Stetigkeit und irrationale Zahlen.

Von

Richard Dedekind,

Professor der Mathematik an der technischen Hochschule zu Braunschweig.

Nach der zweiten unveränderten Auflage, Braunschweig 1892.

Seinem geliebten Vater, dem
Geh. Hofrat, Professor, Dr. jur. **Julius Levin Ulrich Dedekind**
in Braunschweig
bei Gelegenheit seines fünfzigjährigen Amts-Jubiläums am 26. April 1872 gewidmet.

Diese Transkription enthält den ursprünglichen Text in leicht modernisierter Schreibweise.
Mit Ausnahme folgender Ersetzungen ist der Text unverändert:

Es wurden die Benennungen

System	ersetzt durch	Menge,
Gebiet	ersetzt durch	Menge,
Klasse	ersetzt durch	Teilmenge.

Das Zeichen R wurde ersetzt durch $\mathbb{Q}$ (für die Menge der rationalen Zahlen)

Typografische Änderungen:

im Original gesperrt gesetzte Wörter werden **fett** wiedergegeben,
Die Fußnoten wurden nummeriert.

Die Rechtschreibung einzelner Wörter wurde den neueren Regeln angepasst.

EDITION OPERA-PLATONIS 2013

Inhalt.

Vorwort

Die Betrachtungen, welche den Gegenstand dieser kleinen Schrift bilden, stammen aus dem Herbst des Jahres 1858. Ich befand mich damals als Professor am eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich zum ersten Male in der Lage, die Elemente der Differentialrechnung vortragen zu müssen, und fühlte dabei empfindlicher als jemals früher den Mangel einer wirklich wissenschaftlichen Begründung der Arithmetik. Bei dem Begriffe der Annäherung einer veränderlichen Größe an einen festen Grenzwert und namentlich bei dem Beweise des Satzes, dass jede Größe, welche beständig, aber nicht über alle Grenzen wächst, sich gewiss einem Grenzwert nähern muß, nahm ich meine Zuflucht zu geometrischen Evidenzen. Auch jetzt halte ich ein solches Heranziehen geometrischer Anschauung bei dem ersten Unterrichte in der Differentialrechnung vom didaktischen Standpunkte aus für außerordentlich nützlich, ja unentbehrlich, wenn man nicht gar zu viel Zeit verlieren will. Aber dass diese Art der Einführung in die Differentialrechnung keinen Anspruch auf Wissenschaftlichkeit machen kann, wird wohl niemand leugnen. Für mich war damals dies Gefühl der Unbefriedigung ein so überwältigendes, dass ich den festen Entschluß faßte, so lange nachzudenken, bis ich eine rein arithmetische und völlig strenge Begründung der Prinzipien der Infinitesimalanalysis gefunden haben würde. Man sagt so häufig, die Differentialrechnung beschäftige sich mit den stetigen Größen, und doch wird nirgends eine Erklärung von dieser Stetigkeit gegeben, und auch die strengsten Darstellungen der Differentialrechnung gründen ihre Beweise nicht auf die Stetigkeit, sondern sie appellieren entweder mit mehr oder weniger Bewußtsein an geometrische, oder durch die Geometrie veranlasste Vorstellungen, oder aber sie stützen sich auf solche Sätze, welche selbst nie rein arithmetisch bewiesen sind. Zu diesen gehört z. B. der oben erwähnte Satz, und eine genauere Untersuchung überzeugte mich, dass dieser oder auch jeder mit ihm äquivalente Satz gewissermaßen als ein hinreichendes Fundament für die Infinitesimalanalysis angesehen werden kann. Es kam nur noch darauf an, seinen eigentlichen Ursprung in den Elementen der Arithmetik zu entdecken und hiermit zugleich eine wirkliche Definition von dem Wesen der Stetigkeit zu gewinnen. Dies gelang mir am 24. November 1858, und wenige Tage darauf teilte ich das Ergebnis meines Nachdenkens meinem teuren Freunde **Durège** mit, was zu einer langen und lebhaften Unterhaltung führte. Später habe ich wohl dem einen oder anderen meiner Schüler diese Gedanken über eine wissenschaftliche Begründung der Arithmetik auseinandergesetzt, auch hier in Braunschweig in dem wissenschaftlichen Verein der Professoren einen Vortrag über diesen Gegenstand gehalten, aber zu einer eigentlichen Publikation konnte ich mich nicht recht entschließen, weil erstens die Darstellung nicht ganz leicht, und weil außerdem die Sache so wenig fruchtbar ist. Indessen hatte ich doch schon halb und halb daran gedacht, dieses Thema zum Gegenstande dieser Gelegenheitsschrift zu wählen, als vor wenigen Tagen, am 14. März, die Abhandlung: „Die Elemente der Functionenlehre", von **E. Heine** (**Crelle's**

Journal, Bd, 74) durch die Güte ihres hochverehrten Verfassers in meine Hände gelangte und mich in meinem Entschlusse bestärkte. Dem Wesen nach stimme ich zwar vollständig mit dem Inhalte dieser Schrift überein, wie es ja nicht anders sein kann, aber ich will freimütig gestehen, dass meine Darstellung mir der Form nach einfacher zu sein und den eigentlichen Kernpunkt präziser hervorzuheben scheint. Und während ich an diesem Vorwort schreibe (20. März 1872), erhalte ich die interessante Abhandlung: „Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen", von **G. Cantor** (Math. Annalen von **Clebsch** und **Neumann**, Bd. 5), für welche ich dem scharfsinnigen Verfasser meinen besten Dank sage. Wie ich bei raschem Durchlesen finde, so stimmt das Axiom in § 2 derselben, abgesehen von der äußeren Form der Einkleidung, vollständig mit dem überein, was ich unten in § 3 als das Wesen der Stetigkeit bezeichne. Welchen Nutzen aber die, wenn auch nur begriffliche Unterscheidung von reellen Zahlgrößen noch höherer Art gewähren wird, vermag ich gerade nach meiner Auffassung des in sich vollkommenen reellen Zahlgebietes noch nicht zu erkennen.

§ 1 Eigenschaften der rationalen Zahlen

Die Entwicklung der Arithmetik der rationalen Zahlen wird hier zwar vorausgesetzt, doch halte ich es für gut, einige Hauptmomente ohne Diskussion hervorzuheben, nur um den Standpunkt von vornherein zu bezeichnen, den ich im folgenden einnehme. Ich sehe die ganze Arithmetik als eine notwendige oder wenigstens natürliche Folge des einfachsten arithmetischen Aktes, des Zählens, an, und das Zählen selbst ist nichts anderes als die sukzessive Schöpfung der unendlichen Reihe der positiven ganzen Zahlen, in welcher jedes Individuum durch das unmittelbar vorhergehende definiert wird; der einfachste Akt ist der Übergang von einem schon erschaffenen Individuum zu dem darauf folgenden neu zu erschaffenden. Die Kette dieser Zahlen bildet an sich schon ein überaus nützliches Hilfsmittel für den menschlichen Geist, und sie bietet einen unerschöpflichen Reichtum an merk-würdigen Gesetzen dar, zu welchen man durch die Einführung der vier arithmetischen Grundoperationen gelangt. Die Addition ist die Zusammenfassung einer beliebigen Wiederholung des obigen einfachsten Aktes zu einem einzigen Akte, und aus ihr entspringt auf dieselbe Weise die Multiplikation. Während diese beiden Operationen stets ausführbar sind, zeigen die umgekehrten Operationen, die Subtraktion und Division, nur eine beschränkte Zulässigkeit. Welches nun auch die nächste Veranlassung gewesen sein mag, welche Vergleichungen oder Analogieen mit Erfahrungen, Anschauungen dazu geführt haben mögen, bleibe dahingestellt; genug, gerade diese Beschränktheit in der Ausführbarkeit der indirekten Operationen ist jedesmal die eigentliche Ursache eines neuen Schöpfungsaktes geworden; so sind die negativen und gebrochenen Zahlen durch den menschlichen Geist erschaffen, und es ist in der Menge aller rationalen Zahlen ein Instrument von unendlich viel größerer Vollkommenheit gewonnen. Diese Menge, welche ich mit $\mathbb{Q}$ bezeichnen will, besitzt vor allen Dingen eine Vollständigkeit und Abgeschlossenheit, welche ich an einem anderen Orte [1]) als Merkmal eines **Zahlkörpers** bezeichnet habe, und welche darin besteht, dass die vier Grundoperationen mit je zwei Individuen in $\mathbb{Q}$ stets ausführbar sind, d. h. dass das Resultat derselben stets wieder ein bestimmtes Individuum in $\mathbb{Q}$ ist, wenn man den einzigen Fall der Division durch die Zahl Null ausnimmt.

Für unseren nächsten Zweck ist aber noch wichtiger eine andere Eigenschaft der Menge $\mathbb{Q}$, welche man dahin aussprechen kann, dass die Menge $\mathbb{Q}$ ein wohlgeordnetes, nach zwei entgegengesetzten Seiten hin unendliches Gebiet von einer Dimension bildet. Was damit gemeint sein soll, ist durch die Wahl der Ausdrücke, welche geometrischen Vorstellungen entlehnt sind, hinreichend angedeutet; um so notwendiger ist es, die entsprechenden rein arithmetischen Eigentümlichkeiten hervorzuheben, damit es auch nicht einmal den Anschein behält, als bedürfte die Arithmetik solcher ihr fremden Vorstellungen.

---

[1] Vorlesungen über Zahlentheorie von **P. G. Lejeune Dirichlet,** Zweite Auflage. § 159.

Soll ausgedrückt werden, dass die Zeichen a und b eine und dieselbe rationale Zahl bedeuten, so setzt man sowohl $a = b$ wie $b = a$. Die Verschiedenheit zweier rationaler Zahlen a, b zeigt sich darin, dass die Differenz $a - b$ entweder einen positiven oder einen negativen Wert hat. Im ersten Falle heißt a **größer** als b, b **kleiner** als a, was auch durch die Zeichen $a > b$, $b < a$, angedeutet wird [2]). Da im zweiten Falle $b - a$, einen positiven Wert hat, so ist $b > a$, $a < b$. Hinsichtlich dieser doppelten Möglichkeit in der Art der Verschiedenheit gelten nun folgende Gesetze.

I. Ist $a > b$, und $b > c$, so ist $a > c$. Wir wollen jedesmal, wenn a, c zwei verschiedene (oder ungleiche) Zahlen sind, und wenn b größer als die eine, kleiner als die andere ist, ohne Scheu vor dem Anklang an geometrische Vorstellungen dies kurz so ausdrücken: b liegt zwischen den bei den Zahlen a, c.

II. Sind a, c zwei verschiedene Zahlen, so gibt es immer unendlich viele verschiedene Zahlen b, welche zwischen a, c liegen.

III. Ist a eine bestimmte Zahl, so zerfallen alle Zahlen der Menge $\mathbb{Q}$ in zwei Teilmengen, A_1 und A_2 deren jede unendlich viele Individuen enthält; die erste Teilmenge A_1 umfaßt alle Zahlen a_1 welche $< a$, sind, die zweite Teilmenge A_2 umfaßt alle Zahlen a_2, welche $> a$, sind; die Zahl a selbst kann nach Belieben der ersten oder der zweiten Teilmenge zugeteilt werden, und sie ist dann entsprechend die größte Zahl der ersten oder die kleinste Zahl der zweiten Teilmenge. In jedem Falle ist die Zerlegung der Menge $\mathbb{Q}$ in die bei den Teilmengen A_1, A_2 von der Art, dass jede Zahl der ersten Teilmenge A_1 kleiner als jede Zahl der zweiten Teilmenge A_2 ist.

§ 2 Vergleichung der rationalen Zahlen mit den Punkten einer geraden Linie

Die soeben hervorgehobenen Eigenschaften der rationalen Zahlen erinnern an die gegenseitigen Lagenbeziehungen zwischen den Punkten einer geraden Linie L. Werden die bei den in ihr existierenden entgegengesetzten Richtungen durch „rechts" und „links" unterschieden, und sind p, q zwei verschiedene Punkte, so liegt entweder p rechts von q, und gleichzeitig q links von p, oder umgekehrt, es liegt q rechts von p, und gleichzeitig p links von q. Ein dritter Fall ist unmöglich, wenn p, q wirklich verschiedene Punkte sind. Hinsichtlich dieser Lagenverschiedenheit bestehen folgende Gesetze.

I. Liegt p rechts von q, und q wieder rechts von r, so liegt auch p rechts von r; und man sagt, dass q zwischen den Punkten p und r liegt.

---

[2] Es ist also im Folgenden immer das sogenannte „algebraische" größer und kleiner sein gemeint, wenn nicht das Wort „absolut" hinzugefügt wird.

II. Sind p, r zwei verschiedene Punkte, so gibt es immer unendlich viele Punkte q, welche zwischen p und r liegen.

III. Ist p ein bestimmter Punkt in L, so zerfallen alle Punkte in L in zwei Teilmengen, P_1, P_2, deren jede unendlich viele Individuen enthält; die erste Teilmenge P_1 umfaßt alle die Punkte p_1 welche links von p liegen, und die zweite Teilmenge P_2 umfaßt alle die Punkte p_2, welche rechts von p liegen; der Punkt p selbst kann nach Belieben der ersten oder der zweiten Teilmenge zugeteilt werden. In jedem Falle ist die Zerlegung der Geraden L in die beiden Teilmengen oder Stücke P_1, P_2 von der Art, dass jeder Punkt der ersten Teilmenge P_1 links von jedem Punkte der zweiten Teilmenge P_2 liegt.

Diese Analogie zwischen den rationalen Zahlen und den Punkten einer Geraden wird bekanntlich zu einem wirklichen Zusammenhang, wenn in der Geraden ein bestimmter Anfangspunkt oder Nullpunkt o und eine bestimmte Längeneinheit zur Ausmessung der Strecken gewählt wird. Mit Hilfe der letzteren kann für jede rationale Zahl a eine entsprechende Länge konstruiert werden, und trägt man dieselbe von dem Punkte o aus nach rechts oder links auf der Geraden ab, je nachdem a positiv oder negativ ist, so gewinnt man einen bestimmten Endpunkt p, welcher als der der Zahl a entsprechende Punkt bezeichnet werden kann; der rationalen Zahl Null entspricht der Punkt o. Auf diese Weise entspricht jeder rationalen Zahl a, d. h. jedem Individuum in $\mathbb{Q}$, ein und nur ein Punkt p, d. h. ein Individuum in L. Entsprechen den beiden Zahlen a, b bzw. die beiden Punkte p, q, und ist $a > b$, so liegt p rechts von q. Den Gesetzen I, II, III des vorigen Paragraphen entsprechen vollständig die Gesetze I, II, III des jetzigen.

§ 3 Stetigkeit der geraden Linie

Von der größten Wichtigkeit ist nun aber die Tatsache, dass es in der Geraden L unendlich viele Punkte gibt, welche keiner rationalen Zahl entsprechen. Entspricht nämlich der Punkt p der rationalen Zahl a, so ist bekanntlich die Länge op kommensurabel mit der bei der Konstruktion benutzten unabänderlichen Längeneinheit, d. h. es gibt eine dritte Länge, ein sogenanntes gemeinschaftliches Maß, von welcher diese beiden Längen ganze Vielfache sind. Aber schon die alten Griechen haben gewußt und bewiesen, dass es Längen gibt, welche mit einer gegebenen Längeneinheit inkommensurabel sind, z.B. die Diagonale des Quadrates, dessen Seite die Längeneinheit ist. Trägt man eine solche Länge von dem Punkt o aus auf der Geraden ab, so erhält man einen Endpunkt, welcher keiner rationalen Zahl entspricht. Da sich ferner leicht beweisen läßt, dass es unendlich viele Längen gibt, welche mit der Längeneinheit inkommensurabel sind, so können wir behaupten: Die Gerade L ist unendlich viel reicher an Punktindividuen, als die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen an Zahlindividuen.

Will man nun, was doch der Wunsch ist, alle Erscheinungen in der Geraden auch arithmetisch verfolgen, so reichen dazu die rationalen Zahlen nicht aus, und es wird daher unumgänglich notwendig, das Instrument $\mathbb{Q}$, welches durch die Schöpfung der rationalen Zahlen konstruiert war, wesentlich zu verfeinern durch eine Schöpfung von neuen Zahlen der Art, dass das Gebiet der Zahlen dieselbe Vollständigkeit oder, wie wir gleich sagen wollen, dieselbe **Stetigkeit** gewinnt, wie die gerade Linie.

Die bisherigen Betrachtungen sind allen so bekannt und geläufig, dass viele ihre Wiederholung für sehr überflüssig erachten werden. Dennoch hielt ich diese Rekapitulation für notwendig, um die Hauptfrage gehörig vorzubereiten. Die bisher übliche Einführung der irrationalen Zahlen knüpft nämlich geradezu an den Begriff der extensiven Größen an — welcher aber selbst nirgends streng definiert wird — und erklärt die Zahl als das Resultat der Messung einer solchen Größe durch eine zweite gleichartige [3]). Statt dessen fordere ich, dass die Arithmetik sich aus sich selbst heraus entwickeln soll. dass solche Anknüpfungen an nicht arithmetische Vorstellungen die nächste Veranlassung zur Erweiterung des Zahlbegriffes gegeben haben, mag im allgemeinen zugegeben werden (doch ist dies bei der Einführung der komplexen Zahlen entschieden nicht der Fall gewesen); aber hierin liegt ganz gewiß kein Grund, diese fremdartigen Betrachtungen selbst in die Arithmetik, in die Wissenschaft von den Zahlen aufzunehmen. So wie die negativen und gebrochenen rationalen Zahlen durch eine freie Schöpfung hergestellt, und wie die Gesetze der Rechnungen mit diesen Zahlen auf die Gesetze der Rechnungen mit ganzen positiven Zahlen zurückgeführt werden müssen und können, ebenso hat man dahin zu streben, dass auch die irrationalen Zahlen durch die rationalen Zahlen allein vollständig definiert werden. Nur das Wie? bleibt die Frage.

Die obige Vergleichung der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen mit einer Geraden hat zu der Erkenntnis der Lückenhaftigkeit, Unvollständigkeit oder Unstetigkeit des ersteren geführt, während wir der Geraden Vollständigkeit, Lückenlosigkeit oder Stetigkeit zuschreiben. Worin besteht denn nun eigentlich diese Stetigkeit? In der Beantwortung dieser Frage muß Alles enthalten sein, und nur durch sie wird man eine wissenschaftliche Grundlage für die Untersuchung **aller** stetigen Gebiete gewinnen. Mit vagen Reden über den ununterbrochenen Zusammenhang in den kleinsten Teilen ist natürlich nichts erreicht; es kommt darauf an, ein präzises Merkmal der Stetigkeit anzugeben, welches als Basis für wirkliche Deduktionen gebraucht werden kann. Lange Zeit habe ich vergeblich darüber nach-gedacht, aber endlich fand ich, was ich suchte. Dieser Fund wird von verschiedenen Personen vielleicht verschieden beurteilt werden, doch glaube ich, dass die meisten seinen Inhalt sehr trivial

---

[3] Der scheinbare Vorzug der Allgemeinheit dieser Definition der Zahl schwindet sofort dahin, wenn man an die komplexen Zahlen denkt. Nach meiner Auffassung kann umgekehrt der Begriff des Verhältnisses zwischen zwei gleichartigen Größen erst dann klar entwickelt werden, wenn die irrationalen Zahlen schon eingeführt sind.

finden werden. Er besteht im Folgenden. Im vorigen Paragraphen ist darauf aufmerksam gemacht, dass jeder Punkt p der Geraden eine Zerlegung derselben in zwei Stücke von der Art hervorbringt, dass jeder Punkt des einen

Stückes links von jedem Punkte des anderen liegt. Ich finde nun das Wesen der Stetigkeit in der Umkehrung, also in dem folgenden Prinzip:

„Zerfallen alle Punkte der Geraden in zwei Teilmengen von der Art, dass jeder Punkt der ersten Teilmenge links von jedem Punkte der zweiten Teilmenge liegt, so existiert ein und nur ein Punkt, welcher diese Einteilung aller Punkte in zwei Teilmengen, diese Zerschneidung der Geraden in zwei Stücke hervorbringt."

Wie schon gesagt, glaube ich nicht zu irren, wenn ich annehme, dass Jedermann die Wahrheit dieser Behauptung sofort zugeben wird; die meisten meiner Leser werden sehr enttäuscht sein, zu vernehmen, dass durch diese Trivialität das Geheimnis der Stetigkeit enthüllt sein soll. Dazu bemerke ich Folgendes. Es ist mir sehr lieb, wenn Jedermann das obige Prinzip so einleuchtend findet und so übereinstimmend mit seinen Vorstellungen von einer Linie; denn ich bin außerstande, irgendeinen Beweis für seine Richtigkeit beizubringen, und niemand ist dazu imstande. Die Annahme dieser Eigenschaft der Linie ist nichts als ein Axiom, durch welches wir erst der Linie ihre Stetigkeit zuerkennen, durch welches wir die Stetigkeit in die Linie hineindenken. Hat überhanpt der Raum eine reale Existenz, so braucht er doch **nicht** notwendig stetig zu sein; unzählige seiner Eigenschaften würden dieselben bleiben, wenn er auch unstetig wäre. Und wüßten wir gewiß, dass der Raum unstetig wäre, so könnte uns doch wieder nichts hindern, falls es uns beliebte, ihn durch Ausfüllung seiner Lücken in Gedanken zu einem stetigen zu machen; diese Ausfüllung würde aber in einer Schöpfung von neuen Punktindividuen bestehen und dem obigen Prinzip gemäß auszuführen sein.

§ 4 Schöpfung der irrationalen Zahlen

Durch die letzten Worte ist schon hinreichend angedeutet, auf welche Art die unstetige Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen zu einem stetigen vervollständigt werden muß. In § 1 ist hervorgehoben (III), dass jede rationale Zahl a eine Zerlegung der Menge $\mathbb{Q}$ in zwei Teilmengen A_1, A_2 von der Art hervorbringt, dass jede Zahl a_1 der ersten Teilmenge A_1 kleiner ist als jede Zahl a_2 der zweiten Teilmenge A_2; die Zahl a ist entweder die größte Zahl der Teilmenge A_1, oder die kleinste Zahl der Teilmenge A_2. Ist nun irgendeine Einteilung der Menge $\mathbb{Q}$ in zwei Teilmengen A_1, A_2 gegeben, welche nur **die** charakteristische Eigenschaft besitzt, dass jede Zahl a_1 in A_1 kleiner ist als jede Zahl a_2 in A_2, so wollen wir der Kürze halber eine solche Einteilung einen **Schnitt** nennen und mit (A_1, A_2) bezeichnen. Wir können dann sagen, dass jede rationale Zahl a einen Schnitt oder eigentlich zwei Schnitte hervorbringt, welche wir aber nicht als wesentlich verschieden ansehen wollen; dieser Schnitt hat **außerdem** die Eigenschaft, dass entweder unter den

Zahlen der ersten Teilmenge eine größte, oder unter den Zahlen der zweiten Teilmenge eine kleinste existiert. Und umgekehrt, besitzt ein Schnitt auch diese Eigenschaft, so wird er durch diese größte oder kleinste rationale Zahl hervorgebracht.

Aber man überzeugt sich leicht, dass auch unendlich viele Schnitte existieren, welche nicht durch rationale Zahlen hervorgebracht werden. Das nächstliegende Beispiel ist folgendes.

Es sei D eine positive ganze Zahl, aber nicht das Quadrat einer ganzen Zahl, so gibt es eine positive ganze Zahl λ von der Art, dass

$$\lambda^2 < D < (\lambda + 1)^2 \quad \text{wird.}$$

Nimmt man in die zweite Teilmenge A_2 jede positive rationale Zahl a_2 auf, deren Quadrat $> D$ ist, in die erste Teilmenge A_1 aber alle anderen rationalen Zahlen a_1, so bildet diese Einteilung einen Schnitt (A_1, A_2), d. h. jede Zahl a_1 ist kleiner als jede Zahl a_2. Ist nämlich $a_1 = 0$ oder negativ, so ist a_1 schon aus diesem Grunde kleiner als jede Zahl a_2, weil diese zufolge der Definition positiv ist; ist aber a_1 positiv, so ist ihr Quadrat $\leq D$, und folglich ist a_1 kleiner als jede positive Zahl a_2, deren Quadrat $> D$ ist.

Dieser Schnitt wird aber durch keine rationale Zahl hervorgebracht. Um dies zu beweisen, muß vor allem gezeigt werden, dass es keine rationale Zahl gibt, deren Quadrat $= D$ ist. Obgleich dies aus den ersten Elementen der Zahlentheorie bekannt ist, so mag doch hier der folgende indirekte Beweis Platz finden. Gibt es eine rationale Zahl, deren Quadrat $= D$ ist, so gibt es auch zwei positive ganze Zahlen t, u, welche der Gleichung

$$t^2 - D\,u^2 = 0$$

genügen, und man darf annehmen, dass u die **kleinste** positive ganze Zahl ist, welche die Eigenschaft besitzt, dass ihr Quadrat durch Multiplikation mit D in das Quadrat einer ganzen Zahl t verwandelt wird. Da nun offenbar

$$\lambda\, u < t < (\lambda + 1)\, u$$

ist, so wird die Zahl

$$u' = t - \lambda\, u$$

eine positive ganze Zahl, und zwar **kleiner** als u.

Setzt man ferner

$$t' = D\,u - \lambda\, t,$$

so wird t' ebenfalls eine positive ganze Zahl, und es ergibt sich

$$t'^2 - D\,u'^2 = (\lambda^2 - D)\,(t^2 - D\,u^2) = 0,$$

was mit der Annahme über u im Widerspruch steht.

Mithin ist das Quadrat einer jeden rationalen Zahl x entweder $< D$ oder $> D$. Hieraus folgt nun leicht, dass es weder in der Teilmenge A_1 eine größte, noch in der Teilmenge A_2 eine kleinste Zahl gibt.

Setzt man nämlich

$$y = \frac{x(x^2 + 3\ D)}{3x^2 + D}$$

so ist

$$y - x = \frac{2\,x(D - x^2)}{3\,x^2 + D}$$

und

$$y^2 - D = \frac{(x^2 - D)^3}{(3\,x^2 + D)^2}$$

Nimmt man hierin für x eine positive Zahl aus der Teilmenge A_1, so ist $x^2 < D$, und folglich wird $y > x$, und $y^2 < D$, also gehört y ebenfalls der Teilmenge A_1 an. Setzt man aber für x eine Zahl aus der Teilmenge A_2 so ist $x^2 > D$, und folglich wird $y < x$, $y > 0$ und $y^2 > D$, also gehört y ebenfalls der Teilmenge A_2 an. Dieser Schnitt wird daher durch keine rationale Zahl hervorgebracht.

In dieser Eigenschaft, dass nicht alle Schnitte durch rationale Zahlen hervorgebracht werden, besteht die Unvollständigkeit oder Unstetigkeit der Menge $\mathbb{Q}$ aller rationalen Zahlen.

Jedesmal nun, wenn ein Schnitt (A_1, A_2) vorliegt, welcher durch keine rationale Zahl hervorgebracht wird, so **erschaffen** wir eine neue, eine **irrationale Zahl** α, welche wir als durch diesen Schnitt (A_1 , A_2) vollständig definiert ansehen; wir werden sagen, dass die Zahl α diesem Schnitt entspricht, oder dass sie diesen Schnitt hervorbringt. Es entspricht also von jetzt ab jedem bestimmten Schnitt eine und nur eine bestimmte rationale oder irrationale Zahl und wir sehen zwei Zahlen stets und nur dann als **verschieden** oder **ungleich** an, wenn sie wesentlich verschiedenen Schnitten entsprechen.

Um nun eine Grundlage für die Anordnung aller **reellen**, d. h. aller rationalen und irrationalen Zahlen zu gewinnen, müssen wir zunächst die Beziehungen zwischen irgend zwei Schnitten (A_1 , A_2) und (B_1 , B_2) untersuchen, welche durch irgend zwei Zahlen α und β hervorgebracht werden. Offenbar ist ein Schnitt (A_1 , A_2) schon vollständig gegeben, wenn eine der beiden Teilmengen, z. B. die erste A_1, bekannt ist, weil die zweite A_2 aus allen nicht in A_1 enthaltenen rationalen Zahlen besteht, und die charakteristische Eigenschaft einer solchen ersten Teilmenge A_1 liegt darin, dass sie, wenn die Zahl a_1 in ihr enthalten ist, auch alle kleineren Zahlen als a_1 enthält. Vergleicht man nun zwei solche erste Teilmengen A_1, B_1 miteinander, so kann es **1)** sein, dass sie vollständig identisch sind, d. h. dass jede in A_1 enthaltene Zahl a_1 auch in B_1, und dass jede in B_1 enthaltene Zahl b_1 auch in A_1 enthalten ist. In diesem Falle ist dann notwendig auch A_2 identisch mit B_2, die beiden Schnitte sind vollständig identisch, was wir in Zeichen durch $\alpha = \beta$ oder $\beta = \alpha$ andeuten.

Sind aber die beiden Teilmengen A_1, B_1 nicht identisch, so gibt es in der einen, z. B. in A_1 eine Zahl $a'_1 = b'_2$, welche nicht in der anderen B_1 enthalten ist, und welche sich folglich in B_2 vorfindet; mithin sind gewiß alle in B_1 enthaltenen Zahlen b_1 kleiner als diese Zahl $a'_1 = b'_2$, und folglich sind alle Zahlen b_1 auch in A_1 enthalten.

Ist nun **2)** diese Zahl a'_1 die einzige in A_1, welche nicht in B_1 enthalten ist, so ist jede andere in A_1 enthaltene Zahl a_1 in B_1 enthalten, und folglich kleiner als a'_1, d. h. a'_1 ist die größte unter allen Zahlen a_1 mithin wird der Schnitt (A_1, A_2) durch die rationale Zahl $\alpha = a'_1 = b'_2$ hervorgebracht. Von dem anderen Schnitte (B_1, B_2) wissen wir schon, dass alle Zahlen b_1 in B_1 auch in A_1 enthalten und kleiner als die Zahl $a'_1 = b'_2$ sind, welche in B_2 enthalten ist; jede andere in B_2 enthaltene Zahl b_2 muß aber größer als b'_2 sein, weil sie sonst auch kleiner als a'_1, also in A_1 und folglich auch in B_1 enthalten wäre; mithin ist b'_2 die kleinste unter allen in B_2 enthaltenen Zahlen, und folglich wird auch der Schnitt (B_1, B_2) durch dieselbe rationale Zahl $\beta = b'_2 = a'_1 = \alpha$ hervorgebracht. Die beiden Schnitte sind daher nur unwesentlich verschieden.

Gibt es aber **3)** in A_1 wenigstens zwei verschiedene Zahlen $a'_1 = b'_2$ und $a''_1 = b''_2$, welche nicht in B_1 enthalten sind, so gibt es deren auch unendlich viele, weil alle die unendlich vielen zwischen a'_1 und a''_1 liegenden Zahlen (§ 1. II) offenbar in A_1, aber nicht in B_1 enthalten sind. In diesem Falle nennen wir die diesen beiden wesentlich verschiedenen Schnitten (A_1, A_2) und (B_1, B_2) entsprechenden Zahlen α und β ebenfalls **verschieden** voneinander, und zwar sagen wir, dass α **größer** als β, dass β **kleiner** als α ist, was wir in Zeichen sowohl durch $\alpha > \beta$, als durch $\beta < \alpha$ ausdrücken. Hierbei ist hervorzuheben, dass diese Definition vollständig mit der früheren zusammenfällt, wenn beide Zahlen α, β rational sind.

Die nun noch übrigen möglichen Fälle sind diese. Gibt es **4)** in B_1 eine und nur eine Zahl $b'_1 = a'_2$, welche nicht in A_1 enthalten ist, so sind die beiden Schnitte (A_1, A_2) und (B_1, B_2) nur unwesentlich verschieden und sie werden durch eine und dieselbe rationale Zahl $\alpha = a'_2 = b'_1 = \beta$ hervorgebracht. Gibt es aber **5)** in B_1 mindestens zwei verschiedene Zahlen, welche nicht in A_1 enthalten sind, so ist $\beta > \alpha$, $\alpha < \beta$.

Da hiermit alle Fälle erschöpft sind, so ergibt sich, dass von zwei verschiedenen Zahlen notwendig die eine die größere, die andere die kleinere sein muß, was zwei Möglichkeiten enthält. Ein dritter Fall ist unmöglich. Dies lag zwar schon in der Wahl des **Komparativs** (größer, kleiner) zur Bezeichnung der Beziehung zwischen α, β; aber diese Wahl ist erst jetzt nachträglich gerechtfertigt. Gerade bei solchen Untersuchungen hat man sich auf das sorgfältigste zu hüten, dass man selbst bei dem besten Willen, ehrlich zu sein, durch eine voreilige Wahl von Ausdrücken, welche anderen schon entwickelten Vorstellungen entlehnt sind, sich nicht verleiten lasse, unerlaubte Übertragungen aus dem einen Gebiete in das andere vorzunehmen.

Betrachtet man nun noch einmal genau den Fall $\alpha > \beta$, so ergibt sich, dass die kleinere Zahl β, wenn sie rational ist, gewiß der Teilmenge A_1 angehört; da es nämlich in A_1 eine Zahl $a'_1 = b'_2$ gibt, welche der Teilmenge B_2 angehört, so ist die Zahl β, mag sie die größte Zahl in B_1 oder die kleinste Zahl in B_2 sein, gewiß $\leq a'_1$ und folglich in A_1 enthalten. Ebenso ergibt sich aus $\alpha > \beta$, dass die größere Zahl α, wenn sie rational ist, gewiß der Teilmenge B_2 angehört, weil $\alpha \geq a'_1$ ist. Vereinigt man beide Betrachtungen, so erhält man folgendes Resultat: Wird ein Schnitt (A_1, A_2) durch die Zahl α hervorgebracht, so gehört irgendeine rationale Zahl zu der Teilmenge A_1 oder zu der Teilmenge A_2, je nachdem sie kleiner oder größer ist als α; ist die Zahl α selbst rational, so kann sie der einen oder der anderen Teilmenge angehören.

Hieraus ergibt sich endlich noch Folgendes. Ist $\alpha > \beta$, gibt es also unendlich viele Zahlen in A_1, welche nicht in B_1 enthalten sind, so gibt es auch unendlich viele solche Zahlen, welche zugleich von α und von β verschieden sind; jede solche rationale Zahl c ist $< \alpha$, weil sie in A_1 enthalten ist, und sie ist zugleich $> \beta$, weil sie in B_2 enthalten ist.

§ 5 Stetigkeit der Menge der reellen Zahlen

Zufolge der eben festgesetzten Unterscheidungen bildet nun die Menge $\mathbb{R}$ aller reellen Zahlen ein wohlgeordnetes Gebiet von einer Dimension; hiermit soll weiter nichts gesagt sein, als dass folgende Gesetze herrschen.

I. Ist $\alpha > \beta$, und $\beta > \gamma$, so ist auch $\alpha > \gamma$. Wir wollen sagen, dass die Zahl β zwischen den Zahlen α, γ liegt.

II. Sind α, γ zwei verschiedene Zahlen, so gibt es immer unendlich viele verschiedene Zahlen β, welche zwischen α, γ liegen.

III. Ist α eine bestimmte Zahl, so zerfallen alle Zahlen der Menge $\mathbb{R}$ in zwei Teilmengen $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ deren jede unendlich viele Individuen enthält; die erste Teilmenge $\mathfrak{A}_1$ umfaßt alle die Zahlen α_1, welche $< \alpha$ sind, die zweite Teilmenge $\mathfrak{A}_2$ umfaßt alle die Zahlen α_2, welche $> \alpha$ sind; die Zahl α selbst kann nach Belieben der ersten oder der zweiten Teil-menge zugeteilt werden, und sie ist dann entsprechend die größte Zahl der ersten oder die kleinste Zahl der zweiten Teilmenge. In jedem Falle ist die Zerlegung der Menge $\mathbb{R}$ in die beiden Teilmengen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ von der Art, dass jede Zahl der ersten Teilmenge $\mathfrak{A}_1$ kleiner als jede Zahl der zweiten Teilmenge $\mathfrak{A}_2$ ist, und wir sagen, dass diese Zerlegung durch die Zahl α hervorgebracht wird.

Der Kürze halber, und um den Leser nicht zu ermüden, unterdrücke ich die Beweise dieser Sätze, welche unmittelbar aus den Definitionen des vorhergehenden Paragraphen folgen.

Außer diesen Eigenschaften besitzt aber die Menge $\mathbb{R}$ auch **Stetigkeit**, d. h. es gilt folgender Satz:

IV. Zerfällt die Menge $\mathbb{R}$ aller reellen Zahlen in zwei Teilmengen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ von der Art, dass jede Zahl α_1 der Teilmenge $\mathfrak{A}_1$ kleiner ist als jede Zahl α_2

der Teilmenge $\mathfrak{A}_2$, so existiert eine und nur eine Zahl α, durch welche diese Zerlegung hervorgebracht wird.

Beweis. Durch die Zerlegung oder den Schnitt von $\mathbb{R}$ in $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ ist zugleich ein Schnitt (A_1, A_2) der Menge $\mathbb{Q}$ aller rationalen Zahlen gegeben, welcher dadurch definiert wird, dass A_1 alle rationalen Zahlen der Teilmenge $\mathfrak{A}_1$ und A_2 alle übrigen rationalen Zahlen, d. h. alle rationalen Zahlen der Teilmenge $\mathfrak{A}_2$ enthält. Es sei α die völlig bestimmte Zahl, welche diesen Schnitt (A_1, A_2) hervorbringt. Ist nun β irgendeine von α verschiedene Zahl, so gibt es immer unendlich viele rationale Zahlen c, welche zwischen α und β liegen. Ist $\beta < \alpha$, so ist $c < \alpha$; mithin gehört c der Teilmenge A_1 und folglich auch der Teilmenge $\mathfrak{A}_1$ an, und da zugleich $\beta < c$ ist, so gehört auch β derselben Teilmenge $\mathfrak{A}_1$ an, weil jede Zahl in $\mathfrak{A}_2$ größer ist als jede Zahl c in $\mathfrak{A}_1$. Ist aber $\beta > \alpha$, so ist $c > \alpha$; mithin gehört c der Teilmenge A_2 und folglich auch der Teilmenge $\mathfrak{A}_2$ an, und da zugleich $\beta > c$ ist, so gehört auch β derselben Teilmenge $\mathfrak{A}_2$ an, weil jede Zahl in $\mathfrak{A}_1$ kleiner ist als jede Zahl c in $\mathfrak{A}_2$. Mithin gehört jede von α verschiedene Zahl β der Teilmenge $\mathfrak{A}_1$ oder der Teilmenge $\mathfrak{A}_2$ an, je nachdem $\beta < \alpha$ oder $\beta > \alpha$ ist; folglich ist α selbst entweder die größte Zahl in $\mathfrak{A}_1$ oder die kleinste Zahl in $\mathfrak{A}_2$, d. h. α ist eine und offenbar die einzige Zahl, durch welche die Zerlegung von $\mathbb{R}$ in die Teilmengen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ hervorgebracht wird. Was zu beweisen war.

§ 6 Rechnungen mit reellen Zahlen

Um irgendeine Rechnung mit zwei reellen Zahlen α, β auf die Rechnungen mit rationalen Zahlen zurückzuführen, kommt es nur darauf an, aus den Schnitten (A_1, A_2) und (B_1, B_2), welche durch die Zahlen α und β in der Menge $\mathbb{R}$ hervorgebracht werden, den Schnitt (C_1, C_2) zu definieren, welcher dem Rechnungsresultate γ entsprechen soll. Ich beschränke mich hier auf die Durchführung des einfachsten Beispieles, der Addition.

Ist c irgendeine rationale Zahl, so nehme man sie in die Teilmenge C_1 auf, wenn es eine Zahl a_1 in A_1 und eine Zahl b_1 in B_1 von der Art gibt, dass ihre Summe $a_1 + b_1 \geq c$ wird; alle anderen rationalen Zahlen c nehme man in die Teilmenge C_2 auf. Diese Einteilung aller rationalen Zahlen in die beiden Teilmengen C_1, C_2 bildet offenbar einen Schnitt, weil jede Zahl c_1 in C_1 kleiner ist als jede Zahl c_2 in C_2. Sind nun beide Zahlen α, β rational, so ist jede in C_1 enthaltene Zahl $c_1 \leq \alpha + \beta$, weil $a_1 \leq \alpha$, $b_1 \leq \beta$, also auch $a_1 + b_1 \leq \alpha + \beta$ ist; wäre ferner eine in C_2 enthaltene Zahl $c_2 < \alpha + \beta$, also $\alpha + \beta = c_2 + p$, wo p eine positive rationale Zahl bedeutet, so wäre

$$c_2 = (\alpha - \tfrac{1}{2} p) + (\beta - \tfrac{1}{2} p),$$

was im Widerspruch mit der Definition der Zahl c_2 steht, weil $\alpha - \frac{1}{2} p$ eine Zahl in A_1, und $\beta - \frac{1}{2} p$ eine Zahl in B_1 ist; folglich ist jede in C_2 enthaltene Zahl $c_2 \geq \alpha + \beta$. Mithin wird in diesem Falle der Schnitt (C_1, C_2) durch die Summe $\alpha + \beta$ hervorgebracht. Man verstößt daher nicht gegen die in der Arithmetik der rationalen Zahlen geltende Definition, wenn man in allen Fällen unter der **Summe** $\alpha + \beta$ von zwei beliebigen reellen Zahlen α, β diejenige Zahl γ versteht, durch welche der Schnitt (C_1, C_2) hervorgebracht wird. Ist ferner nur eine der beiden Zahlen α, β, z. B. α, rational, so überzeugt man sich leicht, dass es keinen Einfluß auf die Summe $\gamma = \alpha + \beta$ hat, ob man die Zahl α in die Teilmenge A_1 oder in die Teilmenge A_2 aufnimmt.

Ebenso wie die Addition lassen sich auch die übrigen Operationen der sogenannten Elementar-Arithmetik definieren, nämlich die Bildung der Differenzen, Produkte, Quotienten, Potenzen, Wurzeln, Logarithmen, und man gelangt auf diese Weise zu wirklichen Beweisen von Sätzen (wie z. B. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$), welche meines Wissens bisher nie bewiesen sind. Die Weitläufigkeiten, welche bei den Definitionen der komplizierteren Operationen zu befürchten sind, liegen teils in der Natur der Sache, zum größten Teil aber lassen sie sich vermeiden. Sehr nützlich ist in dieser Beziehung der Begriff eines **Intervalls**, d.h. einer Menge A von rationalen Zahlen, welches folgende charakteristische Eigenschaft besitzt: sind a und a' Zahlen der Menge A, so sind auch alle zwischen a und a' liegenden rationalen Zahlen in A enthalten. Die Menge $\mathbb{Q}$ aller rationalen Zahlen, ebenso die beiden Teilmengen eines jeden Schnittes sind Intervalle. Gibt es aber eine rationale Zahl a_1, welche kleiner, und eine rationale Zahl a_2, welche größer ist als jede Zahl des Intervalls A, so heiße A ein endliches Intervall; es gibt dann offenbar unendlich viele Zahlen von derselben Beschaffenheit wie a_1, und unendlich viele Zahlen von derselben Beschaffenheit wie a_2; die ganze Menge $\mathbb{R}$ zerfällt in drei Stücke A_1, A, A_2, und es treten zwei vollständig bestimmte rationale oder irrationale Zahlen α_1, α_2 auf, welche resp. die untere und obere (oder die kleinere und größere) **Grenze** des Intervalls A genannt werden können; die untere Grenze α_1 ist durch den Schnitt bestimmt, bei welchem die erste Teilmenge durch die Menge A_1 gebildet wird, und die obere Grenze α_2, durch den Schnitt, bei welchem A_2 die zweite Teilmenge bildet. Von jeder rationalen oder irrationalen Zahl α, welche zwischen α_1 und α_2 liegt, mag gesagt werden, sie liege **innerhalb** des Intervalls A. Sind alle Zahlen eines Intervalls A auch Zahlen eines Intervalls B, so heiße A ein Stück von B.

Noch viel größere Weitläufigkeiten scheinen in Aussicht zu stehen, wenn man dazu übergehen will, die unzähligen Sätze der Arithmetik der rationalen Zahlen (wie z. B. den Satz $(a + b)\, c = a\, c + b\, c$) auf beliebige reelle Zahlen zu übertragen. Dem ist jedoch nicht so; man überzeugt sich bald, dass hier alles darauf ankommt, nachzuweisen, dass die arithmetischen Operationen selbst eine gewisse Stetigkeit besitzen. Was ich hiermit meine, will ich in die Form eines allgemeinen Satzes einkleiden:

„Ist die Zahl λ das Resultat einer mit den Zahlen α, β, γ ... angestellten Rechnung, und liegt λ innerhalb des Intervalls L, so lassen sich Intervalle A, B, C ... angeben, innerhalb deren die Zahlen α, β, γ ... liegen, und von der Art, dass das Resultat der selben Rechnung, in welcher die Zahlen α, β, γ ... durch beliebige Zahlen der Intervalle A, B, C ... ersetzt werden, jedesmal eine innerhalb des Intervalls L liegende Zahl wird."

Die abschreckende Schwerfälligkeit aber, welche dem Ausspruche eines solchen Satzes anklebt, überzeugt uns, dass hier etwas geschehen muß, um der Sprache zu Hilfe zu kommen; dies wird in der Tat auf die vollkommenste Weise erreicht, wenn man die Begriffe der **veränderlichen Größen**, der **Funktionen**, der **Grenzwerte** einführt, und zwar wird es das Zweckmäßigste sein, schon die Definitionen der einfachsten arithmetischen Operationen auf diese Begriffe zu gründen, was hier jedoch nicht weiter ausgeführt werden kann.

§ 7 Infinitesimal-Analysis

Es soll hier nur noch zum Schluss der Zusammenhang beleuchtet werden, welcher zwischen unseren bisherigen Betrachtungen und gewissen Hauptsätzen der Infinitesimalanalysis besteht.

Man sagt, dass eine veränderliche Größe x, welche sukzessive bestimmte Zahl-werte durchläuft, sich einem festen **Grenzwert** α nähert, wenn x im Laufe des Prozesses definitiv zwischen je zwei Zahlen zu liegen kommt, zwischen denen α selbst liegt, oder was dasselbe ist, wenn die Differenz $x - \alpha$ absolut genommen unter jeden gegebenen, von Null verschiedenen Wert definitiv herabsinkt.

Einer der wichtigsten Sätze lautet folgendermaßen: „Wächst eine Größe x beständig, aber nicht über alle Grenzen, so nähert sie sich einem Grenzwert."

Ich beweise ihn auf folgende Art. Der Voraussetzung nach gibt es eine und folglich auch unendlich viele Zahlen α_2 von der Art, dass stets $x < \alpha_2$ bleibt; ich bezeichne mit $\mathfrak{A}_2$ die Menge aller dieser Zahlen α_2, mit $\mathfrak{A}_1$ die Menge aller anderen Zahlen α_1; jede der letzteren hat die Eigenschaft, dass im Laufe des Prozesses definitiv $x \geq \alpha_1$ wird, mithin ist jede Zahl α_1 kleiner als jede Zahl α_2, und folglich existiert eine Zahl α, welche entweder die größte in $\mathfrak{A}_1$ oder die kleinste in $\mathfrak{A}_2$ ist (§ 5, IV). Das erstere kann nicht der Fall sein, weil x nie aufhört, zu wachsen, also ist α die kleinste Zahl in $\mathfrak{A}_2$. Welche Zahl α_1 man nun auch nehmen mag, so wird schließlich definitiv $a_1 < x < \alpha$ sein, d. h. x nähert sich dem Grenzwerte α.

Dieser Satz ist äquivalent mit dem Prinzip der Stetigkeit, d. h. er verliert seine Gültigkeit, sobald man auch nur eine reelle Zahl in der Menge $\mathbb{R}$ als nicht vorhanden ansieht; oder anders ausgedrückt: ist dieser Satz richtig, so ist auch der Satz IV in § 5 richtig.

Ein anderer, mit diesem ebenfalls äquivalenter Satz der Infinitesimal-Analysis, welcher noch öfter zur Anwendung kommt, lautet folgendermaßen: „Läßt sich in dem Änderungsprozesse einer Größe x für jede gegebene positive Größe δ auch eine entsprechende Stelle angeben, von welcher ab x sich um weniger als δ ändert, so nähert sich x einem Grenzwert."

Diese Umkehrung des leicht zu beweisenden Satzes, dass jede veränderliche Größe, welche sich einem Grenzwert nähert, sich zuletzt um weniger ändert, als irgendeine gegebene positive Größe, kann ebensowohl aus dem vorhergehenden Satze wie direkt aus dem Prinzip der Stetigkeit abgeleitet werden. Ich schlage den letzteren Weg ein. Es sei δ eine beliebige positive Größe (d. h. $\delta > 0$), so wird der Annahme zufolge ein Augenblick eintreten, von welchem ab x sich um weniger als δ ändern wird, d.h. wenn x in diesem Augenblick den Wert a besitzt, so wird in der Folge stets $x > a - \delta$ und $x < a + \delta$ sein. Ich lasse nun einstweilen die ursprüngliche Annahme fallen, und halte nur die soeben bewiesene Tatsache fest, dass alle späteren Werte der Veränderlichen x zwischen zwei angebbaren, endlichen Werten liegen. Hierauf gründe ich eine doppelte Einteilung aller reellen Zahlen. In die Menge $\mathfrak{A}_2$ nehme ich eine Zahl α_2 (z. B. $a + \delta$) auf, wenn im Laufe des Prozesses definitiv $x \leq \alpha_2$ wird; in die Menge $\mathfrak{A}_1$ nehme ich jede nicht in $\mathfrak{A}_2$ enthaltene Zahl auf; ist α_1 eine solche Zahl, so wird, wie weit auch der Prozeß vorgeschritten sein mag, es noch unendlich oft eintreten, dass $x > \alpha_1$ ist. Da jede Zahl α_1 kleiner ist als jede Zahl α_2, so gibt es eine völlig bestimmte Zahl α, welche diesen Schnitt $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ der Menge $\mathbb{R}$ hervorbringt, und welche ich den oberen Grenzwert der stets endlich bleibenden Veränderlichen x nennen will. Ebenso wird durch das Verhalten der Veränderlichen x ein zweiter Schnitt $(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)$ der Menge $\mathbb{R}$ hervorgebracht: eine Zahl β_1 (z. B. $a - \delta$) wird in $\mathfrak{B}_1$ aufgenommen, wenn im Laufe des Prozesses definitiv $x \geq \beta_1$ wird; jede andere, in $\mathfrak{B}_2$ aufzunehmende Zahl β_2 hat die Eigenschaft, dass niemals definitiv $x \geq \beta_2$, also immer noch unendlich oft $x < \beta_2$ wird; die Zahl β, durch welche dieser Schnitt hervorgebracht wird, heiße der untere Grenzwert der Veränderlichen x. Die beiden Zahlen α, β sind offenbar auch durch die folgende Eigenschaft charakterisiert: ist ε eine beliebig kleine positive Größe, so wird stets definitiv $x < \alpha + \varepsilon$ und $x > \beta - \varepsilon$, aber niemals wird definitiv $x < \alpha - \varepsilon$, und niemals definitiv $x > \beta + \varepsilon$. Nun sind zwei Fälle möglich. Sind α und β verschieden voneinander, so ist notwendig $\alpha > \beta$, weil stets $\alpha_2 \geq \beta_1$ ist; die Veränderliche x oszilliert und erleidet, wie weit der Prozeß auch vorgeschritten sein mag, immer noch Änderungen, deren Betrag den Wert $(\alpha - \beta) - 2\varepsilon$ übertrifft, wo ε eine beliebig kleine positive Größe bedeutet. Die ursprüngliche Annahme, zu der ich erst jetzt zurückkehre, steht aber im Widerspruch mit dieser Konsequenz; es bleibt daher nur der zweite Fall $\alpha = \beta$ übrig, und da schon bewiesen ist, dass, wie klein auch die positive Größe ε sein mag, immer definitiv $x < \alpha + \varepsilon$ und $x > \beta - \varepsilon$ wird, so nähert sich x dem Grenzwert α, was zu beweisen war.

Diese Beispiele mögen genügen, um den Zusammenhang zwischen dem Prinzip der Stetigkeit und der Infinitesimalanalysis darzulegen.