; 7,5; 0), C: (6, 7,5; 4,5).
Die gegebenen Kanten des Parallelepipeds sind damit
$\overline{OA} = 6{,}7$, $\overline{OB} = 9{,}6$, $\overline{OC} = 10{,}6$.

Aus der Gleichheit der Raumwinkel ergibt sich die Ähnlichkeit der Parallelepipede.




**Beispiel 30b:**

Um ein ähnliches Parallelepiped zu errichten ist ein dem Raumwinkel aus Beispiel 30a gleicher Raumwinkel $(\varphi, \kappa, \lambda) = (34{,}7°; 25{,}1°; 24{,}8°)$
im Punkt A': (1, –2, 0) an die Gerade $G_1$: $y = 1/2\,x - 3{,}5$; $z = 0$, anzulegen.
Das Verhältnis der gegebenen Strecken ist 67 : 96 : 106.

Das Parallelepiped soll an der Strecke $\overline{A'A} = 5$ errichtet werden.
Die Strecken auf den Geraden, die den Raumwinkel aufspannen, verhalten sich deshalb wie 5 : 7,16 : 7,9.

Die Geraden schneiden sich in A' und sind jetzt:
$G_1$ = A'A: $y = 0.5\,x - 2{,}5$; $z = 0$;
$G_2$ = A'B: $y = 1{,}25\,x - 3{,}25$; $z = 0$;
$G_3$ = A'C: $y = 1{,}25\,x - 3{,}25$; $z = 0{,}75\,x - 0{,}75$.

Der Punkt A liegt auf $G_1$ und da A'A = 5 ist A: (5; 0; 0)

Die übrigen Kanten des Parallelepipeds können damit entsprechend der Vorgabe gezogen werden.