Was sind und was sollen die Zahlen?

Von

Richard Dedekind,

Professor an der technischen Hochschule in Braunschweig.

Nach der vierten unveränderten Auflage, Braunschweig 1918.

Diese Transkription enthält den ursprünglichen Text in leicht modernisierter Schreibweise.
Mit Ausnahme folgender Ersetzungen ist der Text unverändert:

Es wurde die Benennungen

System	ersetzt durch	Menge,
Ganzes	ersetzt durch	Obermenge,
Gemeinteil	ersetzt durch	Durchschnitt,
Gemeinheit	ersetzt durch	Schnittmenge,
ähnliche Abbildung	durch	bijektive Abbildung (eineindeutige, injektive und surjektive Funktion),
einfach unendlich	durch	abzählbar unendlich,
Grad eines Systems	durch	Mächtigkeit einer Menge.

Es wurden die Zeichen

𝔷	ersetzt durch	$\subset$	(ist Teilmenge von),
𝔐	ersetzt durch	$\cup$	(Vereinigung von Mengen),
𝔊	ersetzt durch	$\cap$	(Durchschnitt von Mengen),
$\overline{\varphi}$	ersetzt durch	φ^{-1}	(Umkehrfunktion).

Typografische Änderungen:

im Original g e s p e r r t gesetzte Wörter werden **fett** wiedergegeben,
Verweise auf die nummerierten Absätze und Sätze wurden in Klammern gesetzt.
Die Fußnoten wurden nummeriert.

Die Rechtschreibung einzelner Wörter wurde den neueren Regeln angepasst.

Edition Opera-Platonis 2013

Inhalt.

Vorworte III

§ 1 Mengen 1

§ 2 Abbildung einer Menge 3

§ 3 Bijektive Abbildung. Ähnliche Mengen 4

§ 4 Abbildung einer Menge in sich selbst 5

§ 5 Das Endliche und Unendliche 8

§ 6 Abzählbar unendliche Mengen. Reihe der natürlichen Zahlen 10

§ 7 Größere und kleinere Zahlen 11

§ 8 Endliche und unendliche Teile der Zahlenreihe 15

§ 9 Definition einer Abbildung der Zahlenreihe durch Induktion 16

§ 10 Die Klasse der abzählbar unendlichen Mengen 20

§ 11 Addition der Zahlen 22

§ 12 Multiplikation der Zahlen 24

§ 13 Potenzierung der Zahlen 25

§ 14 Anzahl der Elemente einer endlichen Menge 26

Vorwort zur ersten Auflage.

Was beweisbar ist, soll in der Wissenschaft nicht ohne Beweis geglaubt werden. So einleuchtend diese Forderung erscheint, so ist sie doch, wie ich glaube, selbst bei der Begründung der einfachsten Wissenschaft, nämlich desjenigen Teiles der Logik, welcher die Lehre von den Zahlen behandelt, auch nach den neuesten Darstellungen [1] noch keineswegs als erfüllt anzusehen. Indem ich die Arithmetik (Algebra, Analysis) nur einen Teil der Logik nenne, spreche ich schon aus, daß ich den Zahlbegriff für gänzlich unabhängig von den Vorstellungen oder Anschauungen des Raumes und der Zeit, daß ich ihn vielmehr für einen unmittelbaren Ausfluß der reinen Denkgesetze halte. Meine Hauptantwort auf die im Titel dieser Schrift gestellte Frage lautet: die Zahlen sind freie Schöpfungen des menschlichen Geistes, sie dienen als ein Mittel, um die Verschiedenheit der Dinge leichter und schärfer aufzufassen. Durch den rein logischen Aufbau der Zahlen-Wissenschaft und durch das in ihr gewonnene stetige Zahlen-Reich sind wir erst in den Stand gesetzt, unsere Vorstellungen von Raum und Zeit genau zu untersuchen, indem wir dieselben auf dieses in unserem Geiste geschaffene Zahlen-Reich beziehen [2]. Verfolgt man genau, was wir bei dem Zählen der Menge oder Anzahl von Dingen tun, so wird man auf die Betrachtung der Fähigkeit des Geistes geführt, Dinge auf Dinge zu beziehen, einem Dinge ein Ding entsprechen zu lassen, oder ein Ding durch ein Ding abzubilden, ohne welche Fähigkeit überhaupt kein Denken möglich ist. Auf dieser einzigen, auch sonst ganz unentbehrlichen Grundlage muß nach meiner Ansicht, wie ich auch schon bei einer Ankündigung der vorliegenden Schrift ausgesprochen habe [3], die gesamte Wissenschaft der Zahlen errichtet werden. Die Absicht einer solchen Darstellung habe ich schon vor der Herausgabe meiner Schrift über die Stetigkeit gefaßt, aber est nach Erscheinen derselben, und mit vielen Unterbrechungen, die durch gesteigerte Amtsgeschäfte und andere notwendige Arbeiten veranlaßt wurden, habe ich in den Jahren 1872 bis 1878 auf wenigen Blättern einen ersten Entwurf aufgeschrieben, welchen dann mehrere Mathematiker eingesehen und teilweise mit mir besprochen haben. Er trägt denselben Titel und enthält, wenn auch nicht das beste geordnet, doch alle wesentlichen Grundgedanken meiner vorliegenden Schrift, die nur deren sorgfältige Ausführung gibt; als solche Hauptpunkte erwähne ich hier die scharfe Unterscheidung des Endlichen vom Unendlichen (64), den Begriff der Anzahl von Dingen (161), den Nachweis, daß die unter dem Namen der vollständigen Induktion (oder des Schlusses von n auf $n+1$) bekannte Beweisart wirklich beweiskräftig (59, 60, 80), und daß auch die Definition durch Induktion (oder Rekursion) bestimmt und widerspruchsfrei ist (126).

Diese Schrift kann jeder verstehen, welcher das besitzt, was man den gesunden Menschenverstand nennt; philosophische oder mathematische Schulkenntnisse sind dazu nicht im geringsten erforderlich. Aber ich weiß sehr wohl, daß gar mancher in den schattenhaften Gestalten, die ich ihm vorführe, seine Zahlen, die ihn als treue und vertraute Freunde durch das ganze Leben begleitet haben, kaum wiedererkennen mag; er wird durch die lange, der Beschaffenheit unseres Treppen-Verstandes entsprechende Reihe von einfachen Schlüssen, durch die nüchterne Zergliederung der Gedankenreihen, auf denen die Gesetze der Zahlen beruhen, abgeschreckt und ungeduldig darüber werden, Beweise für Wahrheiten verfolgen zu sollen, die ihm nach seiner vermeintlichen inneren Anschauung von vornherein einleuchtend und gewiß erscheinen. Ich erblicke dagegen gerade in der Möglichkeit, solche Wahrheiten auf andere, einfachere zurückzuführen, mag die Reihe der Schlüsse noch so lang und scheinbar künstlich sein, einen überzeugenden Beweis dafür, daß ihr Besitz oder der Glaube an sie niemals unmittelbar durch innere Anschauung gegeben, sondern immer nur durch eine mehr oder weniger vollständige Wiederholung der einzelnen Schlüsse erworben ist. Ich möchte diese,

---

[1] Von den mir bekannt gewordenen Schriften erwähne ich das verdienstvolle Lehrbuch der Arithmetik und Algebra von E. Schröder (Leipzig 1873), in welchem man auch ein Literaturverzeichnis findet, und außerdem die Abhandlungen von Kronecker und von Helmholtz über den Zahlbegriff und über Zählen und Messen (in der Sammlung der an E. Zeller gerichteten philosophischen Aufsätze, Leipzig 1887). Das Erscheinen dieser Abhandlungen ist die Veranlassung, welche mich bewogen hat, nun auch mit meiner, in mancher Beziehung ähnlichen, aber durch ihre Begründung doch wesentlich verschiedenen Auffassung hervorzutreten, die ich mir seit vielen Jahren und ohne jede Beeinflussung von irgendwelcher Seite gebildet habe .

[2] Vergl. § 3 meiner Schrift: „Stetigkeit und irrationale Zahlen" (Braunschweig 1872).

[3] Dirichlet's Vorlesungen über Zahlentheorie, dritte Auflage, 1879, § 163, Anmerkung auf S. 470.

der Schnelligkeit ihrer Ausführung wegen schwer zu verfolgende Denktätigkeit mit derjenigen vergleichen, welche ein vollkommen geübter Leser beim Lesen verrichtet; auch dieses Lesen bleibt immer eine mehr oder weniger vollständige Wiederholung der einzelnen Schritte, welche der Anfänger bei dem mühseligen Buchstabieren auszuführen hat; ein sehr kleiner Teil derselben, und deshalb eine sehr kleine Arbeit oder Anstrengung des Geistes reicht aber für den geübten Leser schon aus, um das richtige, wahre Wort zu erkennen, freilich nur mit sehr großer Wahrscheinlichkeit; denn bekanntlich begegnet es auch dem geübtesten Korrektor von Zeit zu Zeit, einen Druckfehler stehenzulassen, d. h. falsch zu lesen, was unmöglich wäre, wenn die zum Buchstabieren gehörige Gedankenkette vollständig wiederholt würde. So sind wir auch schon von unserer Geburt an beständig und in immer steigendem Maße veranlaßt, Dinge auf Dinge zu beziehen und damit diejenige Fähigkeit des Geistes zu üben, auf welcher auch die Schöpfung der Zahlen beruht; durch diese schon in unsere ersten Lebensjahre fallende unablässige, wenn auch absichtslose Übung und die damit verbundene Bildung von Urteilen und Schlußreihen erwerben wir uns auch einen Schatz von eigentlich arithmetischen Wahrheiten, auf welche später unsere ersten Lehrer sich wie etwas Einfaches, Selbstverständliches, in der inneren Anschauung Gegebenes berufen, und so kommt es, daß manche, eigentlich sehr zusammengesetzte Begriffe (wie z. B. der der Anzahl von Dingen) fälschlich für einfach gelten. In diesem Sinne, den ich durch die, einem bekannten Spruche nachgebildeten Worte ἀεὶ ὁ ἄνδρωποσ ἀριδμητίζει bezeichne, mögen die folgenden Blätter als ein Versuch, die Wissenschaft der Zahlen auf einheitlicher Grundlage zu errichten, wohlwollende Aufnahme finden, und mögen sie andere Mathematiker dazu anregen, die langen Reihen von Schlüssen auf ein bescheideneres, angenehmeres Maß zurückzuführen.

Dem Zwecke dieser Schrift gemäß beschränke ich mich auf die Betrachtung der Reihe der sogenannten natürlichen Zahlen. In welcher Art später die schrittweise Erweiterung des Zahlbegriffes, die Schöpfung der Null, der negativen, gebrochenen, irrationalen und komplexen Zahlen stets durch Zurückführung auf die früheren Begriffe herzustellen ist, und zwar ohne jede Einmischung fremdartiger Vorstellungen (wie z.B. der der meßbaren Größen), die nach meiner Auffassung erst durch die Zahlenwissenschaft zu vollständiger Klarheit erhoben werden können, das habe ich wenigstens an dem Beispiele der irrationalen Zahlen in meiner früheren Schrift über die Stetigkeit (1872) gezeigt; in ganz ähnlicher Weise lassen sich, wie ich daselbst (§ 3) auch schon ausgesprochen habe, die anderen Erweiterungen leicht behandeln, und ich behalte mir vor, diesem Gegenstande eine zusammenhängende Darstellung zu widmen. Gerade bei dieser Auffassung erscheint es als etwas Selbstverständliches und durchaus nichts Neues, daß jeder auch noch so fern liegende Satz der Algebra und höheren Analysis sich als ein Satz über die natürlichen Zahlen aussprechen läßt, eine Behauptung, die ich auch wiederholt aus dem Munde von Dirichlet gehört habe. Aber ich erblicke keineswegs etwas Verdienstliches darin — und das lag auch Dirichlet gänzlich fern — , diese mühselige Umschreibung wirklich vornehmen und keine anderen als die natürlichen Zahlen benutzen und anerkennen zu wollen. Im Gegenteil, die größten und fruchtbarsten Fortschritte in der Mathematik und anderen Wissenschaften sind vorzugsweise durch die Schöpfung und Einführung neuer Begriffe gemacht, nachdem die häufige Wiederkehr zusammengesetzter Erscheinungen, welche von den alten Begriffen nur mühselig beherrscht werden, dazu gedrängt hat. Über diesen Gegenstand habe ich im Sommer 1854 bei Gelegenheit meiner Habilitation als Privatdozent zu Göttingen einen Vortrag vor der philosophischen Fakultät zu halten gehabt, dessen Absicht auch von Gauß gebilligt wurde; doch ist hier nicht der Ort, näher darauf einzugehen.

Ich benutze statt dessen die Gelegenheit, noch einige Bemerkungen zu machen, die sich auf meine frühere, oben erwähnte Schrift über Stetigkeit und irrationale Zahlen beziehen. Die in ihr vorgetragene, im Herbst 1858 erdachte Theorie irrationale Zahlen gründet sich auf diejenige im Gebiete der rationalen Zahlen auftretende Erscheinung (§ 4). die ich mit dem Namen eines Schnittes belegt und zuerst genau erforscht habe, und sie gipfelt in dem Beweise der Stetigkeit des neuen Gebietes der reellen Zahlen (§ 5. IV). Sie scheint mir etwas einfacher, ich möchte sagen ruhiger, zu sein als die beiden von ihr und voneinander verschiedenen Theorien, welche von den Herren Weierstraß und G. Cantor aufgestellt sind und ebenfalls vollkommene Strenge besitzen. Sie ist später ohne wesentliche Änderung von Herrn U. Dini in die **Fondamenti per la teorica delle funzioni di**

variabili reali (Pisa 1878) auf-genommen; aber der Umstand, daß mein Name im Laufe dieser Darstellung nicht bei der Beschreibung der rein arithmetischen Erscheinung des Schnittes, sondern zufällig gerade da erwähnt wird, wo es sich um die Existenz einer dem Schnitte entsprechenden meßbaren Größe handelt, könnte leicht zu der Vermutung führen, daß meine Theorie sich auf die Betrachtung solcher Größen stützte. Nichts könnte unrichtiger sein; vielmehr habe ich in § 3 meiner Schrift verschiedene Gründe angeführt, weshalb ich die Einmischung der meßbaren Größen gänzlich verwerfe, und namentlich am Schlusse hinsichtlich deren Existenz bemerkt, daß für einen großen Teil der Wissenschaft vom Raume die Stetigkeit seiner Gebilde gar nicht einmal eine notwendige Voraussetzung ist, ganz abgesehen davon, daß sie in den Werken über Geometrie zwar wohl dem Namen nach beiläufig erwähnt, aber niemals deutlich erklärt, also auch nicht für Beweise zugänglich gemacht wird. Um dies noch näher zu erläutern, bemerke ich beispielsweise Folgendes. Wählt man drei nicht in einer Geraden liegende Punkte A, B, C nach Belieben, nur mit der Beschränkung, daß die Verhältnisse ihrer Entfernung AB, AC, BC algebraische[4] Zahlen sind, und sieht man im Raum nur diejenigen Punkte M als vorhanden an, für welche Verhältnisse von AM, BM, CM zu AB ebenfalls algebraische Zahlen sind, so ist der aus diesen Punkten M bestehende Raum, wie leicht zu sehen, überall unstetig; aber trotz der Unstetigkeit, Lückenhaftigkeit dieses Raumes sind in ihm, so viel ich sehe, alle Konstruktionen, welche in Euklid's Elementen auftreten, genau ebenso ausführbar wie in dem vollkommen stetigen Raume; die Unstetigkeit dieses Raumes würde daher in Euklid's Wissenschaft gar nicht bemerkt, gar nicht empfunden werden. Wenn mir aber jemand sagt, wir könnten uns den Raum gar nicht anders als stetig denken, so möchte ich das bezweifeln und darauf aufmerksam machen, eine wie weit vorgeschrittene, feine wissenschaftliche Bildung erforderlich ist, um nur das Wesen der Stetigkeit deutlich zu erkennen und um zu begreifen, daß außer den rationalen Größen-Verhältnissen auch irrationale, außer den algebraischen auch transzendente denkbar sind. Um so schöner erscheint es mir, daß der Mensch ohne jede Vorstellung von meßbaren Größen, und zwar durch ein endliches System einfacher Denkschritte sich zur Schöpfung des reinen, stetigen Zahlenreiches aufschwingen kann; und erst mit diesem Hilfsmittel wird es ihm nach meiner Ansicht möglich, die Vorstellung vom stetigen Raume zu einer deutlichen auszubilden.

Dieselbe, auf die Erscheinung des Schnittes gegründete Theorie der irrationalen Zahlen findet man auch dargestellt in der **Introduction a la théorie des fonctions d'une variable** von J. Tannery (Paris 188). Wenn ich eine Stelle der Vorrede dieses Werkes richtig verstehe, so hat der Herr Verfasser diese Theorie selbständig, also zu einer Zeit erdacht, wo ihm nicht nur meine Schrift, sondern auch die in derselben Vorrede erwähnten Fondamenti von Dini noch unbekannt waren; diese Übereinstimmung scheint mir ein erfreulicher Beweis dafür zu sein, daß meine Auffassung der Natur der Sache entspricht, was auch von anderen Mathematikern, z. B. von Herrn M. Pasch in seiner Einleitung in die Differential- und Integralrechnung (Leipzig 1883) anerkannt ist. Dagegen kann ich Herrn Tannery nicht ohne Weiteres bestimmen, wenn er diese Theorie die Entwicklung eines von Herrn J. Bertrand herrührenden Gedankens nennt, welcher in dessen **Traité d'arithmétique** enthalten sei und darin bestehe, eine irrationale Zahl zu definieren durch Angabe aller rationalen Zahlen, die kleiner, und aller derjenigen, die größer sind als die zu definierende Zahl. Zu diesem Ausspruch, der von Herrn O. Stolz — wie es scheint, ohne nähere Prüfung — in der Vorrede zum zweiten Teile seinen Vorlesungen über allge-meine Arithmetik (Leipzig 1886) wiederholt ist, erlaube ich mir folgendes zu bemerken. Daß eine irrationale Zahl durch die eben beschriebene Angabe in der Tat als vollständig bestimmt anzusehen ist, diese Überzeugung ist ohne Zweifel auch vor Herrn Bertrand immer Gemeingut aller Mathematiker gewesen, die sich mit dem Begriff des Irrationalen beschäftigt haben; jedem Rechner, der eine irrationale Wurzel einer Gleichung näherungsweise berechnet, schwebt gerade diese Art ihrer Bestimmung vor; und wenn man, wie es Herrn Bertrand in seinem Werke ausschließlich tut (mir liegt die achte Auflage aus dem Jahre 1885 vor), die irrationale Zahl als Verhältnis meßbarer Größen auffaßt, so ist diese Art ihrer Bestimmtheit schon auf das deutlichste in der berühmten Definition ausgesprochen, welche Euklid (Elemente V. 5) für die Gleichheit der Verhältnisse aufstellt. Eben diese uralte Überzeugung ist nun gewiß die Quelle meiner Theorie wie derjenigen des Herrn Bertrand und

[4] Dirichlets Vorlesungen über Zahlentheorie, § 159 der zweiten, § 160 der dritten Auflage

mancher anderen, mehr oder weniger durchgeführten Versuche gewesen, die Einführung der irrationalen Zahlen in die Arithmetik zu begründen. Aber wenn man Herrn Tannery soweit vollständig beistimmen wird, so muß man bei einer wirklichen Prüfung doch sofort bemerken, daß die Darstellung des Herrn Bertrand, in der die Erscheinung des Schnittes in ihrer logischen Reinheit gar nicht einmal erwähnt wird, mit der meinigen durchaus keine Ähnlichkeit hat, insofern sie sogleich ihre Zuflucht zu der Existenz einer meßbaren Größe nimmt, was ich aus den oben besprochenen Gründen gänzlich verwerfe; und abgesehen von diesem Umstande, scheint mir diese Darstellung auch in den nachfolgenden, auf die Annahme dieser Existenz gegründeten Definitionen und Beweisen noch einige so wesentliche Lücken darzubieten, daß ich die in meiner Schrift (§ 6) ausgesprochene Behauptung, der Satz $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$ sei noch nirgends streng bewiesen, auch in Hinsicht auf dieses in mancher anderen Beziehung treffliche Werk, welches ich damals noch nicht kannte, für gerechtfertigt halte.

Harzburg, 5. Oktober 1887

R. Dedekind.

Vorwort zur zweiten Auflage

Die vorliegende Schrift hat bald nach ihrem Erscheinen neben günstigen auch ungünstige Beurteilungen gefunden, ja es sind ihr arge Fehler vorgeworfen. Ich habe mich von der Richtigkeit dieser Vorwürfe nicht überzeugen können und lasse jetzt die seit Kurzem vergriffene Schrift, zu deren öffentlicher Verteidigung es mir an Zeit fehlt, ohne jede Änderung wieder abdrucken, indem ich nur folgende Bemerkungen dem ersten Vorworte hinzufüge.

Die Eigenschaft, welche ich als Definition (64) der unendlichen Menge benutzt habe, ist schon vor dem Erscheinen meiner Schrift von G. Cantor (Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitlehre, Crelle´s Journal, Bd, 84; 1878), ja sogar schon von Bolzano (Paradoxien des Unendlichen, § 20; 1851) hervorgehoben. Aber keiner der genannten Schriftsteller hat den Versuch gemacht, diese Eigenschaften zur Definition des Unendlichen zu erheben und auf dieser Grundlage die Wissenschaft von den Zahlen streng logisch aufzubauen, und gerade hierin besteht der Inhalt meiner mühsamen Arbeit, die ich in allem Wesentlichen schon mehre Jahre vor dem Erscheinen der Abhandlung von G. Cantor und zu einer Zeit vollendet hatte, als mir das Werk von Bolzano selbst dem Namen nach gänzlich unbekannt war. Für Diejenigen, welche Interesse und Verständnis für die Schwierigkeiten einer solchen Untersuchung haben, bemerke ich noch folgendes. Man kann eine ganz andere Definition des Endlichen und Unendlichen aufstellen, welche insofern noch einfacher erscheint, als bei ihr nicht einmal der Begriff der Bijektivität einer Abbildung (26) vorausgesetzt wird, nämlich :

„Eine Menge S heißt endlich, wenn es sich so in sich selbst abbilden läßt (36), daß kein echter Teil (6) von S in sich selbst abgebildet wird; im entgegengesetzten Falle heißt S eine unendliche Menge."

Nun mache man einmal den Versuch, auf dieser neuen Grundlage das Gebäude zu errichten! Man wird alsbald auf große Schwierigkeiten stoßen, und ich glaube behaupten zu dürfen, daß selbst der Nachweis der vollständigen Übereinstimmung dieser Definition mit der früheren nur dann (und dann auch leicht) gelingt, wenn man die Reihe der natürlichen Zahlen schon als entwickelt ansehen und auch die Schlußbetrachtung in (131) zu Hilfe nehmen darf; und doch ist von allen diesen Dingen weder in der einen noch in der anderen Definition die Rede! Man wird dabei erkennen, wie sehr groß die Anzahl der Gedankenschritte ist, die zu einer solchen Umformung einer Definition erforderlich sind.

Etwa ein Jahr nach der Herausgabe meiner Schrift habe ich die schon im Jahre 1884 erschienenen Grundlagen der Arithmetik von G. Frege kennengelernt. Wie verschieden die in diesem Werke niedergelegte Ansicht über das Wesen der Zahl von der meinigen auch sein mag, so enthält es, namentlich von § 79 an, doch auch sehr nahe Berührungspunkte mit meiner Schrift, insbesondere mit meiner Erklärung (44). Freilich ist die Übereinstimmung wegen der abweichenden Ausdrucksweise nicht leicht zu erkennen; aber schon die Bestimmtheit, mit welcher der Verfasser sich über die Schlußweise von n auf $n+1$ ausspricht (unten auf S. 93) zeigt deutlich, daß er hier auf demselben Boden mit mir steht.

Inzwischen sind (1890 bis 1891) die Vorlesungen über die Algebra der Logik von E. Schröder fast vollständig erschienen. Auf die Bedeutung dieses höchst anregenden Werkes, dem ich meine größte Anerkennung zolle, hier näher einzugehen, ist unmöglich; vielmehr möchte ich mich nur entschuldigen, daß ich trotz der auf S. 253 des ersten Teiles gemachte Bemerkung meine etwas schwerfälligen Bezeichnungen (8) und (17) doch beibehalten habe; dieselben machen keinen Anspruch darauf, allge-mein angenommen zu werden, sondern bescheiden sich, lediglich den Zwecken dieser arithmetischen Schrift zu dienen, wozu sie nach meiner Ansicht besser geeignet sind, als Summen- und Produkt-zeichen.

Harzburg, 24. August 1893

R. Dedekind

Vorwort zur dritten Auflage

Als ich vor etwa acht Jahren aufgefordert wurde, die damals schon vergriffene zweite Auflage dieser Schrift durch eine dritte zu ersetzen, trug ich Bedenken, darauf einzugehen, weil inzwischen sich Zweifel an der Sicherheit wichtiger Grundlagen meiner Auffassung geltend gemacht hatten. Die Bedeutung und teilweise Berechtigung dieser Zweifel verkenne ich auch heute nicht, Aber mein Vertrauen in die innere Harmonie unserer Logik ist dadurch nicht erschüttert; ich glaube, daß eine strenge Untersuchung der Schöpferkraft des Geistes, aus bestimmten Elementen ein neues Bestimmtes, ihr System zu erschaffen, das notwendig von jedem dieser Elemente verschieden ist, gewiß dazu führen wird, die Grundlagen meiner Schrift einwandfrei zu gestalten. Durch andere Arbeiten bin ich jedoch verhindert, eine so schwierige Untersuchung zu Ende zu führen, und ich bitte daher um Nachsicht, wenn die Schrift jetzt doch in ungeänderter Form zum dritten Male erscheint, was sich nur dadurch rechtfertigen läßt, daß das Interesse an ihr, wie die anhaltende Nachfrage zeigt, noch nicht erloschen ist.

Braunschweig, 30. September 1911

R. Dedekind

§ 1 Mengen.

1. Im folgenden verstehe ich unter einem **Ding** jeden Gegenstand unseres Denkens. Um bequem von den Dingen sprechen zu können, bezeichnet man sie durch Zeichen, z. B. durch Buchstaben, und man erlaubt sich, kurz von dem Ding a oder gar von a zu sprechen, wo man in Wahrheit das durch a bezeichnete Ding, keineswegs den Buchstaben a selbst meint. Ein Ding ist vollständig bestimmt durch alles das, was von ihm ausgesagt oder gedacht werden kann. Ein Ding a ist dasselbe wie b (identisch mit b), und b dasselbe wie a, wenn alles, was von b gilt, auch von a gedacht werden kann, auch von b, und wenn alles, was von b gilt, auch von a gedacht werden kann. Daß a und b nur Zeichen oder Namen für ein und dasselbe Ding sind, wird durch das Zeichen $a = b$ und ebenso durch $b = a$ angedeutet. Ist außerdem $b = c$, ist also c ebenfalls, wie a, ein Zeichen für das mit b bezeichnete Ding, so ist auch $a = c$. Ist die obige Übereinstimmung des durch a bezeichneten Dinges mit dem durch b bezeichneten Dinge nicht vorhanden, so heißen diese Dinge a, b verschieden, a ist ein anderes Ding wie b, b ein anderes Ding wie a; es gibt irgendeine Eigenschaft, die dem einen zu-kommt, dem anderen nicht zukommt.

2. Es kommt sehr häufig vor, daß verschiedene Dinge $a, b, c \ldots$ aus irgendeiner Veranlassung unter einem gemeinsamen Gesichtspunkte aufgefasst, im Geiste zusammengestellt werden, und man sagt dann, daß sie eine **Menge** S bilden; man nennt die Dinge $a, b, c \ldots$ die **Elemente** der Menge S, sie sind **enthalten** in S; umgekehrt **besteht** S aus diesen Elementen. Eine solche Menge S (oder ein Inbegriff, eine Mannigfaltigkeit, eine Gesamtheit) ist als Gegenstand unseres Denkens ebenfalls ein Ding (1); es ist vollständig bestimmt, wenn von jedem Ding bestimmt ist, ob es ein Element von S ist oder nicht [5]). Die Menge S ist daher dieselbe wie die Menge T, in Zeichen $S = T$, wenn jedes Element von S auch Element von T und jedes Element von T auch Element von S ist. Für die Gleichförmigkeit der Ausdrucksweise ist es vorteilhaft, auch den besonderen Fall zuzulassen, daß eine Menge S aus einem **einzigen** (aus einem und nur einem) Element a besteht, d. h. daß das Ding a Element von S, aber jedes von a verschiedene Ding kein Element von S ist. Dagegen wollen wir die leere Menge, welche gar kein Element enthält, aus gewissen Gründen hier ganz ausschließen, obwohl es für andere Untersuchungen bequem sein kann, ein solches zu erdichten.

3. Erklärung. Eine Menge A heißt **Teil** der Menge S, wenn jedes Element von A auch Element von S ist. Da diese Beziehung zwischen der Menge A und der Menge S im folgenden immer wieder zur Sprache kommen wird, so wollen wir dieselbe zur Abkürzung durch das Zeichen $A \subset S$ aus-drücken. Das umgekehrte Zeichen $S \supset A$, wodurch dieselbe Tatsache bezeichnet werden könnte, werde ich der Deutlichkeit und Einfachheit halber gänzlich vermeiden, aber ich werde in Ermangelung eines besseren Wortes bisweilen sagen, daß S **Obermenge** von A ist, wodurch also ausgedrückt werden soll, daß unter den Elementen von S sich auch alle Elemente von A befinden. Da ferner jedes Element s einer Menge S nach (2) selbst als Menge aufgefasst werden kann, so können wir auch hierauf die Bezeichnung $s \subset S$ anwenden.

4. Satz. Zufolge (3) ist $A \subset A$.

5. Satz. Ist $A \subset B$ und $B \subset A$, so ist $A = B$. Der Beweis folgt aus (3), (2).

6. Erklärung. Eine Menge A heißt **echter** Teil von S, wenn A Teil von S, aber verschieden von S ist. Nach (5) ist dann S kein Teil von A, d. h. (3) es gibt in S ein Element, welches kein Element von A ist.

---

[5] Auf welche Weise diese Bestimmtheit zustande kommt, und ob wir einen Weg kennen, um hierüber zu entscheiden, ist für alles Folgende gänzlich gleichgültig; die zu entwickelnden allgemeinen Gesetze hängen davon gar nicht ab, sie gelten unter allen Umständen. Ich erwähne dies ausdrücklich, weil Herr **Kronecker** vor kurzem (in Band 99 des Journals für Mathe-matik, S. 334 - 336) der freien Begriffsbildung in der Mathematik gewisse Beschränkungen hat auferlegen wollen, die ich nicht als berechtigt anerkenne; näher hierauf einzugehen erscheint aber erst dann geboten, wenn der ausgezeichnete Mathematiker seine Gründe für die Notwendigkeit oder auch nur die Zweckmäßigkeit dieser Beschränkungen veröffentlicht haben wird.

7. Satz. Ist $A \subset B$ und $B \subset C$, was auch kurz durch $A \subset B \subset C$ bezeichnet werden kann, so ist $A \subset C$, und zwar ist A gewiss echter Teil von C, wenn A echter Teil von B oder wenn B echter Teil von C ist.

Der Beweis folgt aus (3), (6).

8. Erklärung. Unter der aus irgendwelchen Mengen A, B, C ... **zusammengesetzte** Menge, welche mit $\cup(A, B, C ...)$ bezeichnet werden soll, wird diejenige Menge verstanden, deren Elemente durch folgende Vorschrift bestimmt werden: ein Ding gilt dann und nur dann als Element von $\cup(A, B, C ...)$, wenn es Element von irgendeiner der Mengen A, B, C ..., d. h. Element von A **oder** von B **oder** von C ... ist. Wir lassen auch den Fall zu, daß nur eine einzige Menge A vorliegt; dann ist offenbar $\cup(A) = A$. Wir bemerken ferner, daß die aus A, B, C ... zusammengesetzte Menge $\cup(A, B, C ...)$ wohl zu unterscheiden ist von derjenigen Menge, deren Elemente die Mengen A, B, C ... selbst sind.

9. Satz. Die Mengen A, B, C ... sind Teile von $\cup(A, B, C ...)$.

Der Beweis folgt aus (8), (3).

10. Satz. Sind A, B, C ... Teile der Menge S, so ist $\cup(A, B, C ...) \subset S$.

Der Beweis folgt aus (8), (3).

11. Satz. Ist P Teil von einer der Mengen A, B, C ..., so ist $P \subset \cup(A, B, C ...)$.

Der Beweis folgt aus (9), (7).

12. Satz. Ist jede der Mengen P, Q ... Teil von einer der Mengen A, B, C ..., so ist $\cup(P, Q ...) \subset \cup(A, B, C ...)$.

Der Beweis folgt aus (11), (10).

13. Satz. Ist A zusammengesetzt aus irgendwelchen der Mengen P, Q ..., so ist $A \subset \cup(P, Q ...)$.

Beweis. Denn jedes Element von A ist nach (8) Element von einer der Mengen P, Q ..., folglich nach (8) auch Element von $\cup(P, Q ...)$, woraus nach (3) der Satz folgt.

14. Satz. Ist jede der Mengen A, B, C ... zusammengesetzt aus irgendwelchen der Mengen P, Q ..., so ist $\cup(A, B, C ...) \subset \cup(P, Q ...)$.

Der Beweis folgt aus (13), (10).

15. Satz. Ist jede der Mengen P, Q ... Teil von einer der Mengen A, B, C ..., und ist jedes der letzteren zusammengesetzt aus irgendwelchen der ersteren, so ist $\cup(P, Q ...) = \cup(A, B, C ...)$.

Der Beweis folgt aus (12), (14), (5).

16. Satz. Ist $A = \cup(P, Q)$ und $B = \cup(Q, R)$, so ist $\cup(A, R) = \cup(P, B)$.

Beweis. Denn nach dem vorhergehenden Satze 15 ist sowohl $\cup(A, R)$ als $\cup(P, B) = \cup(P, Q, R)$.

17. Erklärung. Ein Ding g heißt **gemeinsames** Element der Mengen A, B, C ..., wenn es in jeder dieser Mengen (also in A **und** in B **und** in C ...) enthalten ist. Ebenso heißt eine Menge T **Durchschnitt** von A, B, C ..., wenn T Teil von jeder dieser Mengen ist, und unter der **Schnittmenge** der Mengen A, B, C ... verstehen wir die vollständig bestimmte Menge $\cap(A, B, C ...)$, welche aus allen gemeinsamen Elementen g aus A, B, C ... besteht und folglich ebenfalls ein Durchschnitt derselben Mengen ist. Wir lassen auch wieder den Fall zu, daß nur eine einzige Menge A vorliegt; dann ist $\cap(A) = A$ zu setzen. Es kann aber auch der Fall eintreten, daß die Mengen A, B, C ... gar kein gemeinsames Element, also keine Schnittmenge, keinen Durchschnitt besitzen; sie heißen dann Mengen ohne Durchschnitt und das Zeichen $\cap(A, B, C ...)$ ist bedeutungslos (vgl. den Schluss von 2). Wir werden es aber fast immer dem Leser überlassen, bei Sätzen über Schnittmengen die Bedingung ihrer Existenz hinzuzudenken und die richtige Deutung dieser Sätze auch für den Fall der Nicht-Existenz zu finden.

18. Satz. Jeder Durchschnitt von A, B, C ... ist Teil von $\cap(A, B, C ...)$. Der Beweis folgt aus (17).

19. Satz. Jeder Teil von $\cap(A, B, C ...)$ ist Durchschnitt von A, B, C ... Der Beweis folgt aus (17), (7).

20. Satz. Ist jede der Mengen A, B, C ... Obermenge (3) von einer der Mengen P, Q ..., so ist $\cap(P, Q ...) \subset \cap(A, B, C ...)$.

Beweis. Denn jedes Element von $\cap(P, Q ...)$ ist gemeinsames Element von P, Q ..., also auch gemeinsames Element von A, B, C ..., w. z. b. w.

§ 2 Abbildung einer Menge.

21. Erklärung [6]. Unter einer **Abbildung** φ einer Menge S wird ein Gesetz verstanden, nach welchem zu jedem bestimmten Element s von S ein bestimmtes Ding **gehört**, welches das **Bild** von s heißt und mit $\varphi(s)$ bezeichnet wird; wir sagen auch, daß $\varphi(s)$ dem Element s **entspricht**, daß $\varphi(s)$ durch die Abbildung φ aus s **entsteht** oder **erzeugt** wird, daß s durch die Abbildung φ in $\varphi(s)$ **übergeht**. Ist nun T irgendein Teil von S, so ist in der Abbildung φ von S zugleich eine bestimmte Abbildung von T enthalten, welche der Einfachheit wegen wohl mit demselben Zeichen φ bezeichnet werden darf und darin besteht, daß jedem Element t der Menge T dasselbe Bild $\varphi(t)$ entspricht, welches t als Element von S besitzt; zugleich soll die Menge, welche aus allen Bildern $\varphi(t)$ besteht, das Bild von T heißen und mit $\varphi(T)$ bezeichnet werden, wodurch auch die Bedeutung von $\varphi(S)$ erklärt ist. Als Beispiel einer Abbildung einer Menge ist schon die Belegung seiner Elemente mit bestimmten Zeichen oder Namen anzusehen. Die einfachste Abbildung einer Menge ist diejenige, durch welche jedes seiner Elemente in sich selbst übergeht; sie soll die **identische** Abbildung der Menge heißen. Der Bequemlichkeit halber wollen wir in den folgenden Sätzen (22), (23), (24), die sich auf eine beliebige Abbildung φ einer beliebigen Menge S beziehen, die Bilder von Elementen s und Teilen T entsprechend s' und T' bezeichnen; außerdem setzen wir fest, daß kleine und große lateinische Buchstaben ohne Akzent immer Elemente und Teile dieser Menge S bedeuten sollen.

22. Satz [7]. Ist $A \subset B$, so ist $A' \subset B'$.

Beweis. Denn jedes Element von A' ist das Bild eines in A, also auch in B enthaltenen Elementes und ist folglich Element von B', w. z. b. w.

23. Satz. Das Bild von $\cup(A, B, C ...)$ ist $\cup(A', B', C' ...)$.

Beweis. Bezeichnet man die Menge $\cup(A, B, C ...)$, welche nach (10) ebenfalls Teil von S ist, mit M, so ist jedes Element seines Bildes M' das Bild m' eines Elementes m von M; da nun m nach (8) auch Element von einer der Mengen A, B, C ... und folglich m' Ele-ment von einer der Mengen A', B', C' ..., also nach (8) auch Element von $\cup(A', B', C' ...)$ ist, so ist nach (3) $M' \subset \cup(A', B', C' ...)$.

Andererseits, da A, B, C ... nach (9) Teile von M, also A', B', C' ... nach (22) Teile von M' sind, so ist nach (10) auch $\cup(A', B', C' ...) \subset M'$,
und hieraus in Verbindung mit dem Obigen folgt nach (5) der zu beweisende Satz $M' = \cup(A', B', C' ...)$.

24. Satz [8]. Das Bild jedes Durchschnitts von A, B, C ..., also auch das der Schnittmenge $\cap(A, B, C ...)$, ist Teil von $\cap(A', B', C' ...)$.

Beweis. Denn dasselbe ist nach (22) Durchschnitt von A', B', C'..., woraus der Satz nach (18) folgt.

---

[6] Vgl. **Dirichlets** Vorlesungen über Zahlentheorie, 3. Auflage, 1879, § 163.

[7] Vgl. Satz 27.

[8] Vgl. Satz 29.

25. Erklärung und Satz. Ist φ eine Abbildung einer Menge S, und ψ eine Abbildung des Bildes $S' = \varphi(S)$, so entspringt hieraus immer eine aus φ und ψ **zusammengesetzte** [9]) Abbildung θ von S, welche darin besteht, daß jedem Elemente s von S das Bild

$$\theta(s) = \psi(s') = \psi(\varphi(s))$$

entspricht, wo wieder $\varphi(s) = s'$ gesetzt ist. Diese Abbildung θ kann kurz durch das Symbol $\psi \cdot \varphi$ oder $\psi \varphi$, das Bild $\theta(s)$ durch $\psi \varphi(s)$ bezeichnet werden, wobei auf die Stellung der Zeichen φ, ψ wohl zu achten ist, weil das Zeichen $\varphi \psi$ im allgemeinen bedeutungslos ist und nur dann einen Sinn hat, wenn $\psi(S') \subset S$ ist. Bedeutet nun χ eine Abbildung der Menge $\psi(S') = \psi \varphi(S)$, und η die aus ψ und χ zusammengesetzte Abbildung $\chi \psi$ der Menge S', so ist $\chi \theta(s) = \chi \psi(s') = \eta(s') = \eta \varphi(s)$, also stimmen die zusammengesetzten Abbildungen $\chi \theta$ und $\eta \varphi$ für jedes Element s von S miteinander überein, d. h. es ist $\chi \theta = \eta \varphi$. Dieser Satz kann nach der Bedeutung von θ und η füglich durch

$$\chi \cdot \psi \varphi = \chi \psi \cdot \varphi$$

ausgedrückt, und diese aus φ, ψ, χ zusammengesetzte Abbildung kann kurz durch $\chi \psi \varphi$ bezeichnet werden.

§ 3 Bijektive Abbildung. Ähnliche Mengen.

26. Erklärung. Eine Abbildung φ einer Menge S heißt **bijektiv** (oder **eineindeutig**), wenn verschiedenen Elementen a, b der Menge S stets verschiedene Bilder $a' = \varphi(a)$, $b' = \varphi(b)$ entsprechen. Da in diesem Falle umgekehrt aus $s' = t'$ stets $s = t$ folgt, so ist jedes Element der Menge $S' = \varphi(S)$ das Bild s' von einem einzigen, vollständig bestimmten Elemente s der Menge S, und man kann daher der Abbildung φ von S ein **umgekehrte**, etwa mit φ^{-1} zu bezeichnende Abbildung der Menge S' gegenüberstellen, welche darin besteht, daß jedem Elemente s' von S' das Bild $\varphi^{-1}(s') = s$ entspricht und offenbar ebenfalls bijektiv ist. Es leuchtet ein, daß $\varphi^{-1}(S') = S$, daß ferner φ die zu φ^{-1} gehörige umgekehrte Abbildung, und daß die nach (25) aus φ und φ^{-1} zusammengesetzte Abbildung $\varphi^{-1}\varphi$ die identische Abbildung von S ist (21). Zugleich ergeben sich folgende Ergänzungen zu § 2 unter Bei-behaltung der dortigen Bezeichnungen.

27. Satz [10]). Ist $A' \subset B'$, so ist $A \subset B$.

Beweis. Denn wenn a ein Element von A, so ist a' ein Element von A', also auch von B', mithin $a' = b'$, wo b ein Element von B; da aber aus $a' = b'$ immer $a = b$ folgt, so ist jedes Element a von A auch Element von B, w. z. b. w.

28. Satz. Ist $A' = B'$, so ist $A = B$.

Der Beweis folgt aus (27), (4), (5).

29. Satz [11]). Ist $G = \bigcap(A, B, C \ldots)$, so ist $G' = \bigcap(A', B', C' \ldots)$.

Beweis. Jedes Element von $\bigcap(A', B', C' \ldots)$ ist jedenfalls in S' enthalten, also das Bild g' eines in S enthaltenen Elementes g; da aber g' gemeinsames Element von $A', B', C' \ldots$ ist, so muß g nach (27) gemeinsames Element von $A, B, C \ldots$, also auch Element von G sein; mithin ist jedes Element von $\bigcap(A', B', C' \ldots)$ Bild eines Elementes g von G, also Element von G', d. h. es ist $\bigcap(A', B', C' \ldots) \subset G'$ und hieraus folgt unser Satz mit Rücksicht auf (24), (5).

30. Satz. Die identische Abbildung einer Menge ist immer eine bijektive Abbildung.

---

[9] Eine Verwechslung dieser Zusammensetzung von Abbildungen mit derjenigen der Mengen von Elementen (8) ist wohl nicht zu befürchten.

[10] Vgl. Satz 22.

[11] Vgl. Satz 24.

31. Satz. Ist φ eine bijektive Abbildung von S, und ψ eine bijektive Abbildung von $\varphi(S)$, so ist die aus φ und ψ zusammengesetzte Abbildung $\psi\varphi$ von S ebenfalls eine bijektive, und die zugehörige umgekehrte Abbildung $(\psi\varphi)^{-1}$ ist $= \varphi^{-1}\psi^{-1}$.

Beweis. Denn verschiedenen Elementen a, b von S entsprechen verschiedene Bilder $a' = \varphi(a)$, $b' = \varphi(b)$, und diesen wieder verschiedene Bilder $\psi(a') = \psi\varphi(a)$, $\psi(b') = \psi\varphi(b)$, also ist $\psi\varphi$ eine bijektive Abbildung. Außerdem geht jedes Element $\psi\varphi(s) = \psi(s')$ der Menge $\psi\varphi(S)$ durch ψ^{-1} in $s' = \varphi(s)$ und dieses durch φ^{-1} in s über, also geht $\psi\varphi(s)$ durch $\varphi^{-1}\psi^{-1}$ in s über, w. z. b. w.

32. Erklärung. Die Mengen R, S heißen ähnlich, wenn es eine derartige bijektive Abbildung φ von S gibt, daß $\varphi(S) = R$, also auch $\varphi^{-1}(R) = S$ wird. Offenbar ist nach (30) jede Menge sich selbst ähnlich.

33. Satz. Sind R, S ähnliche Mengen, so ist jede mit R ähnliche Menge Q auch mit S ähnlich.

Beweis. Denn sind φ, ψ solche bijektive Abbildungen von S, R, daß $\varphi(S) = R$, $\psi(R) = Q$ wird, so ist (nach 31) $\psi\varphi$ eine solche bijektive Abbildung von S, daß $\psi\varphi(S) = Q$ wird, w. z. b. w.

34. Erklärung. Man kann daher alle Mengen in Klassen einteilen, indem man in eine bestimmte Klasse alle und nur die Mengen Q, R, S ... aufnimmt, welche einer bestimmten Menge R, dem **Repräsentanten** der Klasse, ähnlich sind; nach dem vorhergehenden Satze (33) ändert sich die Klasse nicht, wenn irgendeine andere ihr angehörige Menge S als Repräsentant gewählt wird.

35. Satz. Sind R, S ähnliche Mengen, so ist jeder Teil von S auch einem Teile von R, jeder echte Teil von S auch einem echten Teile von R ähnlich.

Beweis. Denn wenn φ eine bijektive Abbildung von S, $\varphi(S) = R$, und $T \subset S$ ist, so ist nach (22) die mit T ähnliche Menge $\varphi(T) \subset R$; ist ferner T echter Teil von S, und s ein nicht in T enthaltenes Element von S, so kann das in R enthaltene Element $\varphi(s)$ nach (27) nicht in $\varphi(T)$ enthalten sein; mithin ist $\varphi(T)$ echter Teil von R, w. z. b. w.

§ 4 Abbildung einer Menge in sich selbst.

36. Erklärung. Ist φ eine bijektive oder nicht bijektive Abbildung einer Menge S, und $\varphi(S)$ Teil einer Menge Z, so nennen wir φ eine Abbildung von S in Z, und wir sagen, S werde durch φ in Z abgebildet. Wir nennen daher φ eine Abbildung der Menge S in **sich selbst,** wenn $\varphi(S) \subset S$ ist, und wir wollen in diesem Paragraphen die allgemeinen Gesetze einer solchen Abbildung φ untersuchen. Hierbei bedienen wir uns derselben Bezeichnungen wie in § 2, indem wir wieder $\varphi(s) = s'$, $\varphi(T) = T'$ setzen. Diese Bilder s', T' sind zufolge (22), (7) jetzt selbst wieder Elemente oder Teile von S, wie alle mit lateinischen Buchstaben bezeichneten Dinge.

37. Erklärung. K heißt eine **Kette**, wenn $K' \subset K$ ist. Wir bemerken ausdrücklich, daß dieser Name dem Teile K der Menge S nicht etwa an sich zukommt, sondern nur in Beziehung auf die bestimmte Abbildung φ erteilt wird; in bezug auf eine andere Abbildung der Menge S in sich selbst kann K sehr wohl keine Kette sein.

38. Satz. S ist eine Kette.

39. Satz. Das Bild K' einer Kette K ist eine Kette.

Beweis. Denn aus $K' \subset K$ folgt nach (22) auch $(K')' \subset K'$, w. z. b. w.

40. Satz. Ist A Teil einer Kette K, so ist auch $A' \subset K$.

Beweis. Denn aus $A \subset K$ folgt (nach 22) $A' \subset K'$, und da (nach 37) $K' \subset K$ ist, so folgt (nach 7) $A' \subset K$, w. z. b. w.

41. Satz. Ist das Bild A' Teil einer Kette L, so gibt es eine Kette K, welche den Bedingungen $A \subset K$, $K' \subset L$ genügt; und zwar ist $\cup(A, L)$ eine solche Kette K.

Beweis. Setzt man wirklich $K = \cup(A, L)$, so ist nach (9) die eine Bedingung $A \subset K$ erfüllt. Da nach (23) ferner $K' = \cup(A', L')$ und nach Annahme $A' \subset L$, $L' \subset L$ ist, so ist nach (10) auch die andere Bedingung $K' \subset L$ erfüllt, und hieraus folgt, weil (nach 9) $L \subset K$ ist, auch $K' \subset K$, d. h. K ist eine Kette, w. z. b. w.

42. Satz. Eine aus lauter Ketten $A, B, C \ldots$ zusammengesetzte Menge M ist eine Kette.

Beweis. Da (nach 23) $M' = \cup(A', B', C' \ldots)$ und nach Annahme $A' \subset A$, $B' \subset B$, $C' \subset C \ldots$ ist, so folgt (nach 12) $M' \subset M$, w. z. b. w.

43. Satz. Die Schnittmenge G von lauter Ketten $A, B, C \ldots$ ist eine Kette.

Beweis. Da G nach (17) Durchschnitt von $A, B, C \ldots$, also G' nach (22) Durchschnitt von $A', B', C' \ldots$ und nach Annahme $A' \subset A$, $B' \subset B$, $C' \subset C \ldots$ ist, so ist (nach 7) G' auch Durchschnitt von $A, B, C \ldots$ und folglich nach (18) auch Teil von G, w. z. b. w.

44. Erklärung. Ist A irgendein Teil von S, so wollen wir mit A_0 die Schnittmenge aller derjenigen Ketten (z. B. S) bezeichnen, von welcher A Teil ist; diese Schnittmenge A_0 existiert (vgl. 17), weil ja A selbst Durchschnitt aller dieser Ketten ist. Da ferner A_0 nach (43) eine Kette ist, so wollen wir A_0 die **Kette der Menge** A oder kurz die Kette von A nennen. Auch diese Erklärung bezieht sich durchaus auf die zugrunde liegende bestimmte Abbildung φ der Menge S in sich selbst, und wenn es später der Deutlichkeit wegen nötig wird, so wollen wir statt A_0 lieber das Zeichen $\varphi_0(A)$ setzen, und ebenso werden wir die einer anderen Abbildung ω entsprechende Kette von A mit $\omega_0(A)$ bezeichnen. Es gelten nun für diesen sehr wichtigen Begriff die folgenden Sätze.

45. Satz. Es ist $A \subset A_0$.

Beweis. Denn A ist Durchschnitt aller derjenigen Ketten, deren Schnittmenge A_0 ist, woraus der Satz nach (18) folgt.

46. Satz. Es ist $(A_0)' \subset A_0$. **Beweis.** Denn nach (44) ist A_0 eine Kette (37).

47. Satz. Ist A Teil einer Kette K, so ist auch $A_0 \subset K$.

Beweis. Denn A_0 ist die Schnittmenge und folglich auch ein Durchschnitt aller der Ketten K, von denen A Teil ist.

48. Bemerkung. Man überzeugt sich leicht, daß der in (44) erklärte Begriff der Kette A_0 durch die vorstehenden Sätze (45), (46), (47) vollständig charakterisiert ist.

49. Satz. Es ist $A' \subset (A_0)'$. Der Beweis folgt aus (45), (22).

50. Satz. Es ist $A' \subset A_0$. Der Beweis folgt aus (49), (46), (7).

51. Satz. Ist A eine Kette, so ist $A_0 = A$.

Beweis. Da A Teil der Kette A ist, so ist nach (47) auch $A_0 \subset A$, woraus nach (45), (5) der Satz folgt.

52. Satz. Ist $B \subset A$, so ist $B \subset A_0$. Der Beweis folgt aus (45), (7).

53. Satz. Ist $B \subset A_0$, so ist $B_0 \subset A_0$, und umgekehrt.

Beweis. Weil A_0 eine Kette ist, so folgt nach (47) aus $B \subset A_0$ auch $B_0 \subset A_0$; umgekehrt, wenn $B_0 \subset A_0$, so folgt nach (7) auch $B \subset A_0$, weil (nach 45) $B \subset B_0$ ist.

54. Satz. Ist $B \subset A$, so ist $B_0 \subset A_0$. Der Beweis folgt aus (52), (53).

55. Satz. Ist $B \subset A_0$, so ist auch $B' \subset A_0$.

Beweis. Denn nach (53) ist $B_0 \subset A_0$, und da (nach 50) $B' \subset B_0$ ist, so folgt der zu beweisende Satz aus (7). Dasselbe ergibt sich, wie leicht zu sehen, auch aus (22), (46), (7) oder auch aus (40).

56. Satz. Ist $B \subset A_0$, so ist $(B_0)' \subset (A_0)'$. Der Beweis folgt aus (53), (22).

57. Satz und Erklärung. Es ist $(A_0)' = (A')_0$, d. h. das Bild der Kette von A ist zugleich die Kette des Bildes von A. Man kann daher diese Menge kurz durch A'_0 bezeichnen und nach Belieben das **Kettenbild** oder die **Bildkette** von A nennen. Nach der deutlicheren in (44) angegebenen Bezeichnung würde der Satz durch $\varphi(\varphi_0(A)) = \varphi_0(\varphi(A))$ auszudrücken sein.

Beweis. Setzt man zur Abkürzung $(A')_0 = L$, so ist L eine Kette (44), und nach (45) ist $A' \subset L$, mithin gibt es nach (41) eine Kette K, welche den Bedingungen $A \subset K$, $K' \subset L$ genügt; hieraus folgt nach (47) auch $A_0 \subset K$, also $(A_0)' \subset K'$, und folglich nach (7) auch $(A_0)' \subset L$, d. h. $(A_0)' \subset (A')_0$.

Da nach (49) ferner $A' \subset (A_0)'$ und $(A_0)'$ nach (44), (39) eine Kette ist, so ist nach (47) auch $(A_0)' \subset (A_0)'$,
woraus in Verbindung mit dem obigen Ergebnis der zu beweisende Satz folgt (5).

58. Satz. Es ist $A_0 = \bigcup(A, A'_0)$, d. h. die Kette von A ist zusammengesetzt aus A und der Bildkette von A.

Beweis. Setzt man zur Abkürzung wieder $L = A'_0 = (A_0)' = (A')_0$ und $K = \bigcup(A, L)$, so ist (nach 45) $A' \subset L$, und da L eine Kette ist, so gilt nach (41) dasselbe von K; da ferner $A \subset K$ ist (9), so folgt nach (47) auch $A_0 \subset K$.
Andererseits, da (nach 45) $A \subset A_0$ und nach (46) auch $L \subset A_0$, so ist
nach (10) auch $K \subset A_0$,
woraus in Verbindung mit dem obigen Ergebnis der zu beweisende Satz $A_0 = K$ folgt (5).

59. Satz der vollständigen Induktion. Um zu beweisen, daß die Kette A_0 Teil irgendeiner Menge Σ ist — mag letztere Teil von S sein oder nicht —, genügt es zu zeigen,

ρ. daß $A \subset \Sigma$, und

σ. daß das Bild jedes gemeinsamen Elementes von A_0 und Σ ebenfalls Element von Σ ist.

Beweis. Denn wenn ρ wahr ist, so existiert nach (45) jedenfalls die Schnittmenge $G = \bigcap(A_0, \Sigma)$, und zwar ist (nach 18) $A \subset G$; da außerdem nach (17) $G \subset A_0$ ist, so ist G auch Teil unserer Menge S, welche durch φ in sich selbst abgebildet ist, und zugleich folgt nach (55) auch $G' \subset A_0$. Wenn nun σ ebenfalls wahr, d. h. wenn $G' \subset \Sigma$ ist, so muss G' als Durchschnitt der Mengen A_0, Σ nach (18) Teil ihrer Schnittmenge G sein, d. h. G ist eine Kette (37), und da, wie schon oben bemerkt, $A \subset G$ ist, so folgt nach (47) auch $A_0 \subset G$ und hieraus in Verbindung mit dem obigen Ergebnis $G = A_0$, also nach (17) auch $A_0 \subset \Sigma$, w. z. b. w.

60. Der vorstehende Satz bildet, wie sich später zeigen wird, die wissenschaftliche Grundlage für die unter dem Namen der **vollständigen Induktion** (des Schlusses von n auf $n + 1$) bekannten Beweis-art, und er kann auch auf folgende Weise ausgesprochen werden:

Um zu beweisen, daß alle Elemente der Kette A_0 eine gewisse Eigenschaft $\mathfrak{E}$ besitzen (oder daß ein Satz $\mathfrak{S}$, in welchem von einem unbestimmten Dinge n die Rede ist, wirklich für alle Elemente n der Kette A_0 gilt), genügt es zu zeigen,

ρ. daß alle Elemente a der Menge A die Eigenschaft $\mathfrak{E}$ besitzen (oder daß $\mathfrak{S}$ für alle a gilt), und

σ. daß dem Bilde n' jedes solchen Elementes n von A_0, welches die Eigenschaft $\mathfrak{E}$ besitzt, dieselbe Eigenschaft $\mathfrak{E}$ zukommt (oder daß der Satz $\mathfrak{S}$, sobald er für ein Element n von A_0 gilt, gewiss auch für dessen Bild n' gelten muss).

In der Tat, bezeichnet man mit Σ die Menge aller Dinge, welche die Eigenschaft $\mathfrak{E}$ besitzen (oder für welche der Satz $\mathfrak{S}$ gilt), so leuchtet die vollständige Übereinstimmung der jetzigen Ausdrucksweise des Satzes mit der in (59) gebrauchten unmittelbar ein.

61. Satz. Die Kette von $\cup(A,B,C\ldots)$ ist $\cup(A_0, B_0, C_0\ldots)$.

Beweis. Bezeichnet man mit M die erstere, mit K die letztere Menge, so ist K nach (42) eine Kette. Da nun jede der Mengen $A, B, C\ldots$ nach (45) Teil von einer der Mengen $A_0, B_0, C_0\ldots$ mithin (nach 12) $M \subset K$ ist, so folgt nach (47) auch

$M_0 \subset K.$

Andererseits, da nach (9) jede der Mengen $A, B, C\ldots$ Teil von $M,$ also nach (45), (7) auch Teil der Kette M_0 ist, so muss nach (47) auch jedes der Mengen $A_0, B_0, C_0\ldots,$ Teil von $M_0,$ mithin nach (10)

$K \subset M_0$

sein, woraus in Verbindung mit dem Obigen der zu beweisende $M_0 = K$ folgt (5).

62. Satz. Die Kette von $\cap(A, B, C\ldots)$ ist Teil von $\cap(A_0, B_0, C_0\ldots)$.

Beweis. Bezeichnet man mit G die erstere, mit K die letztere Menge, so ist K nach (43) eine Kette. Da nun jede der Mengen $A_0, B_0, C_0\ldots,$ nach (45) Obermenge von einer der Mengen $A, B, C\ldots,$ mithin (nach 20) $G \subset K$ ist, so folgt aus (47) der zu beweisende Satz $G_0 \subset K.$

63. Satz. Ist $K' \subset L \subset K,$ also K eine Kette, so ist auch L eine Kette. Ist dieselbe echter Teil von $K,$ und U die Menge aller derjenigen Elemente von $K,$ die nicht in L enthalten sind, ist ferner die Kette U_0 echter Teil von $K,$ und V die Menge aller derjenigen Elemente von $K,$ die nicht in U_0 enthalten sind, so ist $K = \cup(U_0, V)$ und $L = \cup(U'_0, V)$. Ist endlich $L = K',$ so ist $V \subset V'.$

Der Beweis dieses Satzes, von dem wir (wie von den beiden vorhergehenden) keinen Gebrauch machen werden, möge dem Leser überlassen bleiben.

§ 5 Das Endliche und Unendliche.

64. Erklärung [12]). Eine Menge S heißt **unendlich**, wenn es einem echten Teile seiner selbst ähnlich ist (32); im entgegengesetzten Falle heißt S eine **endliche** Menge.

65. Satz. Jede aus einem einzigen Elemente bestehende Menge ist endlich.

Beweis. Denn eine solche Menge besitzt gar keinen echten Teil (2), (6).

66. Satz. Es gibt unendliche Mengen.

Beweis [13]). Meine Gedankenwelt, d, h. die Gesamtheit S aller Dinge, welche Gegenstand meines Denkens sein können, ist unendlich. Denn wenn s ein Element von S bedeutet, so ist der Gedanke s', daß s Gegenstand meines Denkens sein kann, selbst ein Element von S. Sieht man dasselbe als Bild $\varphi(s)$ des Elementes s an, so hat daher die hierdurch bestimmte Abbildung φ von S die Eigenschaft, daß das Bild S' Teil von S ist; und zwar ist S' echter Teil von $S,$ weil es in S Elemente gibt (z. B. mein eigenes Ich), welche von jedem solchen Gedanken s' verschieden und deshalb nicht in S' enthalten sind. Endlich leuchtet ein, daß, wenn a, b verschiedene Elemente von S sind, auch ihre Bilder a', b' verschieden sind, daß also die Abbildung φ eine deutliche (bijektive) ist (26). Mithin ist S unendlich, w. z. b. w.

---

[12] Will man den Begriff ähnlicher Mengen (32) nicht benutzen, so muss man sagen: S heißt unendlich, wenn es einen echten Teil von S gibt (6), in welchem S sich deutlich (bijektiv) abbilden läßt (26, 36). In dieser Form habe ich die Definition des Unendlichen, welche den Kern meiner ganzen Untersuchung bildet, im September 1882 Herrn G. **Cantor** und schon mehrere Jahre früher auch den Herren **Schwarz** und **Weber** mitgeteilt. Alle anderen mir bekannten Versuche, das Unendliche vom Endlichen zu unterscheiden, scheinen mir so wenig gelungen zn sein, daß ich auf eine Kritik derselben verzichten zu dürfen glaube.

[13] Eine ähnliche Betrachtung findet sich in § 13 der Paradoxien des Unendlichen von Bolzano (Leipzig 1851).

67. Satz. Sind R, S ähnliche Mengen, so ist R endlich oder unendlich, je nachdem S endlich oder unendlich ist.

Beweis. Ist S unendlich, also ähnlich einem echten Teile S' seiner selbst, so muss, wenn R und S ähnlich sind, S' nach (33) ähnlich mit R und nach (35) zugleich ähnlich mit einem echten Teile von R sein, welcher mithin nach (33) selbst ähnlich mit R ist; also ist R unendlich, w. z. b. w.

68. Satz. Jede Menge S, welche einen unendlichen Teil T besitzt, ist ebenfalls unendlich; oder mit anderen Worten, jeder Teil einer endlichen Menge ist endlich.

Beweis. Ist T unendlich, gibt es also eine solche ähnliche Abbildung ψ von T, daß $\psi(T)$ ein echter Teil von T wird, so kann man, wenn T Teil von S ist, diese Abbildung ψ zu einer Abbildung φ von S erweitern, indem man, wenn s irgendein Element von S bedeutet, $\varphi(s) = \psi(s)$ oder $\varphi(s) = s$ setzt, je nachdem s Element von T ist oder nicht. Diese Abbildung φ ist eine bijektive; bedeuten nämlich a, b verschiedene Elemente von S, so ist, wenn sie zugleich in T enthalten sind, das Bild $\varphi(a) = \psi(a)$ verschieden von dem Bilde $\varphi(b) = \psi(b)$, weil ψ eine bijektive Abbildung ist; wenn ferner a in T, b nicht in T enthalten ist, so ist $\varphi(a) = \psi(a)$ verschieden von $\varphi(b) = \psi(b)$, weil $\psi(a)$ in T enthalten ist; wenn endlich weder a noch b in T enthalten ist, so ist ebenfalls $\varphi(a) = \mathrm{a}$ verschieden von $\varphi(b) = b$, was zu zeigen war. Da ferner $\psi(T)$ Teil von T, also nach (7) auch Teil von S ist, so leuchtet ein, daß auch $\varphi(S) \subset S$ ist. Da endlich $\psi(T)$ echter Teil von T ist, so gibt es in T, also auch in S ein Element t, welches nicht in $\psi(T) = \varphi(T)$ enthalten ist; da nun das Bild $\varphi(s)$ jedes nicht in T enthaltenen Elementes s selbst $= s$, also auch von t ver-schieden ist, so kann t überhaupt nicht in $\varphi(S)$ enthalten sein; mithin ist $\varphi(S)$ echter Teil von S, und folglich ist S unendlich, w. z. b. w.

69. Satz. Jede Menge, welche einem Teile einer endlichen Menge ähnlich ist, ist selbst endlich.

Der Beweis folgt aus (67), (68).

70. Satz. Ist a ein Element von S, und ist die Menge T aller von a verschiedenen Elemente von S endlich, so ist auch S endlich.

Beweis. Wir haben (nach 64) zu zeigen, daß, wenn φ irgendeine bijektive Abbildung von S in sich selbst bedeutet, das Bild $\varphi(S)$ oder S' niemals ein echter Teil von S, sondern immer $= S$ ist. Offenbar ist $S = \bigcup(a, T)$, und folglich nach (23), wenn die Bilder wieder durch Akzente bezeichnet werden, $S' = \bigcup(a', T')$, und wegen der Bijektivität der Abbildung φ ist a' nicht in T' enthalten (26). Da ferner nach Annahme $S' \subset S$ ist, so muss a' und ebenso jedes Element von T' entweder $= a$ oder Element von T sein. Wenn daher, – welchen Fall wir zunächst behandeln wollen –, a nicht in T' enthalten ist, so muss $T' \subset T$ und folglich $T' = T$ sein, weil φ eine bijektive Abbildung und weil T eine endliche Menge ist; und da a', wie bemerkt, nicht in T', d. h. nicht in T enthalten ist, so muss $a' = a$ sein, und folglich ist in diesem Falle wirklich $S' = S$, wie behauptet war. Im entgegengesetzten Falle, wenn a in T' enthalten und folglich das Bild b' eines in T enthaltenen Elementes b ist, wollen wir mit U die Menge aller derjenigen Elemente u von T bezeichnen, welche von b verschieden sind; dann ist $T = \bigcup(b, U)$ und (nach 15) $S = \bigcup(a, b, U)$, also $S' = \bigcup(a', a, U')$. Wir bestimmen nun eine neue Abbildung ψ von T, indem wir $\psi(b) = a'$ und allgemein $\psi(u) = u'$ setzen, wodurch (nach 23) $\psi(T) = \bigcup(a', U')$ wird. Offenbar ist ψ eine bijektive Abbildung, weil φ eine solche war, und weil a nicht in U, also auch a' nicht in U' enthalten ist. Da ferner a und jedes Element u verschieden von b ist, so muß (wegen der Bijektivität von φ) auch a' und jedes Element u' verschieden von a und folglich in T enthalten sein; mithin ist $\psi(T) \subset T$, und da T endlich ist, so muss $\psi(T) = T$, also $\bigcup(a', U') = T$ sein. Hieraus folgt aber (nach 15) $\bigcup(a', a, U') = \bigcup(a, T)$, d. h. nach dem Obigen $S' = S$.

Also ist auch in diesem Falle der erforderliche Beweis geführt.

§ 6 Abzählbar unendliche Mengen. Reihe der natürlichen Zahlen.

71. Erklärung. Eine Menge N heißt **abzählbar unendlich**, wenn es eine solche bijektive Abbildung φ von N in sich selbst gibt, daß N als Kette (44) eines Elementes erscheint, welches nicht in $\varphi(N)$ enthalten ist. Wir nennen dies Element, das wir im folgenden durch das Symbol 1 bezeichnen wollen, das **Grundelement** von N und sagen zugleich, die abzählbar unendliche Menge N sei durch diese Abbildung φ **geordnet**. Behalten wir die früheren bequemen Bezeichnungen für die Bilder und Ketten bei (§ 4), so besteht mithin das Wesen einer abzählbar unendlichen Menge N in der Existenz einer Abbildung φ von N und eines Elementes 1, die den folgenden Bedingungen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ genügen:

α. $N' \subset N$.
β. $N = 1_0$,
γ. Das Element 1 ist nicht in N' enthalten.
δ. Die Abbildung φ ist bijektiv.

Offenbar folgt aus α, γ, δ, daß jede abzählbar unendliche Menge N wirklich eine unendliche Menge ist (64), weil sie einem echten Teile N' ihrer selbst ähnlich ist.

72. Satz. In jeder unendlichen Menge S ist eine abzählbar unendliche Menge N als Teil enthalten.

Beweis. Es gibt nach (64) eine solche bijektive Abbildung φ von S, daß $\varphi(S)$ oder S' ein echter Teil von S wird; es gibt also ein Element 1 in S, welches nicht in S' enthalten ist. Die Kette $N = 1_0$, welche dieser Abbildung φ der Menge S in sich selbst entspricht (44), ist eine abzählbar unendliche, durch φ geordnete Menge; denn die charakteristischen Bedingungen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in (71) sind offenbar sämtlich erfüllt.

73. Erklärung. Wenn man bei der Betrachtung einer abzählbar unendlichen, durch eine Abbildung φ geordneten Menge N von der besonderen Beschaffenheit der Elemente gänzlich absieht, lediglich ihre Unterscheidbarkeit festhält und nur die Beziehungen auffasst, in die sie durch die ordnende Abbildung φ zueinander gesetzt sind, so heißen diese Elemente **natürliche Zahlen** oder **Ordinalzahlen** oder auch schlechthin Zahlen, und das Grundelement 1 heißt die **Grundzahl** der **Zahlenreihe** N. In Rücksicht auf diese Befreiung der Elemente von jedem anderen Inhalt (Abstraktion) kann man die Zahlen mit Recht eine freie Schöpfung des menschlichen Geistes nennen. Die Beziehungen oder Gesetze, welche ganz allein aus den Bedingungen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in (71) abgeleitet werden und deshalb in allen geordneten abzählbar unendlichen Mengen immer dieselben sind, wie auch die den einzelnen Elementen zufällig gegebenen Namen lauten mögen (vgl. 134), bilden den nächsten Gegenstand der **Wissenschaft von den Zahlen** oder der **Arithmetik**. Aus den allgemeinen Begriffen und Sätzen des § 4, über Abbildung einer Menge in sich selbst entnehmen wir zunächst unmittelbar die folgenden Grundsätze, wobei unter $a, b \ldots m, n \ldots$ stets Elemente von N, also Zahlen, unter $A, B, C \ldots$ Teile von N, unter $a', b' \ldots m', n' \ldots$ $A', B', C' \ldots$ die entsprechenden Bilder verstanden werden, welche durch die ordnende Abbildung φ erzeugt und stets wieder Elemente oder Teile von N sind; das Bild n' einer Zahl n wird auch die auf n **folgende** Zahl genannt.

74. Satz. Jede Zahl n ist nach (45) in ihrer Kette n_0 enthalten, und nach (53) ist die Bedingung $n \subset m_0$ gleichwertig mit $n_0 \subset m_0$.

75. Satz. Zufolge (57) ist $n'_0 = (n_0)' = (n')_0$.

76. Satz. Zufolge (46) ist $n'_0 \subset n_0$.

77. Satz. Zufolge (58) ist $n_0 = \cup(n, n'_0)$.

78. Satz. Es ist $N = \cup(1, N')$, also ist jede von der Grundzahl 1 verschiedene Zahl Element von N', d. h. Bild einer Zahl. Der Beweis folgt aus (77) und (71).

79. Satz. N ist die einzige Zahlenkette, in welcher die Grundzahl 1 enthalten ist.

Beweis. Denn wenn 1 Element einer Zahlenkette K ist, so ist nach (47) die zugehörige Kette $N \subset K$, folglich $N = K$, weil selbstverständlich $K \subset N$ ist.

80. Satz der vollständigen Induktion (Schluß von n auf n').

Um zu beweisen, daß ein Satz für alle Zahlen n einer Kette m_0 gilt, genügt es zu zeigen,

ρ. daß er für $n = m$ gilt, und

σ. daß aus der Gültigkeit des Satzes für eine Zahl n der Kette m_0 stets seine Gültigkeit auch für die folgende Zahl n' folgt.

Dies ergibt sich unmittelbar aus dem allgemeineren Satze (59) oder (60). Am häufigsten wird der Fall auftreten, wo $m = 1$, also m_0 die volle Zahlenreihe N ist.

§ 7 Größere und kleinere Zahlen.

81. Satz. Jede Zahl n ist verschieden von der auf sie folgenden Zahl n'.

Beweis durch vollständige Induktion (80). Denn

ρ. der Satz ist wahr für die Zahl $n = 1$, weil sie nicht in N' enthalten ist (71), während die folgende Zahl $1'$ als Bild der in N enthaltenen Zahl 1 Element von N' ist.

σ. Ist der Satz wahr für eine Zahl n, und setzt man die folgende Zahl $n' = p$, so ist n verschieden von p, woraus nach (26) wegen der Bijektivität (71) der ordnenden Abbildung φ folgt, daß n', also p verschieden von p' ist. Mithin gilt der Satz auch für die auf n folgende Zahl p, w. z. b. w.

82. Satz. In der Bildkette n'_0 einer Zahl n ist zwar (nach 74, 75) deren Bild n', nicht aber die Zahl n selbst enthalten.

Beweis durch vollständige Induktion (80). Denn

ρ. der Satz ist wahr für $n = 1$, weil $1'_0 = N'$, und weil nach (71) die Grundzahl 1 nicht in N' enthalten ist.

σ. Ist der Satz wahr für eine Zahl n, und setzt man wieder $n' = p$, so ist n nicht in p_0 enthalten, also verschieden von jeder in p_0 enthaltenen Zahl q, woraus wegen der Bijektivität von φ folgt, daß n', also p, verschieden von jeder in p'_0 enthaltenen Zahl q', also nicht in p'_0 enthalten ist. Mithin gilt der Satz auch für die auf n folgende Zahl p, w. z. b. w.

83. Satz. Die Bildkette n'_0 ist echter Teil der Kette n_0. Der Beweis folgt aus (76), (74), (82).

84. Satz. Aus $m_0 = n_0$ folgt $m = n$.

Beweis. Da (nach 74) m in m_0 enthalten, und $m_0 = n_0 = \cup(n, n'_0)$, ist (77), so müsste, wenn der Satz falsch, also m verschieden von n wäre, m in der Kette n'_0 enthalten, folglich nach (74) auch $m_0 \subset n'_0$, d. h. $n_0 \subset n'_0$ sein; da dies dem Satze (83) widerspricht, so ist unser Satz bewiesen.

85. Satz. Wenn die Zahl n nicht in der Zahlenkette K enthalten ist, so ist $K \subset n'_0$.

Beweis durch vollständige Induktion (80). Denn

ρ. der Satz ist nach (78) wahr für $n = 1$.

σ. Ist der Satz wahr für eine Zahl n, so gilt er auch für die folgende Zahl $p = n'$; denn wenn p in der Zahlenkette K nicht enthalten ist, so kann nach (40) auch n nicht in K enthalten sein, und folglich ist nach unserer Annahme $K \subset n'_0$; da nun (nach 77) $n'_0 = p_0 = \cup(p, p'_0)$, also $K \subset \cup(p, p'_0)$, und p nicht in K enthalten ist, so muss $K \subset p'_0$ sein, w. z. b. w.

86. Satz. Wenn die Zahl n nicht in der Zahlenkette K enthalten ist, wohl aber ihr Bild n', so ist $K = n'_0$.

Beweis. Da n nicht in K enthalten ist, so ist (nach 85) $K \subset n'_0$, und da $n' \subset K$, so ist nach (47) auch $n'_0 \subset K$, folglich $K = n'_0$, w. z. b. w.

87. Satz. In jeder Zahlenkette K gibt es eine und (nach 84) nur eine Zahl k, deren Kette $k_0 = K$ ist.

Beweis. Ist die Grundzahl 1 in K enthalten, so ist (nach 79) $K = N = 1_0$. Im entgegengesetzten Falle sei Z die Menge aller nicht in K enthaltenen Zahlen; da die Grundzahl 1 in Z enthalten, aber Z nur ein echter Teil der Zahlenreihe N ist, so kann (nach 79) Z keine Kette, d. h. Z' kann nicht Teil von Z sein; es gibt daher in Z eine Zahl n, deren Bild n' nicht in Z, also gewiss in K enthalten ist; da ferner n in Z, also nicht in K enthalten ist, so ist (nach 86) $K = n'_0$, also $k = n'$, w. z. b. w.

88. Satz. Sind m, n verschiedene Zahlen, so ist eine und (nach 83, 84) nur eine der Ketten m_0, n_0 echter Teil der anderen, und zwar ist entweder $n_0 \subset m'_0$ oder $m_0 \subset n'_0$.

Beweis. Ist n in m_0 enthalten, also nach (74) auch $n_0 \subset m_0$, so kann m nicht in der Kette n_0 enthalten sein (weil sonst nach (74) auch $m_0 \subset n_0$, also $m_0 = n_0$, mithin nach (84) auch $m = n$ wäre), und hieraus folgt nach (85), daß $n_0 \subset m'_0$ ist. Im entgegengesetzten Falle, wenn n nicht in der Kette m_0 enthalten ist, muss (nach 85) $m_0 \subset n'_0$ sein, w. z. b. w.

89. Erklärung. Die Zahl m heißt **kleiner** als die Zahl n, und zugleich heißt n **größer** als m, in Zeichen $m < n$ und $n > m$,
wenn die Bedingung

$$n_0 \subset m'_0$$

erfüllt ist, welche nach (74) auch durch

$$n \subset m'_0$$

ausgedrückt werden kann.

90. Satz. Sind m, n irgendwelche Zahlen, so findet immer einer und nur einer der folgenden Fälle λ, μ, ν statt:

λ. $m = n$, $n = m$, d. h. $m_0 = n_0$,

μ. $m < n$, $n > m$, d. h. $n_0 \subset m'_0$,

ν. $m > n$, $n < m$, d. h. $m_0 \subset n'_0$.

Beweis. Denn wenn λ stattfindet (84), so kann weder μ noch ν eintreten, weil nach (83) niemals $n_0 \subset n'_0$ ist. Wenn aber λ nicht stattfindet, so tritt nach (88) einer und nur einer der Fälle μ, ν ein, w. z. b. w.

91. Satz. Es ist $n < n'$.

Beweis. Denn die Bedingung für den Fall ν in (90) wird durch $m = n'$ erfüllt.

92. Erklärung. Um auszudrücken, daß m entweder $= n$ oder $< n$, also nicht $> n$ ist (90), bedient man sich der Bezeichnung

$$m \leq n \text{ oder auch } n \geq m,$$

und man sagt, m sei **höchstens gleich** n, und n sei **mindestens gleich** m.

93. Satz. Jede der Bedingungen

$m \leq n$, $m < n'$, $n_0 \subset m_0$ ist gleichwertig mit jeder der anderen.

Beweis. Denn wenn $m \leq n$, so folgt aus λ, μ in (90) immer $n_0 \subset m_0$, weil (nach 76) $m_0' \subset m_0$ ist. Umgekehrt, wenn $n_0 \subset m_0$, also nach (74) auch $n \subset m_0$ ist, so folgt aus $m_0 = \mathfrak{U}(m, m'_0)$, daß entweder $n = m$ oder $n \subset m'_0$, d. h. $n > m$ ist. Mithin ist die Bedingung $m \leq n$ gleichwertig mit $n_0 \subset m_0$. Außerdem folgt aus (22), (27), (75), daß diese Bedingung $n_0 \subset m_0$ wieder gleichwertig mit $n'_0 \subset m'_0$, d. h. (nach μ in 90) mit $m < n'$ ist, w. z. b. w.

94. Satz. Jede der Bedingungen $m' \leq n$, $m' < n'$, $m < n$ ist gleichwertig mit jeder der anderen.

Der Beweis folgt unmittelbar aus (93), wenn man dort m durch m' ersetzt, und aus μ in (90).

95. Satz. Wenn $l < m$ und $m \leq n$, oder wenn $l \leq m$ und $m < n$, so ist $l < n$. Wenn aber $l \leq m$ und $m \leq n$, so ist $l \leq n$.

Beweis. Denn aus den (nach 89, 93) entsprechenden Bedingungen $m_0 \subset l_0'$ und $n_0 \subset m_0$ folgt (nach 7) $n_0 \subset l_0'$, und dasselbe folgt auch aus den Bedingungen $m_0 \subset l_0$ und $n_0 \subset m'_0$, weil zufolge der ersteren auch $m'_0 \subset l_0'$ ist. Endlich folgt aus $m_0 \subset l_0$ und $n_0 \subset m_0$ auch $n_0 \subset l_0$. w. z. b. w.

96. Satz. In jedem Teile T von N gibt es eine und nur eine **kleinste** Zahl k, d. h. eine Zahl k, welche kleiner ist als jede andere in T enthaltene Zahl. Besteht T aus einer einzigen Zahl, so ist dieselbe auch die kleinste Zahl in T.

Beweis. Da T_0 eine Kette ist (44), so gibt es nach (87) eine Zahl k, deren Kette $k_0 = T_0$ ist. Da hieraus (nach 45, 77) $T \subset \mathfrak{U}(k, k'_0)$ folgt, so muss zunächst k selbst in T enthalten sein (weil sonst $T \subset k'_0$, also nach (47) auch $T_0 \subset k'_0$, d. h. $k_0 \subset k'_0$ wäre, was nach (83) unmöglich ist), und außerdem muss jede von k verschiedene Zahl der Menge T in k'_0 enthalten, d. h. $> k$ sein (89), woraus zugleich nach (90) folgt, daß es nur eine einzige kleinste Zahl in T gibt, w. z. b. w.

9**7. Satz.** Die kleinste Zahl der Kette n_0 ist n, und die Grundzahl 1 ist die kleinste aller Zahlen.

Beweis. Denn nach (74), (93) ist die Bedingung $m \subset n_0$ gleichwertig mit $m \geq n$. Oder es folgt unser Satz auch unmittelbar aus dem Beweise des vorhergehenden Satzes, weil, wenn daselbst $T = n_0$ angenommen wird, offenbar $k = n$ wird (51).

98. Erklärung. Ist n irgendeine Zahl, so wollen wir mit Z_n die Menge aller Zahlen bezeichnen, welche **nicht größer** als n, also **nicht** in n'_0 enthalten sind. Die Bedingung

$m \subset Z_n$

ist nach (92), (93) offenbar gleichwertig mit jeder der folgenden Bedingungen:

$m \leq n, \quad m < n', \quad n_0 \subset m_0.$

99. Satz. Es ist $1 \subset Z_n$ und $n \subset Z_n$.

Der Beweis folgt aus (98) oder auch aus (71) und (82).

100. Satz. Jede der nach (98) gleichwertigen Bedingungen

$m \subset Z_n, \quad m \leq n, \quad m < n', \quad n_0 \subset m_0$

ist auch gleichwertig mit der Bedingung

$Z_m \subset Z_n$.

Beweis. Denn wenn $m \subset Z_n$, also $m \leq n$, und wenn $l \subset Z_m$, also $l \leq m$, so ist nach (95) auch $l \leq n$, d. h. $l \subset Z_n$; wenn also $m \subset Z_n$, so ist jedes Element l der Menge Z_m, auch Element von Z_n, d. h. $Z_m \subset Z_n$. Umgekehrt, wenn $Z_m \subset Z_n$, so muss nach (7) auch $m \subset Z_n$ sein, weil (nach 99) $m \subset Z_m$, ist, w. z. b. w.

101. Satz. Die Bedingungen für die Fälle λ, μ, ν in (90) lassen sich auch in folgender Weise darstellen:

$\lambda. \quad m = n, \quad n = m, \quad Z_m = Z_n$

$\mu. \quad m < n, \quad n > m, \quad Z_{m'} \subset Z_n$

$\nu. \quad m > n, \quad n < m, \quad Z_{n'} \subset Z_m$

Der Beweis folgt unmittelbar aus (90), wenn man bedenkt, daß nach (100) die Bedingungen $n_0 \subset m_0$ und $Z_m \subset Z_n$ gleichwertig sind.

102. Satz. Es ist $Z_1 = 1$.

Beweis. Denn die Grundzahl 1 ist nach (99) in Z_1 enthalten, und jede von 1 verschiedene Zahl ist nach (78) in $1'_0$, also nach (98) nicht in Z_1 enthalten, w. z. b. w.

103. Satz. Zufolge (98) ist $N = \cup(Z_n, n'_0)$.

104. Satz. Es ist $n = \cap(Z_n, n_0)$, d. h. n ist das einzige gemeinsame Element der Mengen Z_n und n_0.

Beweis. Aus (99) und (74) folgt, daß n in Z_n und n_0 enthalten ist; aber jedes von n verschiedene Element der Kette n_0 ist nach (77) in n'_0, also nach (98) nicht in Z_n enthalten, w. z. b, w.

105. Satz. Zufolge (91), (98) ist die Zahl n' nicht in Z_n enthalten.

106. Satz. Ist $m < n$, so ist Z_m echter Teil von Z_n und umgekehrt.

Beweis. Wenn $m < n$, so ist (nach 100) $Z_m \subset Z_n$, und da die nach (99) in Z_n enthaltene Zahl n nach (98) nicht in Z_m enthalten sein kann, weil $n > m$ ist, so ist Z_m echter Teil von Z_n. Umgekehrt, wenn Z_m echter Teil von Z_n, so ist (nach 100) $m \leq n$, und da m nicht $= n$ sein kann, weil sonst auch $Z_m = Z_n$ wäre, so muss $m < n$ sein, w. z. b. w.

107. Satz. Z_n ist echter Teil von $Z_{n'}$.

Der Beweis folgt aus (106), weil (nach 91) $n < n'$ ist.

108. Satz. $Z_{n'} = \cup(Z_n, n')$.

Beweis. Denn jede in $Z_{n'}$ enthaltene Zahl ist (nach 98) $\leq n'$, also entweder $= n'$ oder $< n'$, und folglich nach (98) Element von Z_n; mithin ist gewiss $Z_{n'} \subset \cup(Z_n, n')$. Da umgekehrt (nach 107) $Z_n \subset Z_{n'}$ und (nach 99) $n' \subset Z_{n'}$ ist, so folgt (nach 10)

$\cup(Z_n, n') \subset Z_{n'}$

woraus sich unser Satz nach (5) ergibt.

109. Satz. Das Bild Z'_n der Menge Z_n ist echter Teil der Menge $Z_{n'}$.

Beweis. Denn jede in Z'_n enthaltene Zahl ist das Bild m' einer in Z_n enthaltenen Zahl m, und da $m \leq n$, also (nach 94) $m' \leq n'$, so folgt (nach 98) $Z'_n \subset Z_{n'}$. Da ferner die Zahl 1 nach (99) in $Z_{n'}$, aber nach (71) nicht in dem Bilde Z'_n enthalten sein kann, so ist Z'_n echter Teil von $Z_{n'}$, w. z. b. w.

110. Satz. $Z_{n'} = \cup(1, Z'_n)$.

Beweis. Jede von 1 verschiedene Zahl der Menge $Z_{n'}$ ist nach (78) das Bild m' einer Zahl m, und diese muss $\leq n$, also nach (98) in Z_n enthalten sein (weil sonst $m > n$, also nach (94) auch $m' > n'$, mithin m' nach (98) nicht in $Z_{n'}$, enthalten wäre); aus $m \subset Z_n$ folgt aber $m' \subset Z'_n$, und folglich ist gewiss

$$Z_{n'} \subset \cup(1, Z'_n).$$

Da umgekehrt (nach 99) $1 \subset Z_n$ und (nach 109) $Z'_n \subset Z_{n'}$, so folgt (nach 10)

$$\cup(1, Z'_n) \subset Z_{n'},$$

und hieraus ergibt sich unser Satz nach (5).

111. Erklärung. Wenn es in einer Menge E von Zahlen ein Element g gibt, welches größer als jede andere in E enthaltene Zahl ist, so heißt g die **größte** Zahl der Menge E, und offenbar kann es nach (90) nur eine solche größte Zahl in E geben. Besteht eine Menge aus einer einzigen Zahl, so ist diese selbst die größte Zahl der Menge.

112. Satz. Zufolge (98) ist n die größte Zahl der Menge Z_n.

113. Satz. Gibt es in E eine größte Zahl g, so ist $E \subset Z_g$.

Beweis. Denn jede in E enthaltene Zahl ist $\leq g$, mithin nach (98) in Z_g enthalten, w. z. b. w.

114. Satz. Ist E Teil einer Menge Z_n, oder gibt es, was dasselbe sagt, eine Zahl n von der Art, daß alle in E enthaltenen Zahlen $\leq n$ sind, so besitzt E eine größte Zahl g.

Beweis. Die Menge aller Zahlen p, welche der Bedingung $E \subset Z_p$ genügen − und nach unserer Annahme gibt es solche −, ist eine Kette (37), weil nach (107), (7) auch $E \subset Z_{p'}$ folgt, und ist daher (nach 87) $= g_0$, wo g die kleinste dieser Zahlen bedeutet (96, 97). Es ist daher auch $E \subset Z_g$, folglich (98) ist jede in E enthaltene Zahl $\leq g$, und wir haben nur noch zu zeigen, daß die Zahl g selbst in E enthalten ist. Dies leuchtet unmittelbar ein, wenn $g = 1$ ist, weil dann (nach 102) Z_g und folglich auch E aus der einzigen Zahl 1 besteht. Ist aber g von 1 verschieden und folglich nach (78) das Bild f' einer Zahl f, so ist (nach 108) $E \subset \cup(Z_f, g)$; wäre nun g nicht in E enthalten, so müsste $E \subset Z_f$ sein, und es gäbe daher unter den Zahlen p eine Zahl f, welche (nach 91) $< g$ ist, was dem Obigen widerspricht; mithin ist g in E enthalten, w. z. b. w.

115. Erklärung. Ist $l < m$ und $m < n$, so sagen wir, die Zahl m **liege zwischen** l und n (auch zwischen n und l).

116. Satz. Es gibt keine Zahl, die zwischen n und n' liegt.

Beweis. Denn sobald $m < n'$, also (nach 93) $m \leq n$ ist, so kann nach (90) nicht $n < m$ sein, w. z. b. w.

117. Satz. Ist t eine Zahl in T, aber nicht die kleinste (96), so gibt es in T eine und nur eine **nächst kleinere** Zahl s, d. h. eine Zahl s von der Art, daß $s < t$, und daß es in T keine zwischen s und t liegende Zahl gibt. Ebenso gibt es, wenn nicht etwa t die größte Zahl in T ist (111), in T immer eine und nur eine **nächst größere** Zahl u, d. h. eine Zahl u von der Art, daß $i < u$, und daß es in T keine zwischen t und u liegende Zahl gibt. Zugleich ist t in T nächst größer als s und nächst kleiner als u.

Beweis. Wenn t nicht die kleinste Zahl in T ist, so sei E die Menge aller derjenigen Zahlen von T, welche $< t$ sind; dann ist (nach 98) $E \subset Z_t$, und folglich (114) gibt es in E eine größte Zahl s, welche offenbar die im Satze angegebenen Eigenschaften besitzt und auch die einzige solche Zahl ist. Wenn ferner t nicht die größte Zahl in T ist, so gibt es nach (96) unter allen den Zahlen von T, welche $> t$ sind, gewiß eine kleinste u, welche, und zwar allein, die im Satze angegebenen Eigenschaften besitzt. Ebenso leuchtet die Richtigkeit der Schlußbemerkung des Satzes ein.

118. Satz. In N ist die Zahl n' nächst größer als n, und n nächst kleiner. als n'.

Der Beweis folgt aus (116), (117).

§ 8 Endliche und unendliche Teile der Zahlenreihe.

119. Satz. Jede Menge Z_n in (98) ist endlich.

Beweis durch vollständige Induktion (80). Denn

ρ. der Satz ist wahr für $n = 1$ zufolge (65), (102).

σ. Ist Z_n endlich, so folgt aus (108) und (70), daß auch $Z_{n'}$ endlich ist, w. z. b. w.

120. Satz. Sind m, n verschiedene Zahlen, so sind Z_m, Z_n unähnliche Mengen.

Beweis. Der Symmetrie wegen dürfen wir nach (90) annehmen, es sei $m < n$; dann ist Z_m nach (106) echter Teil von Z_n, und da Z_n nach (119) endlich ist, so können (nach 64) Z_m und Z_n nicht ähnlich sein, w. z. b. w.

121. Satz. Jeder Teil E der Zahlenreihe N, welcher eine größte Zahl besitzt (111), ist endlich.

Der Beweis folgt aus (113), (119), (68).

122. Satz. Jeder Teil U der Zahlenreihe N, welcher keine größte Zahl besitzt, ist abzählbar unendlich (71).

Beweis. Ist u irgendeine Zahl in U, so gibt es nach (117) in U eine und nur eine nächst größere Zahl als u, die wir mit $\psi(u)$ bezeichnen und als Bild von u ansehen wollen. Die hierdurch vollständig bestimmte Abbildung ψ der Menge U hat offenbar die Eigenschaft

α. $\psi(U) \subset U$,

d. h. U wird durch ψ in sich selbst abgebildet. Sind ferner u, v verschiedene Zahlen in U, so dürfen wir der Symmetrie wegen nach (90) annehmen, es sei $u < v$; dann folgt nach (117) aus der Definition von ψ, daß $\psi(u) \leq v$ und $v < \psi(v)$, also (nach 95) $\psi(u) < \psi(v)$ ist; mithin sind nach (90) die Bilder $\psi(u), \psi(v)$ verschieden, d. h.

δ. die Abbildung ψ ist bijektiv.

Bedeutet ferner u_1 die kleinste Zahl (96) der Menge U, so ist jede in U enthaltene Zahl $u \geq u_1$, und da allgemein $u < \psi(u)$, so ist (nach 95) $u_1 < \psi(u)$, also ist u_1 nach (90) verschieden von $\psi(u)$, d. h.

γ. das Element u_1 von U ist nicht in $\psi(U)$ enthalten.

Mithin ist $\psi(U)$ ein echter Teil von U und folglich ist U nach (64) eine unendliche Menge. Bezeichnen wir nun in Übereinstimmung mit (44), wenn V irgendein Teil von U ist, mit $\psi_0(V)$ die der Abbildung ψ entsprechende Kette von V, so wollen wir endlich noch zeigen, daß

β. $U = \psi_0(u_1)$

ist. In der Tat, da jede solche Kette $\psi_0(V)$ zufolge ihrer Definition (44) ein Teil der durch ψ in sich selbst abgebildeten Menge U ist, so ist selbstverständlich $\psi_0(u_1) \subset U$; umgekehrt leuchtet aus (45) zunächst ein, daß das in U enthaltene Element u_1 gewiß in $\psi_0(u_1)$ enthalten ist; nehmen wir aber an, es gäbe Elemente von U, die nicht in $\psi_0(u_1)$ enthalten sind, so muss es unter ihnen nach (96) eine kleinste Zahl w geben, und da dieselbe nach dem eben Gesagten verschieden von der kleinsten Zahl u_1 der Menge U ist, so muss es nach (117) in U auch eine Zahl v geben, welche nächst kleiner als w ist, woraus zugleich folgt, daß $w = \psi(v)$ ist; da nun $v < w$, so muss v zufolge der Definition von w gewiss in $\psi_0(u_1)$ enthalten sein; hieraus folgt aber nach (55), daß auch $\psi(v)$, also w in $\psi_0(u_1)$ enthalten sein muss, und da dies im Widerspruch mit der Definition von w steht, so ist unsere obige Annahme unzulässig; mithin ist $U \subset \psi_0(u_1)$ und folglich auch $U = \psi_0(u_1)$, wie behauptet war. Aus $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ geht nun nach (71) hervor, daß U eine durch ψ geordnete abzählbar unendliche Menge ist, w. z. b. W.

123. Satz. Zufolge (121), (122) ist irgendein Teil T der Zahlenreihe N endlich oder abzählbar unendlich, je nachdem es in T eine größte Zahl gibt oder nicht gibt.

§ 9 Definition einer Abbildung der Zahlenreihe durch Induktion.

124. Wir bezeichnen auch im folgenden mit kleinen lateinischen Buchstaben Zahlen und behalten überhaupt alle Bezeichnungen der vorhergehenden § 6 bis 8 bei, während Ω eine beliebige Menge bedeutet, deren Elemente nicht notwendig in N enthalten zu sein brauchen.

125. Satz. Ist eine beliebige (bijektive oder nicht bijektive) Abbildung θ einer Menge Ω in sich selbst, und außerdem ein bestimmtes Element ω in Ω gegeben, so entspricht jeder Zahl n eine und nur eine Abbildung ψ_n der zugehörigen, in (98) erklärten Zahlenmenge Z_n, welche den Bedingungen [14])

I. $\psi_n(Z_n) \subset \Omega$,

II. $\psi_n(1) = \omega$,

III. $\psi_n(t') = \theta\psi_n(t)$, wenn $t < n$, genügt, wo das Zeichen $\theta\psi_n$ die in (25) angegebene Bedeutung hat.

Beweis durch vollständige Induktion (80). Denn

ρ. der Satz ist wahr für $n = 1$. In diesem Falle besteht nämlich nach (102) die Menge Z_n aus der einzigen Zahl 1, und die Abbildung ψ_1 ist daher schon durch II vollständig und so definiert, daß I erfüllt ist, während III gänzlich wegfällt.

σ. Ist der Satz wahr für eine Zahl n, so zeigen wir, daß er auch für die folgende Zahl $p = n'$ gilt, und zwar beginnen wir mit dem Nachweise, daß es nur eine einzige entsprechende Abbildung ψ_p der Menge Z_p geben kann. In der Tat, genügt eine Abbildung ψ_p den Bedingungen

I'. $\psi_p(Z_p) \subset \Omega$,

II'. $\psi_p(1) = \omega$,

III'. $\psi_p(m') = \theta\psi_p(m)$, wenn $m < p$, so ist in ihr nach (21), weil $Z_n \subset Z_p$ ist (107), auch eine Abbildung von Z_n enthalten, welche offenbar denselben Bedingungen I, II, III genügt wie ψ_n und folglich mit ψ_n gänzlich übereinstimmt; für alle in Z_n enthaltenen, also (98) für alle Zahlen m, die $< p$, d. h. $\leq n$ sind, muss daher

(m). $\psi_p(m) = \psi_n(m)$

sein, woraus als besonderer Fall auch

(n). $\psi_p(n) = \psi_n(n)$

folgt; da ferner p nach (105), (108) die einzige nicht in Z_n enthaltene Zahl der Menge Z_p ist, und da nach III' und (n) auch

(p). $\psi_p(p) = \theta\psi_n(n)$

sein muss, so ergibt sich die Richtigkeit unserer obigen Behauptung, daß es nur eine einzige, den Bedingungen I', II', III' genügende Abbildung ψ_p der Menge Z_p geben kann, weil ψ_p durch die eben abgeleiteten Bedingungen (m) und (p) vollständig auf ψ_n zurückgeführt ist. Wir haben nun zu zeigen, daß umgekehrt diese durch (m) und (p) vollständig bestimmte Abbildung ψ_p der Menge Z_p wirklich den Bedingungen I', II', III′ genügt. Offenbar ergibt sich I' aus (m) und (p) mit Rücksicht auf I und darauf, daß $\theta(\Omega) \subset \Omega$ ist. Ebenso folgt II' aus (m) und II, weil die Zahl 1 nach (99) in Z_n enthalten ist. Die Richtigkeit von III' folgt zunächst für diejenigen Zahlen m, welche $< n$ sind, aus (m) und III, und für die einzige noch übrige Zahl $m = n$ ergibt sie sich aus (p) und (n). Hiermit ist vollständig dargetan, daß aus der Gültigkeit unseres Satzes für die Zahl n immer auch seine Gültigkeit für die folgende Zahl p folgt, w. z. b. w.

---

[14] Der Deutlichkeit wegen habe ich hier und im folgenden Satze 126 die Bedingung I besonders angeführt, obwohl sie eigentlich schon eine Folge von II und III ist.

126. Satz der Definition durch Induktion. Ist eine beliebige (bijektive oder nicht bijektive) Abbildung θ einer Menge Ω in sich selbst und außerdem ein bestimmtes Element ω in Ω gegeben, so gibt es eine und nur eine Abbildung ψ der Zahlenreihe N, welche den Bedingungen

I. $\psi(N) \subset \Omega$,

II. $\psi(1) = \omega$,

III. $\psi(n') = \theta\,\psi(n)$

genügt, wo n jede Zahl bedeutet.

Beweis. Da, wenn es wirklich eine solche Abbildung ψ gibt, in ihr nach (21) auch eine Abbildung ψ_n der Menge Z_n enthalten ist, welche den in (125) angegebenen Bedingungen I, II, III genügt, so muss, weil es stets eine und nur eine solche Abbildung ψ_n gibt, notwendig

(n). $\psi(n) = \psi_n(n)$

sein. Da hierdurch ψ vollständig bestimmt ist, so folgt, daß es auch nur eine einzige solche Abbildung ψ geben kann (vgl. den Schluß von 130). Daß umgekehrt die durch (n) be-stimmte Abbildung ψ auch unseren Bedingungen I, II, III genügt, folgt mit Leichtigkeit aus (n) unter Berücksichtigung der in (125) bewiesenen Eigenschaften I, II und (p), w. z. b. w.

127. Satz. Unter den im vorhergehenden Satze gemachten Voraussetzungen ist

$\psi(T') = \theta\,\psi(T)$,

wo T irgendeinen Teil der Zahlenreihe N bedeutet.

Beweis. Denn wenn t jede Zahl der Menge T bedeutet, so besteht $\psi(T')$ aus allen Elementen $\psi(t')$, und $\theta\,\psi(T)$ aus allen Elementen $\theta\,\psi(t)$ hieraus folgt unser Satz, weil (nach III in 126) $\psi(t') = \theta\,\psi(t)$ ist.

128. Satz. Behält man dieselben Voraussetzungen bei und bezeichnet man mit θ_0 die Ketten (44), welche der Abbildung θ der Menge Ω in sich selbst entsprechen, so ist

$\psi(N) = \theta_0(\omega)$.

Beweis. Wir zeigen zunächst durch vollständige Induktion (80), daß

$\psi(\mathrm{N}) \subset \theta_0(\omega)$, d. h. daß jedes Bild $\psi(n)$ auch Element von $\theta_0(\omega)$ ist. In der Tat,

ρ. dieser Satz ist wahr für $n = 1$, weil (nach 126. II) $\psi(1) = \omega$, und weil (nach 45) $\omega \subset \theta_0(\omega)$ ist.

σ. Ist der Satz wahr für eine Zahl n, ist also $\psi(n) \subset \theta_0(\omega)$, so ist nach (55) auch $\theta(\psi(n)) \subset \theta_0(\omega)$, d. h. (nach 126. III) $\psi(n') \subset \theta_0(\omega)$, also gilt der Satz auch für die folgende Zahl n', w. z. b. w.

Um ferner zu beweisen, daß jedes Element v der Kette $\theta_0(\omega)$ in $\psi(N)$ enthalten, daß also

$\theta_0(\omega) \subset \psi(N)$

ist, wenden wir ebenfalls die vollständige Induktion, nämlich den auf Ω und die Abbildung θ übertragenen Satz (59) an. In der Tat,

ρ. das Element ω ist $= \psi(1)$, also in $\omega(N)$ enthalten.

σ. Ist v ein gemeinsames Element der Kette $\theta_0(\omega)$ und der Menge $\psi(N)$, so ist $v = \psi(n)$, wo n eine Zahl bedeutet, und hieraus folgt (nach 126. III) $\theta(v) = \theta\,\psi(n) = \psi(n')$, mithin ist auch $\theta(v)$ in $\psi(N)$ enthalten, w. z. b. w.

Aus den bewiesenen Sätzen $\psi(N) \subset \theta_0(\omega)$ und $\theta_0(\omega) \subset \psi(N)$ folgt (nach 5) $\psi(N) = \theta_0(\omega)$, w. z. b. w.

129. Satz. Unter denselben Voraussetzungen ist allgemein $\psi(n_0) = \theta_0(\psi(n))$.

Beweis durch vollständige Induktion (80). Denn

ρ. der Satz gilt zufolge (128) für $n = 1$, weil $1_0 = N$ und $\psi(1) = \omega$ ist.

σ. Ist der Satz wahr für eine Zahl n, so folgt

$$\theta(\psi(n_0)) = \theta(\theta_0(\psi(n)));$$

da nun nach (127), (75)

$$\theta(\psi(n_0)) = \psi(n'_0)$$

und nach (57), (126. III)

$$\theta(\theta_0(\psi(n))) = \theta_0(\theta(\psi(n))) = \theta_0(\psi(n'))$$

ist, so ergibt sich

$$\psi(n_0') = \theta_0(\psi(n')),$$

d. h. der Satz gilt auch für die auf n folgende Zahl n', w. z. b. w.

130. Bemerkung. Bevor wir zu den wichtigsten Anwendungen des in (126) bewiesenen Satzes der Definition durch Induktion übergehen (§ 10 bis 14), verlohnt es sich der Mühe, auf einen Umstand aufmerksam zu machen, durch welchen sich derselbe von dem in (80), oder vielmehr schon in (59), (60) bewiesenen Satze der Demonstration durch Induktion wesentlich unterscheidet, so nahe auch die Verwandtschaft zwischen jenem und diesem zu sein scheint. Während nämlich der Satz (59) ganz allgemein für jede Kette A_0 gilt, wo A irgendein Teil einer durch eine beliebige Abbildung φ in sich selbst abgebildeten Menge S ist (§ 4), so verhält es sich ganz anders mit dem Satze 126, welcher nur die Existenz einer widerspruchsfreien (oder eindeutigen) Abbildung ψ der abzählbar unendlichen Menge 1_0 behauptet. Wollte man in dem letzteren Satze (unter Beibehaltung der Voraussetzungen über Ω und θ) an Stelle der Zahlenreihe 1_0 eine beliebige Kette A_0 aus einer solchen Menge S setzen, und etwa eine Abbildung ψ von A_0 in Ω, auf ähnliche Weise wie in (126. II, III) dadurch definieren, daß

ρ. jedem Element a von A ein bestimmtes aus Ω, gewähltes Element $\psi(a)$ entsprechen, und

σ. daß für jedes in A_0 enthaltene Element n und dessen Bild $n' = \varphi(n)$ die Bedingung $\psi(n') = \theta\,\psi(n)$ gelten soll,

so würde sehr häufig der Fall eintreten, daß es eine solche Abbildung ψ gar nicht gibt, weil diese Bedingungen ρ, σ selbst dann noch in Widerspruch miteinander geraten können, wenn man auch die in ρ enthaltene Wahlfreiheit von vornherein der Bedingung σ gemäß beschränkt. Ein Beispiel wird genügen, um sich hiervon zu überzeugen.

Ist die aus den verschiedenen Elementen a und b bestehende Menge S durch φ so in sich selbst abgebildet, daß $a' = b$, $b' = a$ wird, so ist offenbar $a_0 = b_0 = S;$ es sei ferner die aus den verschiedenen Elementen α, β und γ bestehende Menge Ω durch θ so in sich selbst abgebildet, daß $\theta(\alpha) = \beta$, $\theta(\beta) = \gamma$, $\theta(\gamma) = \alpha$ wird; verlangt man nun eine solche Abbildung ψ von a_0 in Ω, daß $\psi(a) = a$ und außerdem für jedes in a_0 enthaltene Element n immer $\psi(n') = \theta\,\psi(n)$ wird, so stößt man auf einen Widerspruch; denn für $n = a$ ergibt sich $\psi(b) = \theta(a) = \beta$, und hieraus folgt für $n = b$, daß $\psi(\alpha) = \theta(\beta) = \gamma$ sein müßte, während doch $\psi(a) = \alpha$ war.

Gibt es aber eine Abbildung ψ von A_0 in Ω, welche den obigen Bedingungen ρ, σ ohne Widerspruch genügt, so folgt aus (60) leicht, daß sie vollständig bestimmt ist; denn wenn die Abbildung χ denselben Bedingungen genügt, so ist allgemein $\chi(n) = \psi(n)$, weil dieser Satz zufolge ρ für alle in A enthaltenen Elemente $n = a$ gilt, und weil er, wenn er für ein Element n von A_0 gilt, zufolge σ auch für dessen Bild n' gelten muss.

131. Um die Tragweite unseres Satzes (126) ins Licht zu setzen, wollen wir hier eine Betrachtung einfügen, die auch für andere Untersuchungen, z. B. für die sogenannte Gruppentheorie, nützlich ist.

Wir betrachten eine Menge Ω, dessen Elemente eine gewisse Verbindung gestatten in der Art, daß aus einem Element v durch Einwirkung eines Elementes ω immer wieder ein bestimmtes Element der-selben Menge Ω entspringt, welches mit $\omega \cdot v$ oder $\omega\, v$ bezeichnet werden mag und im allgemeinen von $v\, \omega$ zu unterscheiden ist. Man kann dies auch so auffassen, daß jedem bestimmten Element ω eine bestimmte, etwa durch $\tilde{\omega}$ zu bezeichnende Abbildung der Menge Ω in sich selbst entspricht, insofern jedes Element v das bestimmte Bild $\tilde{\omega}(v) = \omega\, v$ liefert. Wendet man auf diese Menge Ω und dessen Element ω den Satz (126) an, indem man zugleich die dort mit θ bezeichnete Abbildung durch $\tilde{\omega}$ ersetzt, so entspricht jeder Zahl n ein bestimmtes, in Ω enthaltenes Element $\psi(n)$, das jetzt durch das Symbol ω^n bezeichnet werden mag und bisweilen die n-te Potenz von ω genannt wird; dieser Begriff ist vollständig erklärt durch die ihm auferlegten Bedingungen

II. $\omega^1 = \omega$,

III. $\omega^{n'} = \omega\, \omega^n$,

und seine Existenz ist durch den Beweis des Satzes (126) gesichert.

Ist die obige Verbindung der Elemente außerdem so beschaffen, daß für beliebige Elemente μ, ν, ω stets $\omega(\nu\mu) = (\omega\,\nu)\mu$ ist, so gelten auch die Sätze

$$\omega^{n'} = \omega^n\, \omega, \quad \omega^m\, \omega^n = \omega^n\, \omega^m,$$

deren Beweise leicht durch vollständige Induktion (80) zu führen sind und dem Leser überlassen bleiben mögen.

Die vorstehende allgemeine Betrachtung lässt sich unmittelbar auf folgendes Beispiel anwenden. Ist S eine Menge von beliebigen Elementen, und Ω die zugehörige Menge, deren Elemente die sämtlichen Abbildungen ν von S in sich selbst sind (36), so lassen diese Elemente sich nach (25) immer zusammensetzen, weil $\nu(S) \subset S$ ist, und die aus solchen Abbildungen ν und ω zusammengesetzte Abbildung $\omega\,\nu$ ist selbst wieder Element von Ω. Dann sind auch alle Elemente ω^n Abbildungen von S in sich selbst, und man sagt, sie entstehen durch Wiederholung der Abbildung ω. Wir wollen nun einen einfachen Zusammenhang hervorheben, der zwischen diesem Begriffe und dem in (44) erklärten Begriffe der Kette $\omega_0(A)$ besteht, wo A wieder irgendeinen Teil von S bedeutet. Bezeichnet man der Kürze halber das durch die Abbildung ω^n erzeugte Bild $\omega^n(A)$ mit A_n, so folgt aus III, (25), daß $\omega(A_n) = A_{n'}$ ist. Hieraus ergibt sich leicht durch vollständige Induktion (80), daß alle diese Mengen A_n Teile der Kette $\omega_0(A)$ sind; denn

ρ. diese Behauptung gilt zufolge (50) für $n = 1$, und

σ. wenn sie für eine Zahl n gilt, so folgt aus (55) und aus $A_{n'} = \omega(A_n)$, daß sie auch für die folgende n' gilt, w. z. b. w.

Da ferner nach (45) auch $A \subset \omega_0(A)$ ist, so ergibt sich aus (10), daß auch das aus A und aus allen Bildern A_n zusammengesetzte Menge K Teil von $\omega_0(A)$ ist. Umgekehrt, da (nach 23) $\omega(K)$ aus $\omega(A) = A_1$ und aus allen Mengen $\omega(A_n) = A_{n'}$ also (nach 78) aus allen Mengen A_n zusammengesetzt ist, welche nach (9) Teile von K sind, so ist (nach 10) $\omega(K) \subset K$, d.h. K ist eine Kette (37), und da (nach 9) $A \subset K$ ist, so folgt nach (47), daß auch $\omega_0(A) \subset K$ ist. Mithin ist $\omega_0(A) = K$, d. h. es besteht folgender Satz: Ist ω eine Abbildung einer Menge S in sich selbst, und A irgendein Teil von S, so ist die der Abbildung ω entsprechende Kette von A zusammengesetzt aus A und allen durch Wiederholung von ω entstehenden Bildern $\omega^n(A)$. Wir empfehlen dem Leser, mit dieser Auffassung einer Kette zu den früheren Sätzen (57), (58) zurückzukehren.

§ 10 Die Klasse der abzählbar unendlichen Mengen.

132. Satz. Alle abzählbar unendlichen Mengen sind der Zahlenreihe N und folglich (nach 33) auch einander ähnlich.

Beweis. Es sei die abzählbar unendliche Menge Ω durch die Abbildung θ geordnet (71), und es sei ω das hierbei auftretende Grundelement von Ω; bezeichnen wir mit θ_0 wieder die der Abbildung θ entsprechenden Ketten (44), so gilt nach (71) folgendes:

α. $\theta(\Omega) \subset \Omega$.

β. $\Omega = \theta_0(\omega)$.

γ. ω ist nicht in $\theta(\Omega)$ enthalten.

δ. Die Abbildung θ ist bijektiv.

Bedeutet nun ψ die in (126) definierte Abbildung der Zahlenreihe N, so folgt aus β und (128) zunächst $\psi(N) = \Omega$,

und wir haben daher nach (32) nur noch zu zeigen, daß ψ eine bijektive Abbildung ist, d. h. (26) daß verschiedenen Zahlen m, n auch verschiedene Bilder $\psi(m), \psi(n)$ entsprechen. Der Symmetrie wegen dürfen wir nach (90) annehmen, es sei $m > n$, also $m \subset n'_0$, und der zu beweisende Satz kommt darauf hinaus, daß $\psi(n)$ nicht in $\psi(n_0')$, also (nach 127) nicht in $\theta\psi(n_0)$ enthalten ist. Dies beweisen wir für jede Zahl n durch vollständige Induktion (80). In der Tat,

ρ. dieser Satz gilt nach γ für $n = 1$, weil $\psi(1) = \omega$ und $\psi(1_0) = \psi(N) = \Omega$ ist.

σ. Ist der Satz wahr für eine Zahl n, so gilt er auch für die folgende Zahl n'; denn wäre $\psi(n')$, d. h. $\theta\psi(n)$ in $\theta\psi(n'_0)$ enthalten, so müsste (nach δ und 27) auch $\psi(n)$ in $\psi(n'_0)$ enthalten sein, während unsere Annahme gerade das Gegenteil besagt, w.z.b.w.

133. Satz. Jede Menge, welche einer abzählbar unendlichen Menge und folglich (nach 132, 33) auch der Zahlenreihe N ähnlich ist, ist abzählbar unendlich.

Beweis. Ist Ω eine der Zahlenreihe N ähnliche Menge, so gibt es nach (32) eine solche bijektive Abbildung ψ von N, daß

I. $\psi(N) = \Omega$

wird, dann setzen wir

II. $\psi(1) = \omega$.

Bezeichnet man nach (26) mit ψ^{-1} die umgekehrte, ebenfalls bijektive Abbildung von Ω, so entspricht jedem Elemente ν von Ω eine bestimmte Zahl $\psi^{-1}(\nu) = n$, nämlich diejenige, deren Bild $\psi(n) = \nu$ ist. Da nun dieser Zahl n eine bestimmte folgende Zahl $\psi(n) = n'$, und dieser wieder ein bestimmtes Element $\psi(n')$ in Ω entspricht, so gehört zu jedem Elemente ν der Menge Ω auch ein bestimmtes Element $\psi(n')$ derselben Menge, das wir als Bild von ν mit $\theta(\nu)$ bezeichnen wollen. Hierdurch ist eine Abbildung θ von Ω in sich selbst vollständig bestimmt [15]), und um unseren Satz zu beweisen, wollen wir zeigen, daß Ω durch θ als abzählbare unendliche Menge geordnet ist (71), d. h. daß die in dem Beweise von (132) angegebenen Bedingungen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sämtlich erfüllt sind. Zunächst leuchtet α aus der Definition von θ unmittelbar ein. Da ferner jeder Zahl n ein Element $\nu = \psi(n)$ entspricht, für welches $\theta(\nu) = \psi(n')$ wird, so ist allgemein

III. $\psi(n') = \theta\psi(n)$,

und hieraus in Verbindung mit I, II, α ergibt sich, daß die Abbildungen θ, ψ alle Bedingungen des Satzes (126) erfüllen; mithin folgt β aus (128) und I.

Nach (127) und I ist ferner

$$\psi(N') = \theta\psi(N) = \theta(\Omega),$$

und hieraus in Verbindung mit II und der Bijektivität der Abbildung ψ folgt γ, weil sonst $\psi(1)$ in $\psi(N')$, also (nach 27) die Zahl 1 in N' enthalten sein müßte, was (nach 71. γ) nicht der Fall ist.

---

[15] Offenbar ist θ die nach (25) aus ψ, φ, ψ zusammengesetzte Abbildung $\psi\varphi\psi$.

Wenn endlich μ, ν Elemente von Ω, und m, n die entsprechenden Zahlen bedeuten, deren Bilder $\psi(m) = \mu$, $\psi(n) = \nu$ sind, so folgt aus der Annahme $\theta(\mu) = \theta(\nu)$ nach dem Obigen, daß $\psi(m') = \psi(n')$, hieraus wegen der Bijektivität von ψ, φ, daß $m' = n'$, $m = n$, also auch $\mu = \nu$ ist; mithin gilt auch δ, w. z. b. w.

134. Bemerkung. Zufolge der beiden vorhergehenden Sätze (132), (133) bilden alle einfach unendlichen Mengen eine Klasse im Sinne von (34). Zugleich leuchtet mit Rücksicht auf (71), (73) ein, daß jeder Satz über die Zahlen, d. h. über die Elemente n der durch die Abbildung φ geordneten abzählbar unendlichen Menge N, und zwar jeder solche Satz, in welchem von der besonderen Beschaffenheit der Elemente n gänzlich abgesehen wird und nur von solchen Begriffen die Rede ist, die aus der Anordnung φ entspringen, ganz allgemeine Gültigkeit auch für jedes andere durch eine Abbildung θ geordnete abzählbar unendliche Menge Ω und dessen Elemente ν besitzt, und daß die Übertragung von N auf Ω (z. B. auch die Übersetzung eines arithmetischen Satzes aus einer Sprache in eine andere) durch die in (132), (133) betrachtete Abbildung ψ geschieht, welche jedes Element n von N in ein Element ν von Ω, nämlich in $\psi(n)$ verwandelt. Dieses Element ν kann man das n-te Element von Ω nennen, und hiernach ist die Zahl n selbst die n-te Zahl der Zahlenreihe N. Dieselbe Bedeutung, welche die Abbildung φ für die Gesetze bezglich der Menge N besitzt, insofern jedem Elemente n ein bestimmtes Element $\varphi(n) = n'$ folgt, kommt nach der durch ψ bewirkten Verwandlung der Abbildung θ zu für dieselben Gesetze im Gebiete Ω, insofern dem durch Verwandlung von n entstandenen Elemente $\nu = \psi(n)$ das durch Verwandlung von n' entstandene Element $\theta(\nu) = \psi(n')$ folgt; man kann daher mit Recht sagen, daß φ durch ψ in θ verwandelt wird, was sich symbolisch durch $\theta = \psi\varphi\psi^{-1}$, $\varphi = \psi^{-1}\theta\psi$ ausdrückt. Durch diese Bemerkungen wird, wie ich glaube, die in (73) aufgestellte Erklärung des Begriffes der Zahlen vollständig gerechtfertigt. Wir gehen nun zu ferneren Anwendungen des Satzes (126) über.

§ 11 Addition der Zahlen.

135. Erklärung. Es liegt nahe, die im Satze 126 dargestellte Definition einer Abbildung ψ der Zahlenreihe N oder der durch dieselbe bestimmten **Funktion** $\psi(n)$ auf den Fall anzuwenden, wo die dort mit Ω bezeichnete Menge, in welchem das Bild $\psi(N)$ enthalten sein soll, die Zahlenreihe N selbst ist, weil für diese Menge Ω schon eine Abbildung θ von Ω in sich selbst vorliegt, nämlich diejenige Abbildung φ, durch welche N als abzählbar unendliche Menge geordnet ist (71), (73). Dann wird also $\Omega = N$, $\theta(n) = \varphi(n) = n'$, mithin

I. $\psi(N) \subset N$,

und es bleibt, um ψ vollständig zu bestimmen, nur noch übrig, das Element ω aus Ω, d. h. aus N nach Belieben zu wählen. Nehmen wir $\omega = 1$, so wird ψ offenbar die identische Abbildung (21) von N, weil den Bedingungen $\psi(1) = 1$, $\psi(n') = (\psi(n))'$

allgemein durch $\psi(n) = n$ genügt wird. Soll also eine andere Abbildung ψ von N erzeugt werden, so muß für ω eine von 1 verschiedene, nach (78) in N' enthaltene Zahl m' gewählt werden, wo m selbst irgendeine Zahl bedeutet; da die Abbildung ψ offenbar von der Wah! dieser Zahl m abhängig ist, so bezeichnen wir das entsprechende Bild $\psi(n)$ einer beliebigen Zahl n durch das Symbol $m + n$ und nennen diese Zahl die **Summe**, welche aus der Zahl m durch Addition der Zahl n entsteht, oder kurz die Summe der Zahlen m, n. Dieselbe ist daher nach (126) vollständig bestimmt durch die Bedingungen [16])

II. $m + 1 = m'$,

III. $m + n' = (m + n)'$.

---

[16] Die obige, uumittelbar auf den Satz 126 gegründete Erklärung der Addition scheint mir die einfachste zu sein. Mit Zuziehung des in (131) entwickelten Begriffes kann man aber die Summe $m + n$ auch durch $\varphi^n(m)$ oder auch durch $\varphi^m(n)$ definieren, wo φ wieder die obige Bedeutung hat. Um die vollständige Übereinstimmung dieser Definitionen mit der obigen zu beweisen, braucht man nach (126) nur zu zeigen, daß, wenn $\varphi^n(m)$ oder $\varphi^m(n)$ mit $\psi(n)$ bezeichnet wird, die Bedingungen $\psi(1) = m'$, $\psi(n') = \varphi\psi(n)$ erfüllt sind, was mit Hilfe der vollständigen Induktion (80) unter Zuziehung von (131) leicht gelingt.

136. Satz. Es ist $m' + n = m + n'$.

Beweis durch vollständige Induktion (80). Denn

ρ. der Satz ist wahr für $n = 1$, weil (nach 135. II)
$m' + 1 = (m')' = (m + 1)'$
und (nach 135. III) $(m + 1)' = m + 1'$ ist.

σ. Ist der Satz wahr für eine Zahl n, und setzt man die folgende Zahl $n' = p$, so ist
$m' + n = m + p$, also auch $(m' + n)' = (m + p)'$, woraus (nach 135. III)
$m' + p = m + p'$ folgt; mithin gilt der Satz auch für die folgende Zahl p, w. z, b. w.

137. Satz. Es ist $m' + n = (m + n)'$.

Der Beweis folgt aus (136) und (135. III).

138. Satz. Es ist $1 + n = n'$,

Beweis durch vollständige Induktion (80). Denn

ρ. der Satz ist nach (135. II) wahr für $n = 1$.

σ. Gilt der Satz für eine Zahl n, und setzt man $n' = p$, so ist $1 + n = p$, also auch
$(1 + n)' = p'$, mithin (nach 135. III) $1 + p = p'$, d. h. der Satz gilt auch für die folgende
Zahl p, w. z. b. w.

139. Satz. Es ist $1 + n = n + 1$.

Der Beweis folgt aus (138) und (135. II).

140. Satz. Es ist $m + n = n + m$.

Beweis durch vollständige Induktion (80). Denn

ρ. der Satz ist nach (139) wahr für $n = 1$.

σ. Gilt der Satz für eine Zahl n, so folgt daraus auch $(m + n)' = (n + m)'$, d. h.
(nach 135. III) $m + n' = n + m'$, mithin (nach 136) $m + n' = n' + m$; mithin gilt der
Satz auch für die folgende Zahl n', w. z. b. w.

141. Satz. Es ist $(l + m) + n = l + (m + n)$.

Beweis durch vollständige Induktion (80). Denn

ρ. der Satz ist wahr für $n = 1$, weil (nach 135. II, III, II)
$(l + m) + 1 = (l + m)' = l + m' = l + (m + 1)$ ist.

σ. Gilt der Satz für eine Zahl n, so folgt daraus auch
$((l + m) + n)' = (l + (m + n))'$, d. h. (nach 135. III)
$(l + m) + n' = l + (m + n)' = l + (m + n')$,
also gilt der Satz auch für die folgende Zahl n', w. z. b. w.

142. Satz. Es ist $m + n > m$.

Beweis durch vollständige Induktion (80). Denn

ρ. der Satz ist nach (135. II) und (91) wahr für $n = 1$.

σ. Gilt der Satz für eine Zahl n, so gilt er nach (95) auch für die folgende Zahl n', weil
(nach 135. III und 91)
$m + n' = (m + n)' > m + n$ ist, w. z. b. w.

143. Satz. Die Bedingungen $m > a$ und $m + n > a + n$ sind gleichwertig.

Beweis durch vollständige Induktion (80). Denn

ρ. der Satz gilt zufolge (135. II) und (94) für $n = 1$.

σ. Gilt der Satz für eine Zahl n, so gilt er auch für die folgende Zahl n', weil die
Bedingung $m + n > a + n$ nach (94) mit $(m + n)' > (a + n)'$, also nach (135. III)
auch mit $m + n' > a + n'$ gleichwertig ist, w. z. b. w.

144. Satz. Ist $m > a$ und $n > b$, so ist auch $m + n > a + b$.

Beweis. Denn aus unseren Voraussetzungen folgt (nach 143) $m + n > a + n$ und $n + a > b + a$ oder, was nach (140) dasselbe ist, $a + n > a + b$, woraus sich der Satz nach (95) ergibt.

145. Satz. Ist $m + n = a + n$, so ist $m = a$.

Beweis. Denn wenn m nicht $= a$, also nach (90) entweder $m > a$ oder $m < a$ ist, so ist nach (143) entsprechend $m + n > a + n$ oder $m + n < a + n$, also kann (nach 90) $m + n$ gewiß nicht $= a + n$ sein, w. z. b. w.

146. Satz. Ist $l > n$, so gibt es eine und (nach 145) nur eine Zahl m, welche der Bedingung $m + n = l$ genügt.

Beweis durch vollständige Induktion (80). Denn

ρ. der Satz ist wahr für $n = 1$. In der Tat, wenn $l > 1$, d. h. (89) wenn l in N' enthalten, also das Bild m' einer Zahl m ist, so folgt aus (135. II), daß $l = m + 1$ ist,
w. z. b. w.

σ. Gilt der Satz für eine Zahl n, so zeigen wir, daß er auch für die folgende Zahl n' gilt. In der Tat, wenn $l > n'$ ist, so ist nach (91), (95) auch $l > n$, und folglich gibt es eine Zahl k, welche der Bedingung $l = k + n$ genügt; da dieselbe nach (138) verschieden von 1 ist (weil sonst $l = n'$ wäre), so ist sie nach (78) das Bild m' einer Zahl m, und folglich ist $l = m' + n$, also nach (136) auch $l = m + n'$, w. z. b. w.

§ 12 Multiplikation der Zahlen.

147. Erklärung. Nachdem im vorhergehenden § 11 eine unendliche Menge neuer Abbildungen der Zahlenreihe N in sich selbst gefunden ist, kann man jede derselben nach (126) wieder benutzen, um abermals neue Abbildungen ψ von N zu erzeugen. Indem man daselbst $\Omega = N$ und $\theta(n) = m + n = n + m$ setzt, wo m eine bestimmte Zahl, wird jedenfalls wieder

I. $\psi(N) \subset N$,

und es bleibt, um ψ vollständig zu bestimmen, nur noch übrig, das Element ω aus N nach Belieben zu wählen. Der einfachste Fall tritt dann ein, wenn man diese Wahl in eine gewisse Übereinstimmung mit der Wahl von θ bringt, indem man $\omega = m$ setzt. Da die hierdurch vollständig bestimmte Abbildung ψ von dieser Zahl m abhängt, so bezeichnen wir das entsprechende Bild $\psi(n)$ einer beliebigen Zahl n durch das Symbol $m \times n$ oder $m \cdot n$ oder $m\,n$, und nennen diese Zahl das **Produkt**, welches aus der Zahl m durch **Multiplikation** mit der Zahl n entsteht, oder kurz das Produkt der Zahlen m, n. Dasselbe ist daher nach (126) vollständig bestimmt durch die Bedingungen

II. $m \cdot 1 = m$,

III. $m\,n' = m\,n + m$.

148. Satz. Es ist $m'\,n = m\,n + n$.

Beweis durch vollständige Induktion (80). Denn

ρ. der Satz ist nach (147. II) und (135. II) wahr für $n = 1$.

σ. Gilt der Satz für eine Zahl n, so folgt

$m'\,n + m' = (m\,n + n) + m'$

und hieraus (nach 147. III, 141, 140, 136, 141, 147. III)

$m'n' = m\,n + (n + m') = m\,n + (m' + n) = m\,n + (m + n') = (m\,n + m) + n' = m\,n' + n'$,

also gilt der Satz auch für die folgende Zahl n', w. z. b. w.

149. Satz. Es ist $1 \cdot n = n$.

Beweis durch vollständige Induktion (80). Denn

ρ. der Satz ist nach 147. II wahr für $n = 1$.

σ. Gilt der Satz für eine Zahl n, so folgt $1 \cdot n + 1 = n + 1$, d. h. (nach 147. III, 135. II) $1 \cdot n' = n'$, also gilt der Satz auch für die folgende Zahl n', w. z. b. w.

150. Satz. Es ist $m\,n = n\,m$.

Beweis durch vollständige Induktion (80). Denn

ρ. der Satz gilt nach (147. II), (149) für $n = 1$.

σ. Gilt der Satz für eine Zahl n, so folgt $m\,n + m = n\,m + m$, d. h. (nach 147. III, 148) $m\,n' = n'\,m$, also gilt der Satz auch für die folgende Zahl n', w. z. b. w.

151. Satz. Es ist $l\,(m + n) = l\,m + l\,n$.

Beweis durch vollständige Induktion (80). Denn

ρ. der Satz ist nach (135. II), (147. III), (147. II) wahr für $n = 1$.

σ. Gilt der Satz für eine Zahl n, so folgt

$l\,(m + n) + l = (l\,m + l\,n) + l$;

nach (147. III), (135. III) ist aber

$l\,(m + n) + l = l\,(m + n)' = l\,(m + n')$

und nach (141), (147. III) ist

$(l\,m + l\,n) + l = l\,m + (l\,n + l) = l\,m + l\,n'$,

mithin ist $l\,(m + n') = l\,m + l\,n'$, d. h. der Satz gilt auch für die folgende Zahl n', w. z. b. w.

152. Satz. Es ist $(m + n)\,l = m\,l + n\,l$.

Der Beweis folgt aus (151), (150).

153. Satz. Es ist $(l\,m)\,n = l\,(m\,n)$.

Beweis durch vollständige Induktion (80). Denn

ρ. der Satz gilt nach (147. II) für $n = 1$.

σ. Gilt der Satz für eine Zahl n, so folgt

$(l\,m)\,n + l\,m = l\,(m\,n) + l\,m$, d. h. (nach 147. III, 151, 147. III)

$(l\,m)\,n' = l\,(m\,n + m) = l\,(m\,n')$,

also gilt der Satz auch für die folgende Zahl n', w. z. b. w.

154. Bemerkung. Hätte man in (147) keine Beziehung zwischen ω und θ angenommen, sondern $\omega = k$, $\theta(n) = m + n$ gesetzt, so würde hieraus nach (126) eine weniger einfache Abbildung ψ der Zahlenreihe N entstanden sein; für die Zahl 1 würde $\psi(1) = k$, und für jede andere, also in der Form n' enthaltene Zahl würde $\psi(n') = m\,n + k$; denn hierdurch wird, wovon man sich mit Zuziehung der vorhergehenden Sätze leicht überzeugt, die Bedingung

$\psi(n') = \theta\psi(n)$, d. h.

$\psi(n') = m + \psi(n)$ für alle Zahlen n erfüllt.

§ 13 Potenzierung der Zahlen.

155. Erklärung. Wenn man in dem Satze (126) wieder $\Omega = N$, ferner $\omega = a$, $\theta(n) = a\,n = n\,a$ setzt, so entsteht eine Abbildung ψ von N, welche abermals der Bedingung

I. $\psi(N) \subset N$

genügt; das entsprechende Bild $\psi(n)$ einer beliebigen Zahl n bezeichnen wir mit dem Symbol a^n und nennen diese Zahl eine **Potenz** der **Basis** a, während n der Exponent dieser Potenz von a heißt. Dieser Begriff ist daher vollständig bestimmt durch die Bedingungen

II. $a^1 = a$,

III. $a^{n'} = a \cdot a^n = a^n \cdot a$

156. Satz. Es ist $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$.

Beweis durch vollständige Induktion, (80). Denn

ρ. der Satz gilt nach (135. II), (155. III), (155. II) für $n = 1$.

σ. Gilt der Satz für eine Zahl n, so folgt

$a^{m+n} \cdot a = (a^m \cdot a^n)\, a$;

nach (155. III), (135. III) ist aber $a^{m+n} \cdot a = a^{(m+n)'} = a^{m+n'}$, und nach (153), (155. III) ist $(a^m \cdot a^n)\, a = a^m\, (a^n \cdot a) = a^m \cdot a^{n'}$; mithin ist $a^{m+n'} = a^m \cdot a^{n'}$, d. h. der Satz gilt auch für die folgende Zahl n', w. z. b. w.

157. Satz. Es ist $(a^m)^n = a^{m\,n}$.

Beweis durch vollständige Induktion (80). Denn

ρ. der Satz gilt nach (155. II), (147. II) für $n = 1$.

σ. Gilt der Satz für eine Zahl n, so folgt

$(a^m)^n \cdot a^m = a^{m\,n} \cdot a^m$;

nach (155. III) ist aber $(a^m)^n \cdot a^m = (a^m)^{n'}$, und nach (156), (147. III) ist $a^{m\,n} \cdot a^m = a^{m\,n\,+\,m} = a^{m\,n'}$; mithin ist $(a^m)^{n'} = a^{m\,n'}$, d. h. der Satz gilt auch für folgende Zahl n', w. z. b. w.

158. Satz. Es ist $(a\,b)^n = a^n \cdot b^n$.

Beweis durch vollständige Induktion (80). Denn

ρ. der Satz gilt nach (155. II) für $n = 1$.

σ. Gilt der Satz für eine Zahl n, so folgt nach (150), (158), (155. III) auch

$(a\,b)^n \cdot a = a\,(a^n \cdot b^n) = (a \cdot a^n)\, b^n = a^{n'} \cdot b^n$, und hieraus $((a\,b)^n \cdot a)\, b = (a^{n'} \cdot b^n)\, b$; nach

(153), (155. III) ist aber $((a\,b)^n \cdot a)\, b = (a\,b)^n \cdot (a\,b) = (a\,b)^{n'}$, und ebenso

$(a^{n'} \cdot b^n)\, b = a^{n'} \cdot (b^n \cdot b) = a^{n'} \cdot b^{n'}$;

mithin ist $(a\,b)^{n'} = a^{n'} \cdot b^{n'}$, d. h. der Satz gilt auch für die folgende Zahl n', w. z. b. w.

§ 14 Anzahl der Elemente einer endlichen Menge.

159. Satz. Ist Σ eine unendliche Menge, so ist jedes der in (98) erklärten Zahlenmengen Z_n bijektiv abbildbar in Σ (d. h. bijektiv einem Teile von Σ), und umgekehrt.

Beweis. Wenn Σ unendlich ist, so gibt es nach (72) gewiß einen Teil T von Σ, welcher abzählbar unendlich, also nach (132) der Zahlenreihe N ähnlich ist, und folglich ist nach (35) jede Menge Z_n als Teil von N auch einem Teile von T, also auch einem Teile von Σ ähnlich, w. z. b. w.

Der Beweis der Umkehrung – so einleuchtend dieselbe erscheinen mag – ist umständlicher. Wenn jede Menge Z_n bijektiv abbildbar in Σ ist, so entspricht jeder Zahl n eine solche bijektive Abbildung α_n von Z_n, daß $a_n(Z_n) \subset \Sigma$ wird. Aus der Existenz einer solchen als gegeben anzusehenden Reihe von Abbildungen a_n, über die aber weiter nichts vorausgesetzt wird, leiten wir zunächst mit Hilfe des Satzes (126) die Existenz einer neuen Reihe von ebensolchen Abbildungen ψ_n ab, welche die besondere Eigenschaft besitzt, daß jedesmal, wenn $m \leq n$, also (nach 100) $Z_m \subset Z_n$ ist, die Abbildung ψ_m des Teiles Z_m in der Abbildung ψ_n von Z_n enthalten ist (21), d. h. daß die Abbildungen ψ_m und ψ_n für alle in Z_m enthaltenen Zahlen gänzlich miteinander übereinstimmen, also auch stets

$$\psi_m(m) = \psi_n(m)$$

wird. Um den genannten Satz diesem Ziele gemäß anzuwenden, verstehen wir unter Ω diejenige Menge, deren Elemente alle überhaupt möglichen bijektiven Abbildungen aller Mengen Z_n in Σ sind, und definieren mit Hilfe der gegebenen, ebenfalls in Ω enthaltenen Elemente α_n auf folgende Weise eine Abbildung θ von Ω in sich selbst. Ist β irgendein Element von Ω, also z. B. eine bijektive Abbildung der bestimmten Menge Z_n in Σ, so kann die Menge $\alpha_{n'}(Z_{n'})$ nicht Teil von $\beta(Z_n)$ sein, weil sonst $Z_{n'}$ nach (35) einem Teile von Z_n, also nach (107) einem echten Teile seiner selbst ähnlich, mithin unendlich wäre, was dem Satze (119) widersprechen würde; es gibt daher in $Z_{n'}$ gewiß eine Zahl oder verschiedene Zahlen p derart, daß $\alpha_{n'}(p)$ nicht in $\beta(Z_n)$ enthalten ist; von diesen Zahlen p wählen wir – nur um etwas Bestimmtes festzusetzen – immer die kleinste k (96) und definieren, da $Z_{n'}$ nach (108) aus Z_n und n' zusammengesetzt ist, eine Abbildung γ von $Z_{n'}$ dadurch, daß für alle in Z_n enthaltenen Zahlen m das Bild $\gamma(m) = \beta(m)$, und außerdem $\gamma(n') = a_{n'}(k)$ sein soll; diese, offenbar bijektive, Abbildung γ von $Z_{n'}$ in Σ sehen wir nun als ein Bild $\theta(\beta)$ der Abbildung β an, und hierdurch ist eine Abbildung θ der Menge Ω in sich selbst vollständig definiert. Nachdem die in (126) genannten Dinge Ω und θ bestimmt sind, wählen wir endlich für das mit ω bezeichnete Element von Ω die gegebene Abbildung α_1; hierdurch ist nach (126) eine Abbildung ψ der Zahlenreihe N in Ω bestimmt, welche, wenn wir das zugehörige Bild einer beliebigen Zahl n nicht mit $\psi(n)$, sondern mit ψ_n bezeichnen, den Bedingungen

II. $\psi_1 = \alpha_1$

III. $\psi_{n'} = \theta(\psi_n)$

genügt. Durch vollständige Induktion (80) ergibt sich zunächst, daß ψ_n eine ähnliche Abbildung von Z_n in Σ ist; denn

ρ. dies ist zufolge II wahr für $n = 1$, und

σ. wenn diese Behauptung für eine Zahl n zutrifft, so folgt aus III und aus der Art des oben beschriebenen Überganges θ von β zu γ, daß die Behauptung auch für die folgende Zahl n' gilt, w. z. b. w.

Hierauf beweisen wir ebenfalls durch vollständige Induktion (80), daß, wenn m irgendeine Zahl ist, die oben angekündigte Eigenschaft

$$\psi_n(m) = \psi_m(m)$$

wirklich allen Zahlen n zukommt, welche $\geq m$ sind, also nach (93), (74) der Kette m_0 angehören; in der Tat,

ρ. dies leuchtet unmittelbar ein für $n = m$, und

σ. wenn diese Eigenschaft einer Zahl n zukommt, so folgt wieder aus III und der Beschaffenheit von θ, daß sie auch der Zahl n' zukommt, w. z. b. w.

Nachdem auch diese besondere Eigenschaft unserer neuen Reihe von Abbildungen ψ_n festgestellt ist, können wir unseren Satz leicht beweisen. Wir definieren eine Abbildung χ

der Zahlenreihe N, indem wir jeder Zahl n das Bild $\chi(n) = \psi_n(n)$ entsprechen lassen; offenbar sind (nach 21) alle Abbildungen ψ_n in dieser einen Abbildung χ enthalten. Da ψ_n eine Abbildung von Z_n in Σ war, so folgt zunächst, daß die Zahlenreihe N durch χ ebenfalls in Σ abgebildet wird, also $\chi(N) \subset \Sigma$ ist. Sind ferner m, n verschiedene Zahlen, so darf man der Symmetrie wegen nach (90) annehmen, es sei $m < n$; dann ist nach dem Obigen $\chi(m) = \psi_m(m) = \psi_n(m)$ und $\chi(n) = \psi_n(n)$; da aber ψ_n eine bijektive Abbildung von Z_n in Σ war, und m, n verschiedene Elemente von Z_n sind, so ist $\psi_n(m)$ verschieden von $\psi_n(n)$, also auch $\chi(m)$ verschieden von $\chi(n)$, d. h. χ ist eine bijektive Abbildung von N. Da ferner N eine unendliche Menge ist (71), so gilt nach (67) dasselbe von der ihr ähnlichen Menge $\chi(N)$ und nach (68), weil $\chi(N)$ Teil von Σ ist, auch von Σ, w. z. b. w.

160. Satz. Eine Menge Σ ist endlich oder unendlich, je nachdem es eine ihm ähnliche Menge Z_n gibt oder nicht gibt.

Beweis. Wenn Σ endlich ist, so gibt es nach (159) Mengen Z_n, welche nicht bijektiv abbildbar in Σ sind; da nach (102) die Menge Z_1 aus der einzigen Zahl 1 besteht und folglich in jeder Menge bijektiv abbildbar ist, so muß die kleinste Zahl k (96), der eine in Σ nicht bijektiv abbildbare Menge Z_k entspricht, verschieden von 1, also (nach 78) $= n'$ sein, und da $n < n'$ ist (91), so gibt es eine bijektive Abbildung ψ von Z_n in Σ; wäre nun $\psi(Z_n)$ nur ein echter Teil von Σ, gäbe es also ein Element α in Σ, welches nicht in $\psi(Z_n)$ enthalten ist, so könnte man, da $Z_{n'} = \cup(Z_n, n')$ ist (108), diese Abbildung ψ zu einer bijektiven Abbildung ψ von $Z_{n'}$ in Σ erweitern, indem man $\psi(n') = \alpha$ setzte, während doch nach unserer Annahme $Z_{n'}$ nicht bijektiv abbildbar in Σ ist. Mithin ist $\psi(Z_n) = \Sigma$, d. h. Z_n und Σ sind ähnliche Mengen. Umgekehrt, wenn eine Menge Σ einer Menge Z_n ähnlich ist, so ist Σ nach (119), (67) endlich, w. z. b. w.

161. Erklärung. Ist Σ eine endliche Menge, so gibt es nach (160) eine, und nach (120), (33) auch nur eine einzige Zahl n, welcher eine der Menge Σ ähnliche Menge Z_n entspricht; diese Zahl n heißt die **Anzahl** der in Σ enthaltenen Elemente (oder auch die **Mächtigkeit** der Menge Σ), und man sagt, Σ bestehe aus oder sei eine Menge von n Elementen, oder die Zahl n gebe an, wie viele Elemente in Σ enthalten sind [17]). Wenn die Zahlen benutzt werden, um diese bestimmte Eigenschaft endlicher Mengen genau auszudrücken, so heißen sie **Kardinalzahlen**. Sobald eine bestimmte bijektive Abbildung ψ der Menge Z_n gewählt ist, vermöge welcher $\psi(Z_n) = \Sigma$ wird, so entspricht jeder in Z_n enthaltenen Zahl m (d. h. jeder Zahl m, welche $\leq n$ ist) ein bestimmtes Element $\psi(m)$ der Menge Σ, und rückwärts entspricht nach (26) jedem Elemente von Σ durch die umgekehrte Abbildung ψ^{-1} eine bestimmte Zahl m in Z_n. Sehr oft bezeichnet man alle Elemente von Σ mit einem einzigen Buchstaben, z. B. α, dem man die unterscheidenden Zahlen m als Zeiger anhängt, so daß $\psi(m)$ mit α_m bezeichnet wird. Man sagt auch, diese Elemente seien **gezählt** und durch ψ in bestimmter Weise **geordnet**, und nennt α_m das m-te Element von Σ; ist $m < n$, so heißt $\alpha_{m'}$ das auf α_m **folgende** Element, und α_m heißt das **letzte** Element. Bei diesem Zählen der Elemente treten daher die Zahlen m wieder als Ordinalzahlen auf (73).

162. Satz. Alle einer endlichen Menge ähnlichen Mengen besitzen dieselbe Anzahl von Elementen.

Der Beweis folgt unmittelbar aus (33), (161).

163. Satz. Die Anzahl der in Z_n enthaltenen, d. h. derjenigen Zahlen, welche $\leq n$ sind, ist n.

Beweis. Denn nach (32) ist Z_n sich selbst ähnlich.

---

[17] Der Deutlichkeit und Einfachheit wegen beschränken wir im folgenden den Begriff der Anzahl durchaus auf endliche Mengen; wenn wir daher von einer Anzahl gewisser Dinge sprechen, so soll damit immer schon ausgedrückt sein, daß die Menge, deren Elemente diese Dinge sind, eine endliche ist.

164. Satz. Besteht eine Menge aus einem einzigen Element, so ist die Anzahl seiner Elemente $= 1$, und umgekehrt.

Der Beweis folgt unmittelbar aus (2), (26), (32), (102), (161).

165. Satz. Ist T echter Teil einer endlichen Menge Σ, so ist die Anzahl der Elemente von T kleiner als diejenige der Elemente von Σ.

Beweis. Nach (68) ist T eine endliche Menge, also ähnlich einer Menge Z_m, wo m die Anzahl der Elemente von T bedeutet; ist ferner n die Anzahl der Elemente von Σ, also Σ ähnlich Z_n, so ist T nach (35) einem echten Teile E von Z_n ähnlich, und nach (33) sind auch Z_m und E einander ähnlich; wäre nun $n \leq m$, also $Z_n \subset Z_m$, so wäre E nach (7) auch echter Teil von Z_m, und folglich Z_m eine unendliche Menge, was dem Satze (119) widerspricht; mithin ist (nach 90) $m < n$, w. z. b. w.

166. Satz. Ist $\Gamma = \cup(B, \gamma)$, wo B eine Menge von n Elementen und γ ein nicht in B enthaltenes Element von Γ bedeutet, so besteht Γ aus n' Elementen.

Beweis. Denn wenn $B = \psi(Z_n)$ ist, wo ψ eine bijektive Abbildung von Z_n bedeutet, so läßt sich dieselbe nach (105), (108) zu einer bijektiven Abbildung ψ von $Z_{n'}$ erweitern, indem man $\psi(n') = \gamma$ setzt, und zwar wird $\psi(Z_{n'}) = \Gamma$, w. z. b. w.

167. Satz. Ist γ ein Element einer aus n' Elementen bestehenden Menge Γ, so ist n die Anzahl aller anderen Elemente von Γ.

Beweis. Denn wenn B die Menge aller von γ verschiedenen Elemente in Γ bedeutet, so ist $\Gamma = \cup(B, \gamma)$; ist nun b die Anzahl der Elemente der endlichen Menge B, so ist nach dem vorhergehenden Satze b' die Anzahl der Elemente von Γ, also $= n'$, woraus nach (26) auch $b = n$ folgt, w. z. b. w.

168. Satz. Besteht A aus m und B aus n Elementen, und haben A und B kein gemeinsames Element, so besteht $\cup(A, B)$ aus $m + n$ Elementen.

Beweis durch vollständige Induktion (80). Denn

ρ. der Satz ist wahr für $n = 1$ zufolge (166), (164), (135. II).

σ. Gilt der Satz für eine Zahl n, so gilt er auch für die folgende Zahl n'. In der Tat, wenn Γ eine Menge von n' Elementen ist, so kann man (nach 167) $\Gamma = \cup(B, \gamma)$ setzen, wo γ ein Element und B die Menge der n anderen Elemente von Γ bedeutet. Ist nun A eine Menge von m Elementen, deren jedes nicht in Γ, also auch nicht in B enthalten ist, und setzt man $\cup(A, B) = \Sigma$, so ist nach unserer Annahme $m + n$ die Anzahl der Elemente von Σ, und da γ nicht in Σ enthalten ist, so ist nach (166) die Anzahl der in $\cup(\Sigma, \gamma)$ enthaltenen Elemente $= (m + n)'$, also (nach 135. III) $= m + n'$; da aber nach (15) offenbar

$$\cup(\Sigma, \gamma) = \cup(A, B, \gamma) = \cup(A, \Gamma)$$

ist, so ist $m + n'$ die Anzahl der Elemente von $\cup(A, \Gamma)$, w. z. b. w.

169. Satz. Sind A, B endliche Mengen von beziehungsweise m, n Elementen, so ist $\cup(A, B)$ eine endliche Menge, und die Anzahl seiner Elemente ist $\leq m + n$.

Beweis. Ist $B \subset A$, so ist $\cup(A, B) = A$, und die Anzahl m der Elemente dieser Menge ist (nach 142) $< m + n$, wie behauptet war. Ist aber B kein Teil von A, und T die Menge aller derjenigen Elemente von B, welche nicht in A enthalten sind, so ist nach (165) deren Anzahl $p \leq n$, und da offenbar

$$\cup(A, B) = \cup(A, T)$$

ist, so ist nach (143) die Anzahl $m + p$ der Elemente dieser Menge $\leq m + n$, w. z. b. w.

170. Satz. Jede aus einer Anzahl n von endlichen Mengen zusammengesetzte Menge ist endlich.

Beweis durch vollständige Induktion (80). Denn

ρ. der Satz ist nach (8) selbstverständlich für $n = 1$.

σ. Gilt der Satz für eine Zahl n, und ist Σ zusammengesetzt aus n' endlichen Mengen, so sei A eine dieser Mengen und B die aus allen übrigen zusammengesetzte Menge; da deren Anzahl (nach 167) $= n$ ist, so ist nach unserer Annahme B eine endliche Menge. Da nun offenbar

$\Sigma = \cup(A, B)$

ist, so folgt hieraus und aus (169), daß auch Σ eine endliche Menge ist, w. z. b. w.

171. Satz. Ist ψ eine nicht bijektive Abbildung einer endlichen Menge Σ von n Elementen, so ist die Anzahl der Elemente des Bildes $\psi(\Sigma)$ kleiner als n.

Beweis. Wählt man von allen denjenigen Elementen von Σ, welche ein und dasselbe Bild besitzen, immer nur ein einziges nach Belieben aus, so ist die Menge T aller dieser ausge-wählten Elemente offenbar ein echter Teil von Σ, weil ψ eine nicht bijektive Abbildung von Σ ist (26). Zugleich leuchtet aber ein, daß die (nach 21) in ψ enthaltene Abbildung dieses Teils T eine bijektive, und daß $\psi(T) = \psi(\Sigma)$ ist; mithin ist die Menge $\psi(\Sigma)$ ähnlich dem echten Teil T von Σ, und hieraus folgt unser Satz nach (162), (165).

172. Schlußbemerkung. Obgleich soeben bewiesen ist, daß die Anzahl m der Elemente von $\psi(\Sigma)$ kleiner als die Anzahl n der Elemente von Σ ist, so sagt man in manchen Fällen doch gern, die Anzahl der Elemente von $\psi(\Sigma)$ sei $= n$. Natürlich wird dann das Wort Anzahl in einem anderen als dem bisherigen Sinne (161) gebraucht; ist nämlich α ein Element von Σ, und a die Anzahl aller derjenigen Elemente von Σ, welche ein und dasselbe Bild $\psi(\alpha)$ besitzen, so wird letzteres als Element von $\psi(\Sigma)$ häufig doch noch als Vertreter von a Elementen aufgefaßt, die wenigstens ihrer Abstam-mung nach als verschieden voneinander angesehen werden können, und wird demgemäß als a-faches Element von $\psi(\Sigma)$ gezählt. Man kommt auf diese Weise zu dem in vielen Fällen sehr nützlichen Begriffe von Mengen, in denen jedes Element mit einer gewissen Häufigkeitszahl ausgestattet ist, welche angibt, wie oft dasselbe als Element der Menge gerechnet werden soll. Im obigen Falle würde man z. B. sagen, daß n die Anzahl der in diesem Sinne gezählten Elemente von $\psi(\Sigma)$ ist, während die Anzahl m der wirklich verschiedenen Elemente dieser Menge mit der Anzahl der Elemente von T übereinstimmt. Ähnliche Abweichungen von der ursprünglichen Bedeutung eines Kunstausdrucks, die nichts anderes sind als Erweiterungen der ursprünglichen Begriffe, treten sehr häufig in der Mathematik auf; doch liegt es nicht im Zweck dieser Schrift, näher hierauf einzugehen.