Euklid: Stoicheia (Euklids Elemente)

Buch X.

Über eingefügte Hypertextmarkierungen kann der griechische Text in der Fassung von I. L. Heiberg aufgerufen werden.

Erklärungen.

1. Größen sind kommensurabel, wenn sie Vielfache einer gemeinsamen Maßeinheit sind,

   und sind inkommensurabel, wenn für sie kein gemeinsames Maß zu finden ist.
2. Strecken sind im Quadrat kommensurabel, wenn die Quadrate über ihnen Vielfache einer gegebenen Flächeneinheit sind,

   und sind im Quadrat inkommensurabel, wenn für die Quadrate über ihnen kein gemeinsames Flächenmaß zu finden ist,
3. Demnach gibt es, wie zu zeigen ist, kommensurable und inkommensurable Strecken in unbegrenzter Anzahl, sowohl der Länge nach wie im Quadrat. Strecken mit rationaler Länge sind der Länge nach kommensurabel und Strecken mit quadriert rationaler Länge sind im Quadrat kommensurabel;

   auch Strecken, die zu quadriert rationalen Strecken entweder der Länge nach und im Quadrat oder nur im Quadrat kommensurabel sind, sind quadriert rational,

   aber die zu ihnen inkommensurablen Strecken, sowohl der Länge nach wie im Quadrat, haben eine irrationale Länge.
4. Quadrate über Strecken rationaler oder quadriert rationaler Länge werden rational genannt,

   und rational sind auch Quadrate, die zu ihnen kommensurabel sind,

   jedoch die zu ihnen inkommensurablen Quadrate werden irrational genannt.

   Eine Fläche, die zu Quadraten rationaler Größe inkommensurabel ist, heißt irrational, ebenso deren Seite, wenn es ein Quadrat ist, und die Seite des ihm gleichen Quadrats, wenn es eine andere gradlinige Figur ist.

Anmerkung:

zu „rational“: ῥητόυ, nennbar, (in Zahlen) darstellbar.
zu „irrational“: ἄλογου, nicht anzugeben, in nicht darstellbarem Zahlenverhältnis stehend.

Das griechische „ῥητόυ“ wurde in den lateinischen Übersetzungen mit „rational“ wiedergegeben.
Es ist jedoch „ῥητόυ“ auch eine Zahl, deren Quadrat rational ist.

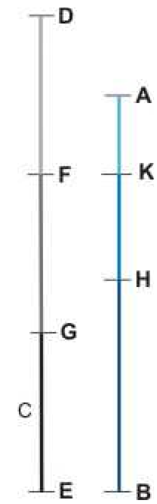
Es sind also auch Quadratwurzeln „ῥητόυ“, was hier, da in eine gegenwärtige Sprache übersetzt wird, mit der gegenwärtigen Bedeutung von „rational“, quadriert rational genannt wird.

„μέση“ (lat. media), das hier mit biquadriert rational übersetzt wird (X.22.), ist eine Größe, deren 4te Potenz rational ist; ihr Quadrat ist quadriert rational.

X.1.

Wird von der größeren von zwei ungleichen Größen mehr als die Hälfte weggenommen und vom Rest wiederum mehr als die Hälfte und wird dieses fortgesetzt, dann wird sich ein Rest ergeben, der kleiner als die kleinere der beiden Größen ist.

Wenn AB die größere der beiden ungleichen Größen AB, C ist, dann sage ich, wenn von AB mehr als die Hälfte weggenommen wird und vom Rest wiederum mehr als die Hälfte und dieses fortgesetzt wird, dann wird sich ein Rest ergeben, der kleiner ist als C.



Es ist ein Vielfaches DE von C, das größer als AB ist, in Teile DF, FG, GE aufzuteilen, die gleich C sind, und es ist von AB ein Teil BH, größer als die Hälfte, vom Rest AH ein Teil HK, größer als die Hälfte, abzuteilen und dieses fortzusetzen bis AB in ebenso viele Teile AK, KH, HB aufgeteilt ist wie DE.

Da DE größer als AB ist und von DE weniger als die Hälfte von EG abgeteilt ist, von AB aber mehr als die Hälfte von BH, ist GD größer als HA.

Da von GD, das größer als HA ist, die Hälfte von GF, von HA aber mehr als die Hälfte von HK abgeteilt ist, ist DF größer als AK.

Da DF gleich C ist, ist C größer als AK, somit AK kleiner als C.

Also verbleibt von AB ein Rest AK kleiner als C, was zu zeigen war.

Dies ist ebenso zu zeigen, wenn von AB die Hälfte, vom Rest wiederum die Hälfte und so fort, weggenommen wird.

Anmerkung:

Für die rationalen Größen AB, C, wobei $C < AB$, gibt es somit ein k, so dass:

$$AB - AB/2 - AB/2^2 - AB/2^3 - AB/2^4 - \ldots - AB/2^k < C$$

womit

$$AB - AB \cdot (1/2 + 1/2^2 + 1/2^3 + 1/2^4 + \ldots + 1/2^k) < C.$$

Damit ist gezeigt, dass diese Reihe gegen AB konvergiert, denn
es gibt für alle $\epsilon = C/AB$ ein k, so dass

$$1 - (1/2 + 1/2^2 + 1/2^3 + 1/2^4 + \ldots + 1/2^k) < \epsilon.$$

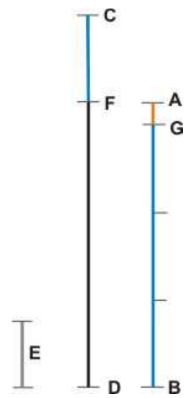
Im Lehrsatz ist gezeigt, dass es für alle ϵ ein k gibt, so dass
für alle $1/2 \leq a < 1$ und $q = 1 - a$ gilt:

$$1 - (a + a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 + a \cdot q^4 + \ldots + a \cdot q^k) < \epsilon.$$

X.2.

Wird von zwei ungleiche Größen immer wieder die kleinere von der größeren weggenommen, und bleibt kein Rest, der Teiler des ihm vorhergehenden ist, dann sind die beiden Größen inkommensurabel.

Wenn AB die kleinere der beiden ungleichen Größen AB, CD ist und, wenn immer wieder die kleinere von der größeren weggenommen wird, dann kein Rest bleibt, der Teiler des ihm vorhergehenden ist, dann, sage ich, sind die beiden Größen inkommensurabel.



Denn wenn AB, CD kommensurabel sind, sind sie Vielfache einer gemeinsamen Maßeinheit, diese sei E.
Es sei dann DF so Vielfache der AB, dass der Rest FC kleiner als AB ist.
Dann sei BG so Vielfache der FC, dass der Rest AG kleiner als FC ist, und dies wechselseitig fortgesetzt, bis AG kleiner als E ist.

Da dann AB Vielfache der E und DF Vielfache der AB ist, ist DF Vielfache der E. Es ist aber auch CD Vielfache der E, somit ist CF Vielfache der E.
Da BG Vielfache der CF ist, ist BG Vielfache der E.
Es ist das ganze BA Vielfache der E, somit ist auch AG Vielfache der E, die kleinere Vielfache der größeren, was nicht möglich ist.
Also sind AB, CD nicht Vielfache einer anderen Größe und damit inkommensurabel.

Deshalb sind zwei ungleiche Größen inkommensurabel, von denen ausgehend immer wieder die kleinere von der größeren weggenommen wird und kein Rest bleibt, der Teiler des ihm vorhergehenden ist, was zu zeigen war.

Anmerkung:

Bleibt bei der Anwendung dieses euklidischen Algorithmus zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers auf AB, CD (VII.1.) der Rest 1 oder der ggT(AB, CD) sind AB, CD kommensurabel;
ist dies nicht der Fall, sind AB, CD inkommensurabel und AB, oder CD, oder beide sind irrational.

Offensichtlich kann dieses Rechenverfahren auch dazu benutzt werden, um beliebig genaue Näherungswerte für irrationale Zahlen zu finden, für die entschieden werden kann, welche von zwei vorgelegten rationalen Zahlen näher bei der gesuchten liegt, worauf die nächste Näherung berechnet werden kann.

Als Beispiel dazu einige Iterationen für die Quadratwurzel aus Zwei und für die Kreiszahl π.

Die Gesuchten werden jeweils x genannt:

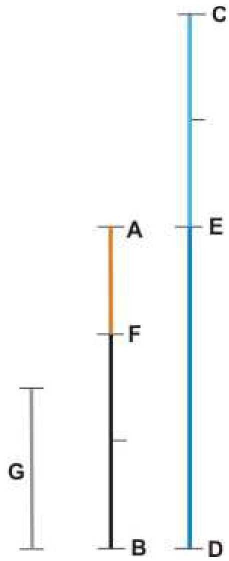
größere Zahl	kleinere Zahl	Rest (Differenz)		größere Zahl	kleinere Zahl	Rest (Differenz)
2	x	2 - x		4	x	4 – x
x	2 - x	2 x – 2		x	4 – x	2 x – 4
2 x – 2	2 - x	3 x – 4		2 x – 4	4 – x	3 x – 8
2 - x	3 x – 4	6 – 4 x		3 x – 8	4 – x	4 x – 12
6 – 4 x	3 x – 4	10 – 7 x		4 – x	4 x – 12	16 – 5 x
3 x – 4	10 – 7 x	10 x - 14		4 x – 12	16 – 5 x	9 x – 28
10 x - 14	10 – 7 x	17 x - 24		16 – 5 x	9 x – 28	44 – 14 x

Aus dem jeweils letzten Rest ergeben sich die rationalen Näherungswerte: 24/17 für $\sqrt{2}$ und 22/7 für π.

X.3.

Zu zwei kommensurablen Größen die größte gemeinsame Maßeinheit finden.

Es seien zwei kommensurable Größen AB, CD gegeben. Zu AB, CD, wovon AB die kleinere sei, soll die größte gemeinsame Maßeinheit gefunden werden. Es ist die Größe CD Vielfache von AB oder nicht.
Ist CD Vielfache von AB, dann ist, da AB auch Vielfache von sich ist, AB die größte gemeinsame Maßeinheit, denn größer als AB kann es dann nicht sein.



Ist die Größe CD nicht Vielfache von AB, dann wird, da AB und CD nicht inkommensurabel sind, wenn immer wieder die kleinere Größe von der größeren weggenommen wird, ein Rest bleiben, der Teiler des vorhergehenden ist.
Es ist dann die Größe ED Vielfache von AB mit dem Rest EC kleiner AB.
Es ist danach die Größe FB Vielfache von EC mit dem Rest AF nicht größer als EC, wobei EC Vielfache von AF ist. Da CE Vielfache von AF und FB Vielfache von CE ist, ist FB Vielfache von AF.
Es ist AF auch Vielfache von sich und damit AB Vielfache von AF.
Da die Größe DE Vielfache von AB ist, ist DE auch Vielfache von AF.
Es ist die Größe CE Vielfache von AF und damit ist auch CD Vielfache von AF. Also sind die Größen AB und CD Vielfache von AF und es ist AF ein gemeinsames Maß von AB und CD.

Ich sage, es ist auch die größte.
Denn wenn nicht, dann sind AB und CD Vielfache einer Größe, die größer als AF ist; es sei dies G. Da dann AB Vielfache von G und ED Vielfache von AB ist, ist ED damit Vielfache von G. Da CD Vielfache ist, ist auch der Rest CE Vielfache von G.

Es ist FB Vielfache von CE und damit auch von G. Mit AB ist dann auch die restliche Größe AF Vielfache von G, die kleinere von der größeren, was nicht möglich ist.

Also ist keine größere als AF eine gemeinsame Maßeinheit für die Größen AB und CD.

Damit ist zu den beiden kommensurablen Größen AB und CD die größte gemeinsame Maßeinheit gefunden, was auszuführen war.

Zusatz:
Offensichtlich ist die Maßeinheit zweier Größen auch eine Maßeinheit der größten gemeinsamen Maßeinheit dieser Größen.

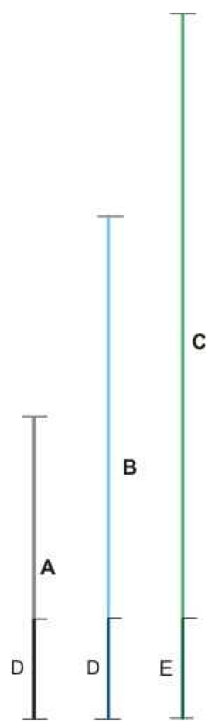
X.4.

Zu drei kommensurablen Größen die größte gemeinsame Maßeinheit finden.

Es seien drei kommensurable Größen A, B, C gegeben. Zu A, B, C soll die größte gemeinsame Maßeinheit gefunden werden.

Zu den Größen A, B sei D die größte gemeinsame Maßeinheit [wie X.3.].Dann ist C Vielfache von D oder nicht. Ist C Vielfache von D, dann ist, da auch A und B Vielfache von D sind, C eine gemeinsame Maßeinheit für A, B, C. Es ist offensichtlich auch die größte, denn größer als D kann eine Maßeinheit für A, B nicht sein.Ist C nicht Vielfache von D, dann, sage ich zunächst, sind C, D kommensurabel.

Da A, B, C kommensurabel sind, sind sie Vielfache einer gemeinsamen Maßeinheit.
Da A, B Vielfache dieser Maßeinheit sind, ist dies auch ihre größte gemeinsame Maßeinheit D.
Diejenige Maßeinheit, deren Vielfache C ist, ist auch Maßeinheit für D.
Also sind C, D kommensurabel.
Es sei E die größte gemeinsame Maßeinheit für C, D.
Da die Größe D Vielfache von E ist und die Größen A, B Vielfache von D sind, sind A, B Vielfache von E. Da E Maßeinheit für C ist, ist somit E gemeinsame Maßeinheit für A, B, C.



Ich sage, es ist auch die größte.
Denn wenn nicht, sind A, B, C Vielfache einer größeren Größe als E; es sei dies F. Da dann A, B Vielfache von F sind, ist auch ihre größte gemeinsame Maßeinheit D Vielfache von F.
Da dann C Vielfache von F ist, sind C, D Vielfache von F und ist auch ihre größte gemeinsame Maßeinheit E Vielfache von F, die kleinere von der größeren, was nicht möglich ist.
Also ist keine größere als E eine gemeinsame Maßeinheit für A, B, C. Da C nicht Vielfache von D ist, jedoch von E, ist E die größte gemeinsame Maßeinheit für A, B, C.

Damit ist für die drei kommensurablen Größen A, B, C die größte gemeinsame Maßeinheit gefunden, was auszuführen war.

Zusatz:

Offensichtlich ist die Maßeinheit dreier Größen auch eine Maßeinheit der größten gemeinsamen Maßeinheit dieser Größen.

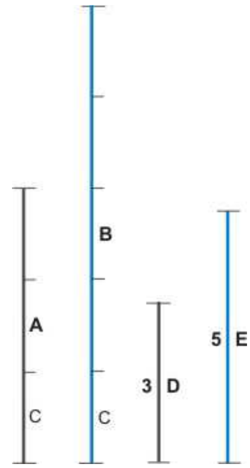
Auf die gleiche Weise ist, mit Verwendung dieses Zusatzes, die größte gemeinsame Maßeinheit für mehrere verschiedene Größen aufzufinden, was zu zeigen ist.

X.5.

Kommensurable Größen stehen in einem gleichen Verhältnis wie (natürliche) Zahlen.

Wenn A und B zwei kommensurable Größen sind, dann, sage ich, stehen A und B im einem gleichen Verhältnis wie zwei Zahlen.

Da A, B kommensurable Größen sind, gibt es eine gemeinsame Maßeinheit; diese sei C. Ebenso oft die Größe A Vielfache von C ist, so oft sei die Zahl D Vielfache der Eins und ebenso oft die Größe B Vielfache von C ist, so oft sei die Zahl E Vielfache der Eins.



Da die Größe A so oft Vielfache von C ist wie die Zahl D angibt und D ebenso oft Vielfache der Eins ist, verhält sich C zu A wie die Eins zu D und, in umgekehrten Verhältnissen, verhält sich A zu C wie D zur Eins.

Da die Größe B so oft Vielfache von C ist wie E angibt und E ebenso oft Vielfache der Eins ist, verhält sich C zu B wie die Eins zu E. Da sich, wie gezeigt, A zu C verhält wie die Zahl D zur Eins, verhält sich damit aufgrund Gleichheit [wie V.22.] A zu B wie die Zahl D zur Zahl E.

Deshalb stehen die kommensurablen Größen A, B im gleichen Verhältnis wie die Zahlen D, E, was zu zeigen war.

Anmerkung:

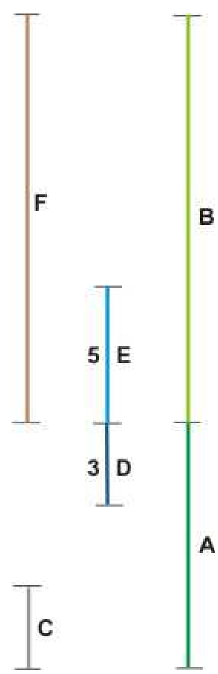
Kommensurable Größen stehen in einem Verhältnis, das einem Verhältnis natürlicher Zahlen gleich ist.
Für kommensurable Größen A, B gibt es natürliche Zahlen m, n, so dass
$A : B = q \cdot (m : n)$ mit dem Proportionalitätsfaktor q.

X.6.

Größen, die in einem gleichen Verhältnis stehen wie Zahlen, sind kommensurabel.

Wenn die Größen A, B im gleichen Verhältnis stehen wie die Zahlen D, E, dann, sage ich, sind A und B kommensurabel.

Denn wird A in so viele Teile aufgeteilt wie die Zahl D angibt, dann hat jedes Teil die Größe C.



Es ist dann die Größe F so oft Vielfache von C wie die Zahl E angibt. Da die Größe A so oft Vielfache der Größe C ist wie die Zahl D Vielfache von Eins, verhält sich C zu A wie Eins zu D und, in umgekehrten Verhältnissen, verhält sich A zu C wie die Zahl D zu Eins.

Da E so oft Vielfache von Eins ist wie F Vielfache von C, verhält sich C zu F wie Eins zu E. Da sich, wie gezeigt, A zu C verhält wie D zu Eins, verhält sich damit aufgrund Gleichheit A zu F wie D zu E. Es verhält sich D zu E wie A zu B, somit verhält sich A zu B wie A zu F.

Damit steht die Größe A zu den Größen B, F in gleichen Verhältnissen, weshalb B gleich F ist. Da F Vielfache von C ist, ist dies auch B. Da auch A Vielfache von C ist, sind A, B Vielfache von C. Also sind die Größen A und B kommensurabel.

Deshalb sind Größen kommensurabel, die in einem gleichen Verhältnis stehen wie Zahlen, was zu zeigen war.

Zusatz:

Offensichtlich kann zu zwei Zahlen D, E und einer Strecke A eine Strecke F gefunden werden, zu der sich A verhält wie D zu E.

Werden die Strecken A, F so mit einer Strecke B ergänzt, dass A zu B zu F in fortlaufend gleicher Proportion stehen, dann verhält sich A zu F wie das Quadrat über A zum Quadrat über B, denn es verhält sich die erste zur dritten Strecke wie die Figur über der ersten zur ähnlichen und ähnlich errichteten Figur über der zweiten Strecke.

Da sich die Strecke A zu F verhält wie die Zahl D zu E, verhält sich die Zahl D zu E wie das Quadrat über A zum Quadrat über B, was zu zeigen war.

X.7.

Inkommensurable Größen stehen nicht in einem Verhältnis zueinander wie Zahlen.

Die inkommensurablen Größen A, B, sage ich, stehen nicht in einem Verhältnis wie Zahlen.

Denn wenn A und B in einem Verhältnis stehen wie zwei Zahlen sind sie kommensurabel.
Da sie es nicht sind, stehen A und B nicht in einem Verhältnis wie eine Zahl zu einer anderen.

Deshalb stehen inkommensurable Größen nicht in einem Verhältnis zueinander wie Zahlen, was zu zeigen war.

X.8.

Stehen Größen nicht in einem Verhältnis zueinander wie Zahlen, sind sie inkommensurabel.

Wenn die Größen A, B nicht in einem Verhältnis zueinander stehen wie Zahlen, dann, sage ich, sind sie inkommensurabel.
Denn wenn sie kommensurabel sind, stehen A und B in einem Verhältnis zueinander wie eine Zahl zu einer anderen.
Da sie nicht in einem solchen Verhältnis stehen, sind A, B inkommensurabel.
Deshalb sind Größen inkommensurabel, die nicht in einem Verhältnis zueinander stehen wie Zahlen, was zu zeigen war.

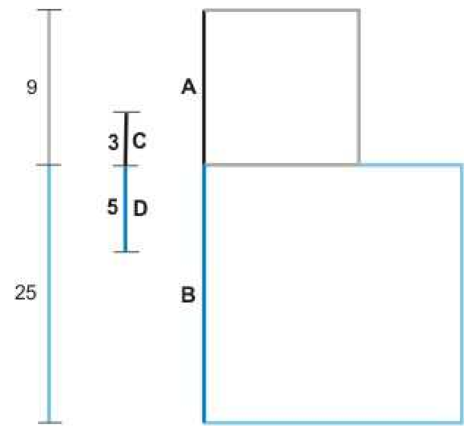
X.9.

Sind Strecken der Länge nach kommensurabel, dann verhalten sich die Quadrate über ihnen wie Quadratzahlen, und verhalten sich Quadrate wie Quadratzahlen, dann sind ihre Seiten der Länge nach kommensurabel.
Sind Strecken der Länge nach inkommensurabel, dann stehen die Quadrate über ihnen zueinander nicht in einem Verhältnis wie Quadratzahlen, und stehen Quadrate zueinander nicht in einem Verhältnis wie Quadratzahlen, dann sind ihre Seiten der Länge nach inkommensurabel.

Wenn die Strecken A, B der Länge nach kommensurabel sind, dann, sage ich, verhält sich das Quadrat über A zum Quadrat über B wie eine Quadratzahl zu einer anderen.

Denn da A und B der Länge nach kommensurabel sind, stehen sie in einem Verhältnis wie zwei Zahlen. Es sei das Verhältnis der Größen A zu B wie das der Zahlen C zu D.

Es ergibt sich das Verhältnis des Quadrats über A zum Quadrat über B aus dem Produkt des Verhältnisses von A zu B multipliziert mit sich und es ergibt sich das Verhältnis der Quadratzahl aus C zur Quadratzahl aus D aus dem Produkt des Verhältnisses von C zu D multipliziert mit sich. Damit verhält sich das Quadrat über A zum Quadrat über B wie die Quadratzahl aus C zur Quadratzahl aus D.



Ich sage, A und B sind dann der Länge nach kommensurabel.

Denn da sich das Verhältnis des Quadrats über A zum Quadrat über B sich aus dem Produkt des Verhältnisses von A zu B mit sich ergibt und da sich das Verhältnis der Quadratzahl aus C zur Quadratzahl aus D aus dem Produkt des Verhältnisses von C zu D ergibt, verhalten sich die Größen A zu B wie die Zahlen C zu D.
Also sind A und B der Länge nach kommensurabel.

Wenn die Strecken A und B der Länge nach inkommensurabel sind, dann, sage ich, steht das Quadrat über A zum Quadrat über B nicht in einem Verhältnis wie eine Quadratzahl zu einer anderen. Denn wenn das Quadrat über A zum Quadrat über B in einem Verhältnis steht wie eine Quadratzahl zu einer anderen, sind A und B kommensurabel.
Da A und B nicht kommensurabel sind, steht das Quadrat über A zum Quadrat über B nicht in einem Verhältnis wie eine Quadratzahl zu einer anderen.

Wenn nun das Quadrat über A zum Quadrat über B nicht in einem Verhältnis steht wie eine Quadratzahl zu einer anderen, dann, sage ich, sind A und B der Länge nach inkommensurabel.
Denn wenn A und B kommensurabel sind, steht das Quadrat über A zum Quadrat über B in einem Verhältnis wie eine Quadratzahl zu einer anderen.
Da die Quadrate nicht in einem solchen Verhältnis stehen, sind A und B der Länge nach nicht kommensurabel.

Deshalb verhalten sich die Quadrate über kommensurablen Strecken wie Quadratzahlen und wenn sich Quadrate wie Quadratzahlen verhalten sind ihre Seiten der Länge nach kommensurabel; deshalb auch verhalten sich Quadrate über inkommensurablen Strecken nicht wie Quadratzahlen und wenn Quadrate sich nicht verhalten wie Quadratzahlen sind sie inkommensurabel, was zu zeigen war

Zusatz:

Offensichtlich sind, nach dem was gezeigt wurde, alle der Länge nach kommensurablen Strecken auch im Quadrat kommensurabel, aber nicht alle im Quadrat kommensurablen Strecken sind auch kommensurabel der Länge nach.

Nicht alle der Länge nach inkommensurablen Strecken sind auch im Quadrat inkommensurabel, aber alle im Quadrat inkommensurablen Strecken sind inkommensurabel der Länge nach.

Beispiele:

2 und 3 sind kommensurabel, deshalb auch 2^2 und 3^2,

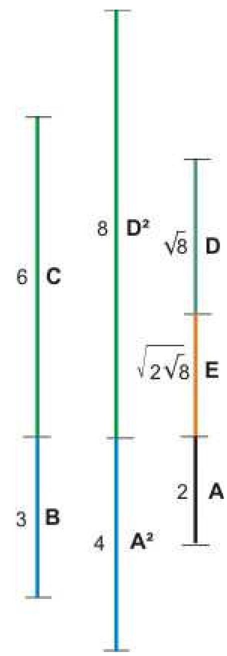
jedoch sind $2^{1/2}$ und $3^{1/2}$ inkommensurabel.

$(2^{1/4})^2$ und $(2^{1/2})^2$ sind inkommensurabel, deshalb auch $2^{1/4}$ und $2^{1/2}$.

X.10.

Zu einer Strecke eine der Länge nach inkommensurable Strecke und eine andere, der Länge nach und im Quadrat inkommensurable, Strecke finden.

Zur gegebenen Strecke A soll eine der Länge nach inkommensurable Strecke und eine andere, der Länge nach und im Quadrat inkommensurable Strecke gefunden werden. Zu zwei Zahlen B, C, die sich zueinander nicht verhalten wie zwei Quadratzahlen und somit sich nicht verhalten wie Quadrate über kommensurablen Strecken, ist eine Strecke D zu suchen, so dass sich B zu C verhält wie das Quadrat über A zum Quadrat über D. Da dann das Quadrat über A und das Quadrat über D kommensurabel sind und sich B zu C nicht verhält wie eine Quadratzahl zu einer anderen, verhält sich auch das Quadrat über A zum Quadrat über D nicht wie eine Quadratzahl zu einer anderen. Also sind A und D der Länge nach inkommensurabel.



Werden die Strecken A und D mit einer Strecke E so ergänzt, dass sich A zu E verhält wie E zu D, dann verhält sich A zu D wie das Quadrat über A zum Quadrat über E.
Da A und D der Länge nach inkommensurabel sind, sind auch die Quadrate über A und E inkommensurabel. Also sind A und E im Quadrat inkommensurabel und damit auch der Länge nach.

Damit ist zur gegebenen Strecke A eine der Länge nach inkommensurable Strecke D und eine der Länge nach und im Quadrat inkommensurable Strecke E gefunden, was auszuführen war.

X.11.

Stehen vier Größen in Proportion und sind die erste und die zweite kommensurabel, dann sind es auch die dritte und die vierte und
sind die erste und die zweite Größe inkommensurabel, dann sind es auch die dritte und die vierte.

Wenn die Größen A, B, C, D in Proportion stehen, sich also A zu B verhält wie C zu D, und A und B kommensurabel sind, dann, sage ich, sind auch C und D kommensurabel.

Denn da A und B kommensurabel sind, verhält sich A zu B wie eine Zahl zu einer anderen. Da sich A zu B verhält wie C zu D, verhält sich auch C zu D wie eine Zahl zu einer anderen. Also sind C und D kommensurabel.

Sind A und B inkommensurabel, dann, sage ich, sind auch C und D inkommensurabel.

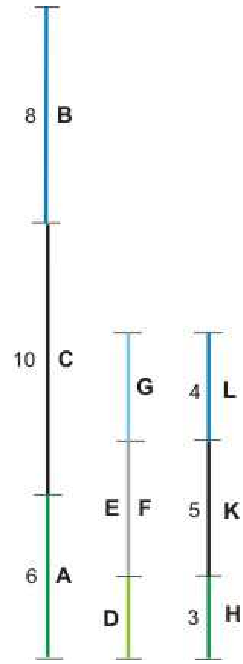
Denn da A und B inkommensurabel sind, verhält sich A zu B nicht wie eine Zahl zu einer anderen.
Da sich A zu B verhält wie C zu D, verhält sich auch C zu D nicht wie eine Zahl zu einer anderen. Also sind C und D inkommensurabel.

Deshalb sind die dritte und vierte Größe von vier Größen in Proportion dann kommensurabel, wenn die erste und zweite kommensurabel sind, und wenn die erste und zweite inkommensurabel sind, dann auch die dritte und vierte, was zu zeigen war.

X.12.

Die Größen, die zu einer Größe kommensurabel sind, sind kommensurabel.

Wenn jede der Größen A, B zu C kommensurabel ist, dann, sage ich, sind A, B kommensurabel.



Denn da A, C kommensurabel sind, stehen sie in einem Verhältnis zueinander wie Zahlen.
Es sei das Verhältnis von A zu C wie das der Zahlen D zu E.
Da C, B kommensurabel sind, stehen auch sie in einem Verhältnis wie Zahlen.
Es sei das Verhältnis von C zu B wie das der Zahlen F zu G.

Zu den Verhältnissen D zu E und F zu G gibt es dann drei Zahlen H, K, L die in fortlaufender Proportion stehen, so dass sich D zu E verhält wie H zu K und sich F zu G verhält wie K zu L [wie VIII.4.].

Da sich A zu C verhält wie D zu E und D zu E sich verhält wie H zu K, verhält sich A zu C wie H zu K. Da sich C zu B verhält wie F zu G und sich F zu G verhält wie K zu L, verhält sich C zu B wie K zu L.

Damit verhält sich aufgrund Gleichheit A zu B wie H zu L [wie V.22.] und es steht A zu B in einem Verhältnis wie die Zahl H zur Zahl L.
Also sind die Größen A, B kommensurabel.

Deshalb sind diejenigen Größen kommensurabel, die zu einer Größe kommensurabel sind, was zu zeigen war.

X.13. *

Ist eine von zwei Größen zu einer weiteren kommensurabel, die andere jedoch inkommensurabel, dann sind die beiden Größen zueinander inkommensurabel.

Wenn von zwei Größen A, B die Größe A zu einer Größe C kommensurabel, die Größe B jedoch inkommensurabel ist, dann, sage ich, sind A und B inkommensurabel.

Denn wenn A und B kommensurabel wären, und A und C kommensurabel sind, dann wären auch C und B kommensurabel.

Da dies der Voraussetzung widerspricht, sind A und B inkommensurabel, was zu zeigen war.

* Fehlt bei Heiberg, sonst vorhanden. Griechischer Text nach F. Peyrard.

X.14. [X.13]

Ist von zwei kommensurablen Größen eine zu einer dritten Größe inkommensurabel, dann ist auch die andere zu ihr inkommensurabel.

Wenn von den beiden kommensurablen Größen A, B die Größe A zur Größe C inkommensurabel ist, dann, sage ich, sind auch B, C inkommensurabel.

Denn wenn B, C kommensurabel sind, und da A, B kommensurabel sind, sind dann auch A, C kommensurabel, was nicht möglich ist, da A, C inkommensurabel sind.
Also sind B, C inkommensurabel.

Deshalb ist dann, wenn von zwei kommensurablen Größen eine zu einer dritten inkommensurabel ist, auch die andere zu ihr inkommensurabel, was zu zeigen war.

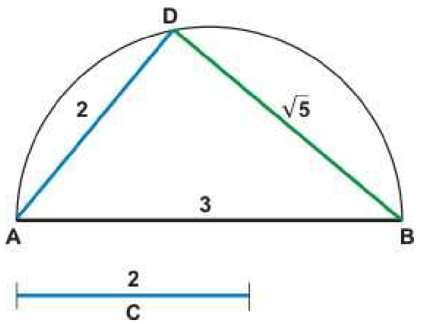
Lemma X.15.:

Zu zwei ungleichen Strecken das Quadrat finden um das das Quadrat über der einen größer ist als das Quadrat über der anderen.

Zu den ungleichen Strecken AB, C, wovon AB die größere ist, soll das Quadrat gefunden werden um das das Quadrat über AB größer ist als das Quadrat über C.

Es ist über AB der Halbkreis ADB zu errichten, in ihn die Strecke AD, die gleich C ist, einzutragen [wie V.1.] und DB zu ziehen.

Offensichtlich ist der Winkel ADB ein rechter und damit das Quadrat über AB gleich den Quadraten über AD und DB zusammen.



Da AD gleich C ist, ist das Quadrat über AB gleich den Quadraten über C und DB zusammen.

Auf gleiche Weise ist das Quadrat zu finden, das gleich den Quadraten über zwei gegebenen Strecken zusammen ist.

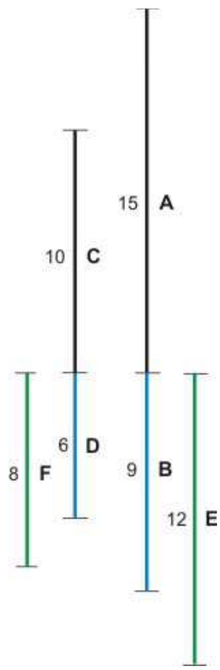
Sind zwei Strecken AD, DB gegeben und soll das Quadrat gefunden werden, das gleich den Quadraten über AD und DB zusammen ist, sind AD und DB so aneinander zu legen, dass sie den rechten Winkel ADB einschließen Dann ist AB zu ziehen.

Es ist dann das Quadrat über AB gleich den Quadraten über AD und DB zusammen, was auszuführen war.

X.15. **[X.14]**

Ist bei vier Strecken in Proportion das Quadrat über der ersten um ein Quadrat größer als das Quadrat über der zweiten, dessen Seite der Länge nach kommensurabel zur ersten Strecke ist, dann ist auch das Quadrat über der dritten um ein Quadrat größer als das Quadrat über der vierten, dessen Seite der Länge nach kommensurabel zur dritten Strecke ist.
Ist dagegen das Quadrat über der ersten um ein Quadrat größer als das Quadrat über der zweiten, dessen Seite der Länge nach inkommensurabel zur ersten Strecke ist, dann ist auch das Quadrat über der dritten Strecke um ein Quadrat größer als das Quadrat über der vierten, dessen Seite der Länge nach inkommensurabel zur dritten Strecke ist.

Wenn die vier Strecken, A, B, C, D in Proportion stehen, sich also A zu B verhält wie C zu D, und das Quadrat über A gleich den Quadraten über B und E zusammen ist, sowie das Quadrat über C gleich den Quadraten über D und F zusammen ist, dann, sage ich, wenn A und E kommensurabel sind, dann sind es auch C und F, sind aber A und E inkommensurabel, dann sind es auch C und F.



Denn da sich A zu B verhält wie C zu D, verhält sich das Quadrat über A zum Quadrat über B wie das Quadrat über C zum Quadrat über D. Das Quadrat über A ist gleich den Quadraten über E und B zusammen, sowie das Quadrat über C gleich den Quadraten über D und F zusammen ist. Somit verhalten sich die Quadrate über E und B zusammen zum Quadrat über B wie die Quadrate über D und F zusammen zum Quadrat über D.

Werden die Verhältnisse verkleinert [wie V. Erklärung 15.], dann verhält sich das Quadrat über E zum Quadrat über B wie das Quadrat über F zum Quadrat über D. Somit verhält sich E zu B wie F zu D. Werden die Verhältnisse umgekehrt, dann verhält sich B zu E wie D zu F.

Es verhält sich A zu B wie C zu D, somit aufgrund Gleichheit A zu E wie C zu F [wie V.22.]. Also sind, wenn A und E der Länge nach kommensurabel sind, auch C und F der Länge nach kommensurabel. Sind aber A und E der Länge nach inkommensurabel, dann sind auch C und F der Länge nach inkommensurabel.

Deshalb ergibt sich das Gesagte bei vier Strecken in Proportion, wenn das Erwähnte gefordert wird, was zu zeigen war.

X.16. **[X.15]**

Werden zwei kommensurable Strecken zusammengesetzt, ist die ganze Strecke zu jeder von beiden kommensurabel, und ist eine aus zwei Strecken zusammengesetzte Strecke zu einer der beiden kommensurabel, dann sind die beiden Strecken kommensurabel.

Wenn die kommensurablen Strecken AB und BC zusammengesetzt werden, dann, sage ich, ist die ganze Strecke AC zu jeder der Strecken AB, BC kommensurabel.

Denn da AB, BC kommensurabel sind, sind sie Vielfache einer Maßeinheit; diese sei D.
Da AB und BC Vielfache von D sind, ist auch AC Vielfache von D. Da AB, BC, AC Vielfache von D sind, sind sie untereinander kommensurabel.
Also ist AC zu jeder der Strecken AB, BC kommensurabel.
Sind AC und AB kommensurabel, dann, sage ich, sind AB und BC kommensurabel.
Denn da AC und AB kommensurabel sind, sind sie Vielfache einer Maßeinheit, diese sei D.
Da CA und AB Vielfache von D sind, ist auch der Rest BC Vielfache von D.

Da AB und BC Vielfache einer Maßeinheit sind, sind AB und BC kommensurabel.

Deshalb ist eine aus zwei kommensurablen Strecken zusammengesetzte Strecke zu jeder der beiden kommensurabel und sind dann, wenn die aus zwei Strecken zusammengesetzte kommensurable Strecke zu einer der beiden kommensurabel ist, beide Strecken kommensurabel, was zu zeigen war.

X.17. [X.16]

Werden zwei inkommensurable Strecken zusammengesetzt, ist die ganze Strecke zu jeder von beiden inkommensurabel, und ist eine aus zwei Strecken zusammengesetzte Strecke zu einer der beiden inkommensurabel, dann sind die beiden Strecken inkommensurabel.

Wenn die inkommensurablen Strecken AB und BC zusammengesetzt werden, dann, sage ich, ist die ganze Strecke AC zu jeder der Strecken AB, BC inkommensurabel.

Denn wenn CA, AB nicht inkommensurabel sind, dann sind sie Vielfache einer Maßeinheit; diese sei D. Da dann CA, AB Vielfache der D sind, ist auch der Rest BC Vielfache von D.
Da dann AB, BC Vielfache von D sind, sind AB, BC kommensurabel, was nicht möglich ist, denn sie sind inkommensurabel.
Also sind CA, AB nicht Vielfache einer Maßeinheit und inkommensurabel. Ebenso ist zu zeigen, dass AC, CB inkommensurabel sind.
Damit ist AC zu jeder der beiden Strecken AB, BC inkommensurabel.

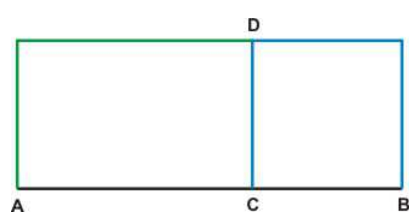
Ist AC zu einer der beiden Strecken AB, BC inkommensurabel, es sei dies zunächst AB, dann, sage ich, sind AB, BC inkommensurabel. Denn wenn AB, BC kommensurabel sind, dann sind sie Vielfache einer Maßeinheit; diese sei D. Da dann AB, BC Vielfache von D sind, ist auch die ganze AC Vielfache von D. Da dann CA, AB Vielfache von D sind, sind CA, AB dann kommensurabel, was nicht möglich ist, denn sie sind inkommensurabel. Also sind AB, BC nicht Vielfache einer Maßeinheit und inkommensurabel.

Deshalb ist eine aus zwei inkommensurablen Strecken zusammengesetzte Strecke zu jeder der beiden inkommensurabel und sind dann, wenn die aus zwei Strecken zusammengesetzte inkommensurable Strecke zu einer der beiden inkommensurabel ist, beide Strecken inkommensurabel, was zu zeigen war.

Lemma X.18.:

Wird von einem Rechteck das Quadrat über einer Seite abgeteilt, dann ist das übrige Rechteck gleich dem Rechteck aus den Abschnitten der geteilten Seite.

Wenn von dem auf der Strecke AB errichteten Rechteck das Quadrat DB abgeteilt wird, dann, sage ich, ist das Rechteck AD gleich dem Rechteck aus AC mit CB.



Es ist DB ein Quadrat und damit DC gleich CB.
Also ergibt sich das Rechteck AD, das sich aus AC mit CD ergibt, auch aus AC mit CB.

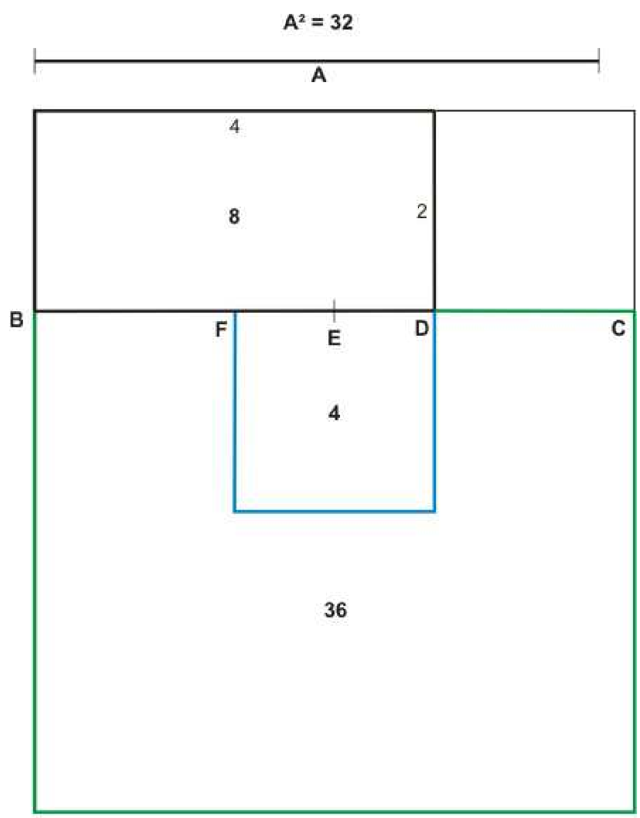
Deshalb ist das Rechteck, das verbleibt, wenn von einem Rechteck das Quadrat über einer Seite abgeteilt wird, gleich dem Rechteck aus den Abschnitten der geteilten Seite.

X.18. **[X.17]**

Wird bei zwei ungleichen Strecken durch Abteilen des Quadrats über einer Seite vom Rechteck über der größeren Strecke, das verringert um das abgeteilte Quadrat gleich einem Viertel des Quadrats über der kleineren ist, die größere Strecke in der Länge nach kommensurable Teile geteilt, dann ist das Quadrat über der größere Strecke um ein Quadrat, dessen Seite der Länge nach kommensurabel zu ihr ist, größer als das Quadrat über der kleineren.

Ist das Quadrat über der größeren von zwei ungleichen Strecken um ein Quadrat, dessen Seite kommensurabel zur größeren Strecke ist, größer als das Quadrat über der kleineren, dann wird durch Abteilen des Quadrats über einer Seite vom Rechteck über der größeren Strecke, das verringert um das abgeteilte Quadrat einem Viertel des Quadrats über der kleineren gleich ist, die geteilte Strecke in der Länge nach kommensurable Teile geteilt.

Wenn von zwei ungleichen Strecken A, BC, die größere BC ist, und BC durch Abteilen eines Quadrats über einer Seite vom Rechteck über BC, das verringert um das abgeteilte Quadrat einem Viertel des Quadrats über A gleich ist, damit BC in der Länge nach kommensurable BD und DC geteilt wird, dann, sage ich, ist das Quadrat über BC um ein Quadrat größer als das Quadrat über A, dessen Seite der Länge nach kommensurabel zu BC ist.



Denn wird BC im Punkt E in zwei gleiche Teile geteilt und dann EF gleich DE eingetragen, dann ist DC gleich BF.

Da BC in E in zwei gleiche und in D in zwei ungleiche Teile geteilt ist, ist das Produkt aus BD mit DC zusammen mit dem Quadrat über ED gleich dem Quadrat über EC [wie II.5.]. Somit ist auch das vierfache Produkt aus BD mit DC zusammen mit dem vierfachen Quadrat über ED gleich dem vierfachen Quadrat über EC. Es ist das Quadrat über A gleich dem vierfachen Produkt aus BD mit DC.

Es ist das Quadrat über DF gleich dem vierfachen Quadrat über DE, denn DF ist gleich dem doppelten DE und das Quadrat über BC ist gleich dem vierfachen Quadrat über EC.
Also sind die Quadrate über A und DF zusammen gleich dem Quadrat über BC. Damit ist das Quadrat über BC um das Quadrat über DF größer als das Quadrat über A.

Da BD und DC der Länge nach kommensurabel sind, sind auch BC und CD der Länge nach kommensurabel. Da CD gleich BF ist, ist BC zu den Strecken BF und CD der Länge nach kommensurabel und damit auch zu der restlichen Strecke DF. Also ist das Quadrat über BC um ein Quadrat größer als das Quadrat über A, dessen Seite der Länge nach kommensurabel zu BC ist.

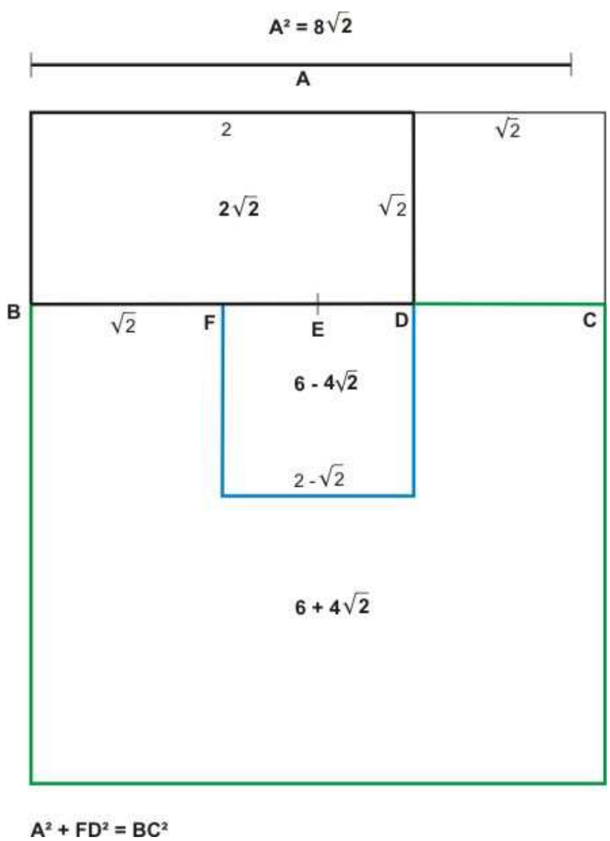
Ist nun das Quadrat über BC um ein Quadrat größer als das Quadrat über A, dessen Seite der Länge nach kommensurabel zu BC ist und wird durch Abteilen eines Quadrats vom Rechteck über BC, das dann einem Viertel des Quadrats über A gleich ist, BC in zwei Teile BD und DC geteilt, dann ist zu zeigen, dass BD und DC der Länge nach kommensurabel sind.
Es ist gezeigt, dass das Quadrat über BC gleich den Quadraten über A und FD zusammen ist. Damit ist das Quadrat über BC um ein Quadrat größer als das Quadrat über A, dessen Seite der Länge nach kommensurabel zu BC ist.
Da BC und FD der Länge nach kommensurabel sind, ist BC zu BF mit DC zusammen der Länge nach kommensurabel und damit zu DC und BD.
Also sind die Strecken BD und DC der Länge nach kommensurabel.

Deshalb ergibt sich das Gesagte bei zwei ungleichen Strecken, wenn das Erwähnte gefordert wird, was zu zeigen war.

X.19. [X.18]

Wird bei zwei ungleichen Strecken durch Abteilen des Quadrats über einer Seite eines Rechtecks über der größeren Strecke, das verringert um das abgeteilte Quadrat gleich einem Viertel des Quadrats über der kleineren ist, die größere Strecke in zwei der Länge nach inkommensurable Teile geteilt, dann ist das Quadrat über der größere Strecke um ein Quadrat, dessen Seite der Länge nach inkommensurabel zu ihr ist, größer als das Quadrat über der kleineren.

Ist das Quadrat über der größeren von zwei ungleichen Strecken um ein Quadrat, dessen Seite inkommensurabel zur größeren Strecke ist, größer als das Quadrat über der kleineren, dann wird durch Abteilen des Quadrats über einer Seite vom Rechteck über der größeren, das verringert um das abgeteilte Quadrat einem Viertel des Quadrats über der kleineren gleich ist, die geteilte Strecke in der Länge nach inkommensurable Teile geteilt.



Wenn von zwei ungleichen Strecken A, BC, die größere BC ist, und BC durch Abteilen eines Quadrats über einer Seite vom Rechteck über BC, das verringert um das abgeteilte Quadrat einem Viertel des Quadrats über A gleich ist, damit BC in der Länge nach inkommensurable BD und DC geteilt wird, dann, sage ich, ist das Quadrat über BC um ein Quadrat größer als das Quadrat über A, dessen Seite der Länge nach inkommensurabel zu BC ist.

Denn wie in X.18. gezeigt, ist das Quadrat über BC gleich den Quadraten über A und FD zusammen und es ist zu zeigen, dass BC, DF der Länge nach inkommensurabel sind.

Da BD und DF der Länge nach inkommensurabel sind, sind auch BC und CD der Länge nach inkommensurabel.

Es ist DC zu den Strecken BF und DC zusammen kommensurabel, also ist BC zu den Strecken BF und DC zusammen der Länge nach inkommensurabel.

Es ist BC zu FD der Länge nach inkommensurabel und das Quadrat über BC gleich den Quadraten über A und FD zusammen, weshalb das Quadrat über BC um eine Quadrat größer als das Quadrat über A ist, dessen Seite zu BC inkommensurabel ist.

Es ist das Quadrat über BC um eine Quadrat größer als das Quadrat über A, dessen Seite zu BC inkommensurabel ist, und wird ein Quadrat vom Rechteck über der größeren abgeteilt, das verringert um das abgeteilte Quadrat einem Viertel des Quadrats über der kleineren gleich ist, dann ist zu zeigen, dass die geteilte Strecke in der Länge nach inkommensurable Teile geteilt ist.

Wie gezeigt, ist das Quadrat über BC gleich den Quadraten über A und FD zusammen.
Da das Quadrat über BC um ein Quadrat größer ist als das Quadrat über A, dessen Seite zu BC inkommensurabel ist, sind BC und FD der Länge nach inkommensurabel.
Damit ist BC zu den Strecken BF und DC zusammen inkommensurabel.
Da BF und DC zusammen zu DC der Länge nach kommensurabel sind, ist BC zur Strecke DC der Länge nach inkommensurabel. Also sind BD und DC der Länge nach inkommensurabel.

Deshalb ergibt sich das Gesagte bei zwei ungleichen Strecken, wenn das Erwähnte gefordert wird, was zu zeigen war.

Anmerkung:

Vorausgesetzt $BC^2 = A^2 + FD^2$, $FD = BC - 2\,DC$ und $BD + DC = BC$

ist $BC^2 = A^2 + (BC - 2\,DC)^2$

damit ist $4\,BD \cdot DC = A^2 + 4\,DC^2$ und $BD \cdot DC = A^2 / 4 + DC^2$.

Sind BD und DC der Länge nach kommensurabel, A beliebig, dann sind auch FD und BC kommensurabel und umgekehrt.
Sind BD und DC der Länge nach inkommensurabel, dann auch FD und BC und umgekehrt.

Lemma X.20.

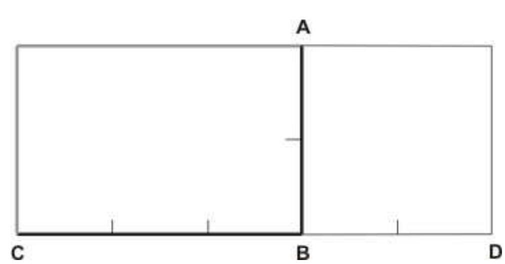
Wie gezeigt, sind alle der Länge nach kommensurablen Strecken auch im Quadrat kommensurabel, aber nicht alle im Quadrat kommensurablen Strecken sind auch kommensurabel der Länge nach, sondern können der Länge nach kommensurabel oder inkommensurabel sein.

Deshalb sind die Quadrate über rationalen Strecken rational und sind die Seiten rationaler Quadrate, die zu einer rationalen Strecke der Länge nach inkommensurabel sind, quadriert rational.

X.20. [X.19]

Ein Rechteck aus den kommensurablen Seiten rationaler oder quadriert rationaler Länge ist rational.

Wenn das Rechteck AC sich aus den der Länge nach kommensurablen Seiten AB, BC mit rationalen oder quadriert rationalen Seitenlängen ergibt, dann, sage ich, ist AC rational.



Denn wenn über AB das Quadrat AD errichtet wird, dann ist AD rational.

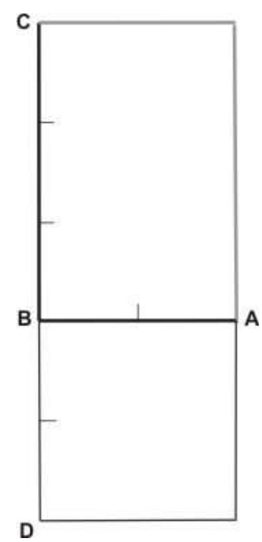
Da die Seiten AB, BC der Länge nach kommensurabel sind und AB gleich BD ist, sind BD, BC der Länge nach kommensurabel.
Es verhält sich BD zu BC wie DA zu AC, also sind DA, AC kommensurabel.
Da DA rational ist, ist auch AC rational.

Deshalb ist das Rechteck aus kommensurablen Seiten rationaler oder quadriert rationaler Länge rational, was zu zeigen war.

X.21. [X.20]

Wird auf einer rationalen oder quadriert rationalen Strecke ein rationales Rechteck errichtet, dann sind seine Länge und Breite der Länge nach kommensurabel.

Wenn das rationale Rechteck AC auf der rationalen oder quadriert rationalen Strecke AB errichtet wird und seine Breite BC ist, dann, sage ich, AB und BC sind der Länge nach kommensurabel.



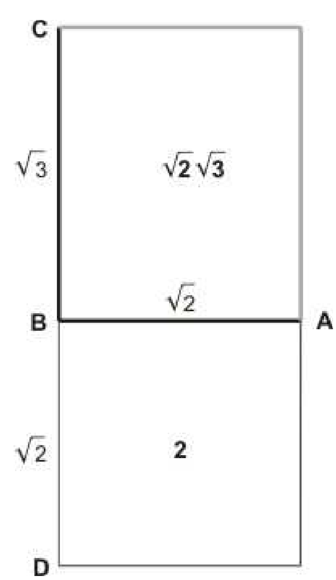
Denn wird über AB das Quadrat AD errichtet, dann ist AD rational.
Da AC rational ist, sind DA, AC kommensurabel. Es verhält sich DA zu AC wie DB zu BC, somit sind DB, BC kommensurabel.
Da DB gleich BA ist, sind AB, BC kommensurabel.
Es ist DB gleich BA, somit sind AB und BC kommensurabel.
Ist AB rational, dann auch BC; ist AB quadriert rational, dann auch BC. Also sind AB, BC der Länge nach kommensurabel.

Deshalb sind Länge und Breite eines rationalen Rechtecks, das auf einer rationalen oder quadriert rationalen Strecke errichtet ist, der Länge nach kommensurabel, was zu zeigen war.

X.22. [X.21]

Ein Rechteck aus quadriert rationalen Strecken, die nur im Quadrat kommensurabel sind, ist irrational; die Seite des Quadrats, das ihm gleich ist, hat eine irrationale Länge, die biquadriert rational genannt wird.

Wenn das Rechteck AC sich aus den quadriert rationalen Seiten AB, BC, die nur im Quadrat kommensurabel sind, ergibt, dann, sage ich, ist AC irrational und die Seite des Quadrats, das ihm gleich ist, hat eine irrationale Länge, die biquadriert rational genannt wird.



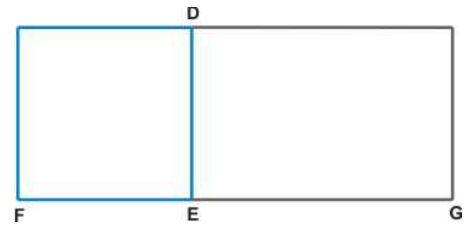
Denn wird über AB das Quadrat AD errichtet, dann ist AD rational.
Da AB und BC der Länge nach inkommensurabel sind, wenn auch im Quadrat kommensurabel, und AB gleich BD ist, sind DB und BC der Länge nach inkommensurabel.
Es verhält sich DB zu BC wie AD zu AC, somit sind DA und AC inkommensurabel. Da DA rational ist, ist AC irrational.

Deshalb hat die Seite des Quadrats, das AC gleich ist, eine irrationale Länge, die biquadriert rational genannt wird, was zu zeigen war.

Lemma X.23.

Die erste von zwei Strecken verhält sich zur zweiten wie das Quadrat über der ersten zum Rechteck aus den beiden Strecken.

Wenn zwei Strecken FE und EG gegeben sind, dann, sage ich, verhält sich FE zu EG wie das Quadrat über FE zum Rechteck GD aus FE mit EG.



Denn wird über FE das Quadrat DF errichtet und über EG das Rechteck GD, dann verhält sich FE zu EG wie FD zu DG.
Da FD das Quadrat über FE ist und DG das Rechteck aus FE mit EG, verhält sich FE zu EG wie das Quadrat über FE zum Rechteck aus FE mit EG.

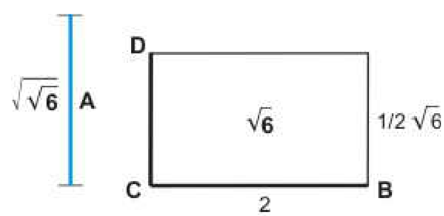
Ebenso ist zu zeigen, dass sich das Rechteck aus GE mit EF zum Quadrat über EF verhält wie GD zu FD und wie GE zu EF, was zu zeigen war.

X.23. [X.22]

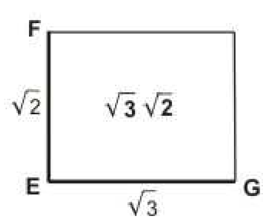
Wird auf einer rationalen Strecke ein Rechteck errichtet, das einem Quadrat über einer biquadriert rationalen Strecke gleich ist, dann sind seine Seiten der Länge nach inkommensurabel.

Wenn auf der rationalen Strecke CB ein Rechteck BD errichtet wird, das dem Quadrat über der biquadriert rationalen Strecke A gleich ist, und seine Breite CD ist, dann, sage ich, sind CD und CB der Länge nach inkommensurabel.

Denn das Quadrat über der biquadriert rationalen Strecke A ist einem Rechteck aus Seiten gleich, die nur im Quadrat kommensurabel sind; es sei dieses GF [wie X.22.].
Da das Quadrat über A dem Rechteck BD gleich ist, ist dann GF gleich BD.



Da die Seiten zweier gleicher und gleichwinkliger Parallelogramme in umgekehrten Verhältnissen zu den Seiten am gleichen Winkel im anderen Parallelogramm stehen [wie VI.14.], verhält sich BC zu EG wie EF zu CD.
Damit verhält sich das Quadrat über BC zum Quadrat über EG wie das Quadrat über EF zum Quadrat über CD.



Die Quadrate über BC und EG sind kommensurabel, denn sie sind quadriert rational, womit auch die Quadrate über EF und CD kommensurabel sind.
Da das Quadrat über EF rational ist, ist auch das Quadrat über CD rational. Es sind EF und EG der Länge nach inkommensurabel, denn sie sind nur im Quadrat kommensurabel.
Da sich EF zu EG verhält wie das Quadrat über EF zum Rechteck aus FE mit EG, ist das Quadrat über EF zum Rechteck aus FE mit EG inkommensurabel.

Da die Quadrate über EF und CD kommensurabel sind, wenn auch nur im Quadrat rational, ist auch das Rechteck aus FE mit EG zum Rechteck aus DC mit CB kommensurabel, denn es ist dem Quadrat über A gleich.

Da sich CD zu CB verhält wie das Quadrat über CD zum Rechteck aus CD mit CB, ist das Quadrat über CD zum Rechteck aus DC mit CB inkommensurabel. Also ist das Quadrat über CD zum Rechteck aus DC mit CB inkommensurabel.

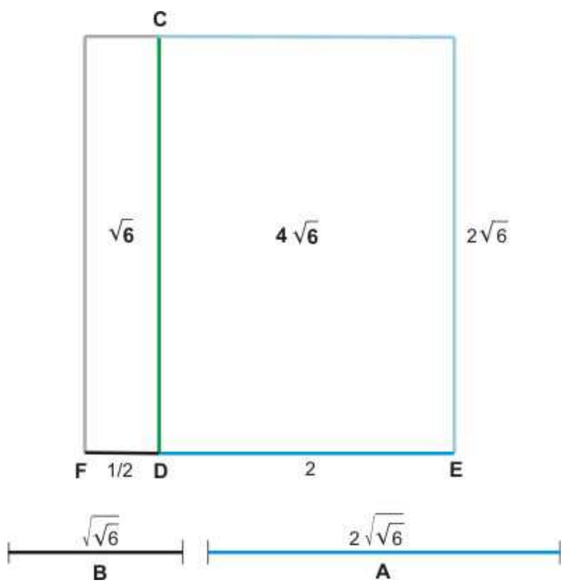
Da sich das Quadrat über CD zum Rechteck aus DC mit CB verhält wie DC zu CB, sind DC und CB der Länge nach inkommensurabel, was zu zeigen war.

X.24. [X.23]

Ist eine biquadriert rationale Strecke zu einer anderen kommensurabel, dann ist diese biquadriert rational.

Wenn die biquadriert rationale Strecke A zur Strecke B kommensurabel ist, dann, sage ich, ist B biquadriert rational.

Denn wird auf einer rationalen Strecke DE das Rechteck EC errichtet, das dem Quadrat über A gleich ist, dann ist seine Breite CD der Länge nach inkommensurabel zu ED.
Wird dann auf CD ein dem Quadrat über B gleiches Rechteck CF errichtet, dann ist seine Breite DF.



Da A und B kommensurabel sind, sind die Quadrate über A und B kommensurabel.
Da das Quadrat über A gleich EC und das Quadrat über B gleich CF ist, sind die Rechtecke EC und CF kommensurabel.
Es verhält sich EC zu CF wie ED zu DF und damit sind ED und DF der Länge nach kommensurabel.
Da ED rational ist und zu DC der Länge nach inkommensurabel, ist auch DF rational und zu DC der Länge nach inkommensurabel.
Somit sind CD und DF nur im Quadrat kommensurabel.

Da die Seite eines Quadrats, das gleich einem Rechteck aus Seiten ist, die nur im Quadrat kommensurabel sind, biquadriert rational ist, ist das Quadrat über B, das gleich dem Rechteck aus CD mit DF ist, ist B biquadriert rational, was zu zeigen war.

Zusatz:

Offensichtlich ist eine Fläche, die einer anderen gleich ist, die biquadriert rational ist, biquadriert rational.

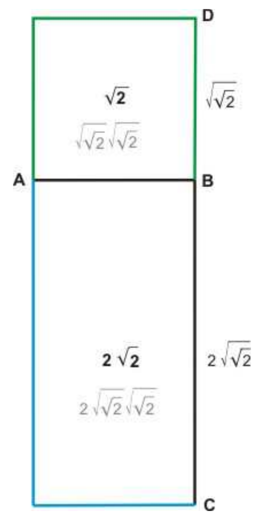
Lemma X.25.

Entsprechend, wie für quadriert rationale Strecken [Lemma X.20.] erklärt, sind nicht alle Strecken, die im Biquadrat kommensurabel sind, auch im Quadrat kommensurabel, wie diese nicht alle der Länge nach kommensurabel sind, aber alle Strecken, die der Länge nach kommensurabel sind, da auch im Quadrat kommensurabel, sind auch im Biquadrat kommensurabel.

Ist eine Strecke der Länge nach kommensurabel zu einer Strecke, dann ist sie auch im Quadrat und im Biquadrat zu ihr kommensurabel, und ist sie nur im Quadrat und nicht der Länge nach zu ihr kommensurabel, dann auch im Biquadrat.

X.25. [X.24]

Ein Rechteck aus biquadriert rationalen Strecken, die der Länge nach kommensurabel sind, ist quadriert rational.



Wenn die biquadriert rationalen Strecken AB, BC der Länge nach kommensurabel sind und das Rechteck AC ergeben, dann, sage ich, ist AC quadriert rational.

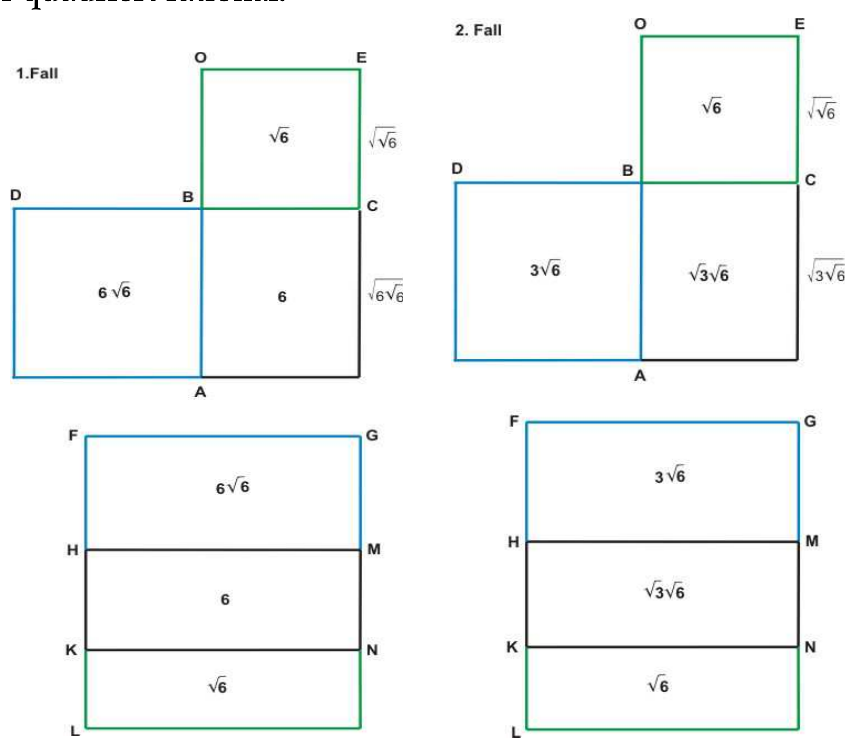
Denn wenn über der biquadriert rationalen Strecke AB das Quadrat AD errichtet wird, ist AD quadriert rational.

Da AB und BC der Länge nach kommensurabel sind und AB gleich BD ist, sind DB und BC der Länge nach kommensurabel.

Da DA quadriert rational ist, ist auch AC quadriert rational, was zu zeigen war.

X.26. [X.25]

Ein Rechteck aus biquadriert rationalen Strecken, die nur im Quadrat kommensurabel sind, ist entweder rational oder quadriert rational.



Wenn die Seiten AB, BC des Rechtecks AC eine biquadriert rationale Länge haben und nur im Quadrat kommensurabel sind, dann, sage ich, ist AC entweder rational oder quadriert rational.

Wenn AD und BE die Quadrate über AB und über BC sind, dann sind diese quadriert rational.

Wird auf der rationalen Strecke FG, ein dem Quadrat AD gleiches Rechteck GH errichtet, dessen Breite dann

FH ist, und auf der Seite HM ein dem Rechteck AC gleiches Rechteck MK errichtet, dessen Breite Seite dann HK ist, weiter auf der Seite KN ein dem Quadrat BE gleiches Rechteck NL errichtet wird, dessen Breite dann KL ist, dann liegen FH, HK, KL nebeneinander auf der gleichen Geraden.

Da AD und BE quadriert rational sind und AD gleich GH, sowie BE gleich NL ist, sind GH und NL zusammengesetzt quadriert rational. Da GH und NL auf FG errichtet sind, sind die Seiten FH und KL zu FG der Länge nach inkommensurabel. Die Quadrate AD und BE sind kommensurabel, somit sind GH und NL kommensurabel.
Es verhält sich GH zu NL wie FH zu KL, somit sind FH und KL der Länge nach kommensurabel.
Damit ist das Produkt aus FH mit KL rational.

Da DB gleich BA und OB gleich BC ist, verhält sich DB zu BC wie AB zu BO. Da sich DB zu BC verhält wie DA zu AC, verhält sich AB zu BO wie AC zu CO.
Damit verhält sich DA zu AC wie AC zu CO.

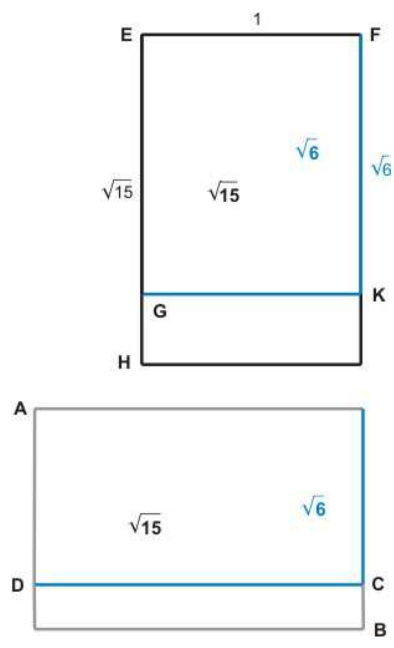
Da AD gleich GH, da AC gleich MK und CO gleich NL ist, verhält sich GH zu MK wie MK zu NL und es verhält sich FH zu HK wie HK zu KL.
Damit ist das Rechteck aus FH mit KL gleich dem Quadrat über HK.
Es sind FH und HK im Quadrat kommensurabel, somit ist das Rechteck HN rational oder quadriert rational. Da HN gleich AC ist, ist auch AC rational oder quadriert rational.

Deshalb ist ein Rechteck aus biquadriert rationalen Strecken, die nur im Quadrat kommensurabel sind, entweder rational oder quadriert rational, was zu zeigen war.

X.27. [X.26]

Eine quadriert rationale Größe ist nicht um eine rationale Größe größer als eine andere quadriert rationale.

Denn wenn doch, dann sei die quadriert rationale Fläche AB um die rationale Fläche DB größer als die quadriert rationale Fläche AC.



Wird auf einer rationalen Strecke EF ein der AB gleiches Rechteck FH errichtet, das dann die Breite EH hat, und wird das der AC gleiche Rechteck FG weggenommen, dann ist der Rest BD gleich dem übrigen KH. Da BD rational ist, ist damit auch KH rational.

Da AB, AC quadriert rational sind und AB gleich FH, sowie AC gleich FG ist, sind dann auch FH, FG quadriert rational. Es sind FH, FG auf der rationalen EF errichtet, somit sind dann HE, EG der Länge nach inkommensurabel zu EF.

Da KH rational und auf der rationalen EF errichtet ist, ist dann GH rational und der Länge nach kommensurabel zu EF. Es ist dann EG zu GH der Länge nach inkommensurabel, jedoch im Quadrat kommensurabel.

Da sich EG zu GH verhält wie das Quadrat über EG zum Rechteck aus EG mit GH [wie Lemma X.23.], ist dann das Quadrat über EG zum Rechteck aus EG mit GH nur im Quadrat kommensurabel.

Es ist damit das Quadrat über EG kommensurabel zu den Quadraten über EG und GH zusammen und das doppelte Rechteck aus EG mit GH ist kommensurabel zum Rechteck aus EG mit GH. Also sind dann die Quadrate über EG und GH zusammen und das doppelte Rechteck aus EG mit GH nur im Quadrat kommensurabel.
Da die Quadrate über EG und GH zusammen mit dem doppelten Rechteck aus EG mit GH gleich dem Quadrat über EH sind, ist EH dann nur im Quadrat kommensurabel zu den Quadraten über EG und GH zusammen. Es ist dann das Quadrat über EH irrational, nach Voraussetzung aber rational, was nicht möglich ist.

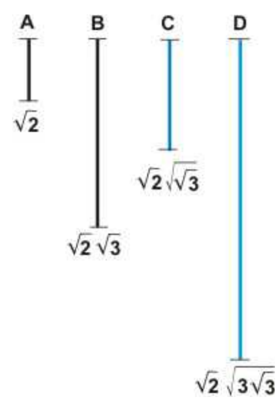
Deshalb ist eine quadriert rationale Größe nicht um eine rationale größer als eine andere quadriert rationale, was zu zeigen war.

X.28. [X.27]

Zwei biquadriert rationale Strecken finden, die nur im Quadrat kommensurabel sind und ein rationales Rechteck ergeben.

Es ist zu zwei quadriert rationalen Strecken A, B eine Strecke C zu suchen, die sich zu A, B verhält wie das mittlere Glied in fortlaufend gleicher Proportion [wie VI.13.].
Dazu ist eine Strecke D zu suchen, so dass sich A zu B verhält wie C zu D [wie VI.12.].

Es sind dann A, B quadriert rational und nur im Quadrat kommensurabel, somit auch das Rechteck aus A mit B, das gleich dem Quadrat über C ist [wie VI.17.]. Es ist dann C biquadriert rational [wie X.22.]. Es verhält sich C zu D wie A zu B, wobei A, B nur im Quadrat kommensurabel sind, also sind C, D nur im Quadrat kommensurabel.
Es ist C biquadriert rational, somit ist auch D biquadriert rational.



Ich sage, dass sie ein rationales Rechteck ergeben.
Denn da sich A zu B verhält wie C zu D, verhält sich, nach Umordnung, A zu C wie B zu D.
Da sich A zu C verhält wie C zu B, verhält sich C zu B wie B zu D.
Also ist das Rechteck aus C mit D gleich dem Quadrat über B.
Da das Quadrat über B rational ist, ist auch das Rechteck aus C mit D rational.

Damit sind zwei biquadriert rationale Strecken gefunden, die nur im Quadrat kommensurabel sind und ein rationales Rechteck ergeben, was auszuführen war.

Anmerkung:

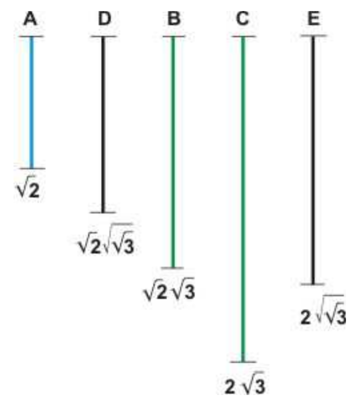
Es sind, zum Beispiel, Strecken der Längen $\sqrt{2\sqrt{3}}$ und $\sqrt{6\sqrt{3}}$ im Quadrat kommensurabel, denn ihre Quadrate verhalten sich wie 1:3.

X.29. **[X.28]**

Zwei biquadriert rationale Strecken finden, die nur im Quadrat kommensurabel sind und ein quadriert rationales Rechteck ergeben.

Es ist zu drei Strecken A, B, C, die nur im Quadrat kommensurabel sind, eine Strecke D zu suchen, die sich zu A, B verhält wie das mittlere Glied in fortlaufend gleicher Proportion [wie VI.13.]. Dazu ist eine Strecke E zu suchen, so dass sich B zu C verhält wie D zu E [wie VI.12.].

Es sind dann A, B quadriert rational und das Rechteck aus A mit B ist gleich dem Quadrat über D [wie VI.17.].
Somit ist D biquadriert rational [wie X.22.].



Da sich D zu E verhält wie B zu C und B, C nur im Quadrat kommensurabel sind, sind auch D, E nur im Quadrat kommensurabel. Da D biquadriert rational ist, ist auch E biquadriert rational. Also haben D, E biquadriert rationale Längen und sind nur im Quadrat kommensurabel.

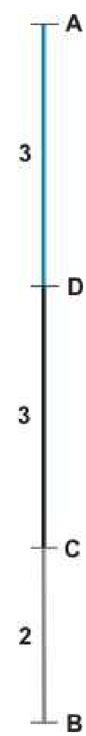
Ich sage, dass sie ein quadriert rationales Rechteck ergeben. Denn da sich B zu C verhält wie D zu E, verhält sich, nach Umordnung, B zu D wie C zu E.

Da sich B zu D verhält wie D zu A und sich D zu A verhält wie C zu E, ist das Rechteck aus A mit C gleich dem Rechteck aus D mit E.
Es ist das Rechteck aus A mit C quadriert rational, somit auch das Rechteck aus D mit E.

Damit sind zwei biquadriert rationale Strecken gefunden, die nur im Quadrat kommensurabel sind und ein quadriert rationales Rechteck einschließen, was auszuführen war.

Lemma X.30.1

Zwei Quadratzahlen finden, deren Summe eine Quadratzahl ist.



Es ist von zwei Zahlen AB, BC, die entweder beide gerade oder beide ungerade sind, die zweite von der ersten zu subtrahieren.
Da von einer geraden Zahl eine gerade subtrahiert, ebenso wie eine ungerade von einer ungeraden, ein gerader Rest bleibt, ist der Rest AC gerade.
Es ist somit AC in D in zwei gleiche Teile zu teilen.

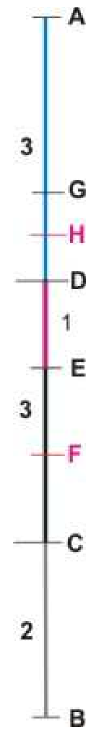
Sind AB, BC ähnliche Produkte oder zwei Quadratzahlen, die ja ohnehin ähnliche Produkte sind, dann ist das Produkt aus AB mit BC zusammen mit der Quadratzahl aus CD gleich der Quadratzahl aus BD [wie II.6.].

Das Produkt aus AB mit BC ist eine Quadratzahl, da gezeigt wurde, dass das Produkt ähnlicher Produkte eine Quadratzahl ist [wie IX.1.].
Damit sind zwei Quadratzahlen gefunden, nämlich das Produkt aus AB mit BC und die Quadratzahl aus CD, die zusammen die Quadratzahl aus BD ergeben, was zu zeigen war.

Offensichtlich sind damit die Quadrate über BD und CD gefunden, deren Differenz das Produkt aus AB mit BC ebenfalls eine Quadratzahl ist, wenn AB, BC ähnliche Produkte sind. Sind jedoch AB, BC keine ähnlichen Produkte, dann ist die Differenz der Quadratzahlen aus BD und aus DC, nämlich das Produkt aus AB mit BC, keine Quadratzahl.

Lemma X.30.2

Zwei Quadratzahlen finden, deren Summe keine Quadratzahl ist. Ist, wie oben, das Produkt aus AB mit BC eine Quadratzahl und ist CA gerade und in D in zwei gleiche Teile geteilt, dann ist das Produkt aus AB mit BC zusammen mit der Quadratzahl aus CD gleich der Quadratzahl aus BD.



Es ist ebenso das Produkt aus AB mit BC und die Quadratzahl aus CD zusammen gleich der Quadratzahl aus BD. Wird CD um DE, das gleich Eins ist, verkleinert, dann ist das Produkt aus AB mit BC und die Quadratzahl aus CE zusammen kleiner als die Quadratzahl aus BD.

Ich sage, dann ist das Produkt aus AB mit BC, das eine Quadratzahl ist, zusammen mit der Quadratzahl aus CE keine Quadratzahl.

Denn ergibt sich eine Quadratzahl, dann ist sie gleich oder kleiner als die Quadratzahl aus BE, aber nicht größer, da sich BE aus BD durch Subtraktion von Eins ergibt.

Ist nun das Produkt aus AB mit BC zusammen mit der Quadratzahl aus CE gleich der Quadratzahl aus BE, dann ist, wenn GA gleich dem doppelten DE und AC gleich dem doppelten CD ist, der Rest GC gleich dem doppelten Rest EC.
Also wird dann GC in E in zwei gleiche Teile geteilt.
Damit ist dann das Produkt aus GB mit BC zusammen mit der Quadratzahl aus CE gleich der Quadratzahl aus BE. Da das Produkt aus AB mit BC zusammen mit der Quadratzahl aus CE gleich der Quadratzahl aus BE ist, ist dann das Produkt aus GB mit BC zusammen mit der Quadratzahl aus CE gleich dem Produkt aus AB mit BC zusammen mit der Quadratzahl aus CE. Von beidem die gleich Quadratzahl über CE subtrahiert, ist dann AB gleich GB, was nicht möglich ist.
Deshalb ist das Produkt aus AB mit BC zusammen mit der Quadratzahl aus CE nicht gleich der Quadratzahl aus BE.

Ist aber das Produkt aus AB mit BC zusammen mit der Quadratzahl aus CE gleich der Quadratzahl aus BF, dann ist, wenn HA gleich dem doppelten DF und HC gleich dem doppelten CF ist, CH in F in zwei gleiche Teile geteilt.
Damit ist dann das Produkt aus HB mit BC zusammen mit der Quadratzahl aus FC gleich der Quadratzahl aus BF. Da das Produkt aus AB mit BC zusammen mit der Quadratzahl aus CE gleich der Quadratzahl aus BF ist, ist das Produkt aus HB mit BC zusammen mit der Quadratzahl aus CF gleich dem Produkt aus AB mit BC zusammen mit der Quadratzahl aus CE, was nicht möglich ist.
Also ist das Produkt aus AB mit BC zusammen mit der Quadratzahl aus CE nicht kleiner als die Quadratzahl aus BE und, wie gezeigt, auch nicht gleich ihr.

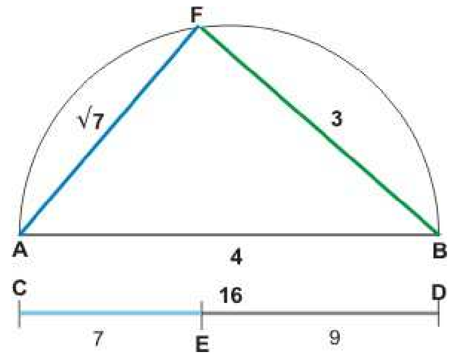
Deshalb ist das Produkt aus AB mit BC zusammen mit der Quadratzahl aus CE keine Quadratzahl, was zu zeigen war.

X.30. [X.29]

Zwei im Quadrat kommensurable Strecken finden, deren größere im Quadrat um ein Quadrat über einer zu ihr der Länge nach kommensurablen Strecke größer ist als das Quadrat über der kleineren.

Es seien eine rationale Strecke AB und zwei Quadratzahlen CD, DE gegeben, deren Differenz CE keine Quadratzahl ist. Es ist dann über AB der Halbkreis AFB zu schlagen, so dass sich DC zu CE verhält wie das Quadrat über BA zum Quadrat über AF. Dann ist FB zu ziehen.

Da sich das Quadrat über BA zum Quadrat über AF verhält wie DC zu CE und das Verhältnis der Quadrate über BA und über AF gleich dem Verhältnis der Strecken DC und CE, sind die Quadrate über BA und AF kommensurabel.



Es ist die Quadratzahl aus AB rational, also auch die Quadratzahl aus AF. Da sich DC zu CE nicht verhält wie eine Quadratzahl zu einer anderen, stehen auch die Quadratzahlen aus BA und AF nicht in einem Verhältnis wie eine Quadratzahl zu einer anderen.

Es sind AB, AF der Länge nach inkommensurabel, jedoch im Quadrat kommensurabel.
Da sich DC zu CE verhält wie das Quadrat über BA zum Quadrat über AF, verhalten sich die abgeteilten Größen CD zu DE wie das Quadrat über AB zum Quadrat über BF [wie V.19. Zusatz].
Es verhält sich CD zu DE wie eine Quadratzahl zu einer anderen, somit verhält sich auch das Quadrat über AB zum Quadrat über BF wie eine Quadratzahl zu einer anderen.

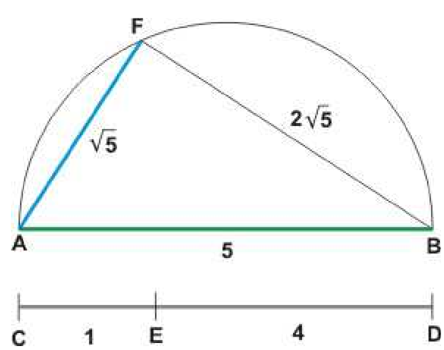
Also sind AB, BF der Länge nach kommensurabel [wie X.9.]. Da das Quadrat über AB gleich den Quadraten über AF und FB zusammen ist, ist das Quadrat über AB um das Quadrat über einer Strecke größer als das Quadrat über AF, die zu BF kommensurabel ist.

Damit sind zwei im Quadrat kommensurable Strecken BA, AF gefunden, so dass das Quadrat über AB um ein Quadrat über einer zu AB kommensurablen Strecke größer ist als das Quadrat über AF, was auszuführen war.

X.31. [X.30]

Zwei im Quadrat kommensurable Strecken finden, deren größere im Quadrat um ein Quadrat über einer zu ihr der Länge nach inkommensurablen Strecke größer ist als das Quadrat über der kleineren.

Es seien eine rationale Strecke AB und zwei Quadratzahlen CE, ED gegeben, deren Summe CD keine Quadratzahl ist. Es ist dann über AB der Halbkreis AFB zu schlagen und AF so einzutragen, dass sich DC zu CE verhält wie das Quadrat über BA zum Quadrat über AF. Dann ist FB zu ziehen.



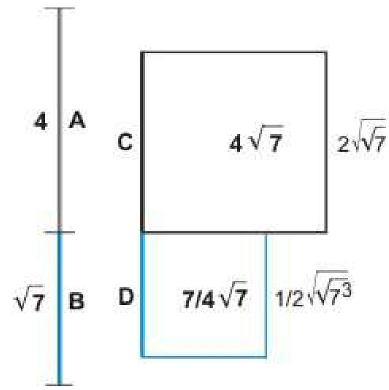
Auf gleiche Weise wie im Vorhergehenden ist zu zeigen, dass BA, AF im Quadrat kommensurabel sind. Da sich DC zu DE verhält wie das Quadrat über BA zum Quadrat über AF, verhält sich CD zu DE wie das Quadrat über BA zum Quadrat über BF [wie V.19.].

Da sich CD zu DE nicht verhält wie eine Quadratzahl zu einer anderen, verhält sich auch das Quadrat über AB zum Quadrat über BF nicht wie eine Quadratzahl zu einer anderen. Also sind AB, BF der Länge nach inkommensurabel und es ist das Quadrat über AB gleich den Quadraten über AF und FB zusammen.

Damit sind zwei im Quadrat kommensurable Strecken AB, AF gefunden, wobei das Quadrat über AB um das Quadrat über FB größer ist als das Quadrat über AF und die Strecke FB der Länge nach inkommensurabel zu AB ist, was auszuführen war.

X.32. [X.31]

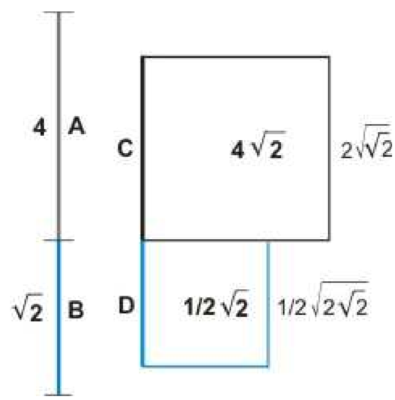
Zwei biquadriert rationale Strecken finden, die nur im Quadrat kommensurabel sind und ein rationales Rechteck ergeben, so dass das Quadrat über der größeren um ein Quadrat, dessen Seite der Länge nach kommensurabel zur größeren ist, größer ist als das Quadrat über der kleineren.



Es seien zwei Strecken quadriert rationaler Länge A, B gegeben, die nur im Quadrat kommensurabel sind, so dass das Quadrat über A um ein Quadrat über einer zu A der Länge nach kommensurablen Strecke größer ist als das Quadrat über B [wie X.30.].

Das Quadrat über C sei gleich dem Produkt aus A mit B.
Da das Produkt aus A mit B quadriert rational ist und ebenso das Quadrat über C, ist C biquadriert rational. Es ist dann ein D zu wählen so, dass das Produkt aus C mit D gleich dem Quadrat über B ist. Da das Quadrat über B rational ist, ist auch das Produkt aus C mit D rational. Es verhält sich A zu B wie das Produkt aus A mit B zum Quadrat über B. Da das Quadrat über C gleich dem Produkt aus A mit B und da das Quadrat über B gleich dem Produkt aus C mit D ist, verhält sich A zu B wie das Quadrat über C zum Produkt aus C mit D.

Es verhält sich das Quadrat über C zum Produkt aus C mit D wie C zu D [wie Lemma X.23.], damit verhält sich A zu B wie C zu D.



Da A, B im Quadrat kommensurabel sind, sind dies auch C, D. Es ist die Länge von C biquadriert rational, also ist auch die Länge von D biquadriert rational.
Da sich A zu B verhält wie C zu D und da das Quadrat über A um ein Quadrat, dessen Seite zu A der Länge nach kommensurabel ist, größer als das Quadrat über B ist, ist auch das Quadrat über C um ein Quadrat, dessen Seite zu C der Länge nach kommensurabel ist, größer als das Quadrat über D.

Damit sind zwei biquadriert rationale Strecken C, D gefunden, die im Quadrat kommensurabel sind und ein rationales Rechteck einschließen, wobei das Quadrat über C um ein Quadrat, dessen Seite der Länge nach zu C kommensurabel ist, größer ist als das Quadrat über D.

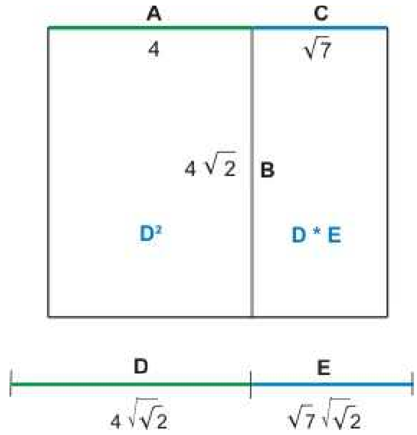
Zusatz: **Ebenso ist zu zeigen, dass das Quadrat über C um ein Quadrat, dessen Seite zu C inkommensurabel ist, größer ist als das Quadrat über D, wenn das Quadrat über A um ein Quadrat, dessen Seite zu A inkommensurabel ist, größer ist als das Quadrat über B.**

Anmerkung:

Eine Strecke der Länge $3/2 \cdot 7^{1/4}$ ist, zum Beispiel, kommensurabel zur Strecke der Länge $2 \cdot 7^{1/4}$, denn die Längen dieser Strecken verhalten sich wie 3 : 4.

<u>X.33.</u> [X.32]

Zwei biquadriert rationale Strecken finden, die nur im Quadrat kommensurabel sind und ein quadriert rationales Rechteck ergeben, so dass das Quadrat über der größeren um ein Quadrat, dessen Seite der Länge nach kommensurabel zur größeren ist, größer ist als das Quadrat über der kleineren.



Es seien drei Strecken quadriert rationaler Länge A, B, C gegeben, die untereinander nur im Quadrat kommensurabel sind, wobei das Quadrat über A um ein Quadrat über einer zu A der Länge nach kommensurablen Strecke größer ist als das Quadrat über C [wie X.30.].

Das Quadrat über D sei gleich dem Rechteck aus A mit B.

Da das Quadrat über D quadriert rational ist, ist D biquadriert rational [wie X.22.].

Das Rechteck aus D mit E sei gleich dem Rechteck aus B mit C.

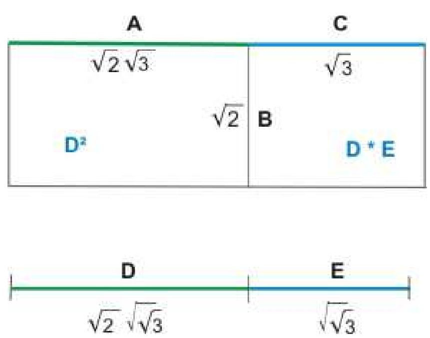
Da sich das Rechteck aus A mit B zum Rechteck aus B mit C verhält wie die Strecke A zu C und da das Quadrat über D gleich dem Rechteck aus A mit B ist und das Rechteck aus D mit E gleich dem Rechteck aus B mit C, verhält sich A zu C wie das Quadrat über D zum Rechteck aus D mit E. Da sich das Quadrat über D zum Rechteck aus D mit E verhält wie D zu E, verhält sich A zu C wie D zu E. Es sind A, C nur im Quadrat kommensurabel, also sind auch D, E nur im Quadrat kommensurabel.

Die Länge der Strecke D ist biquadriert rational, damit auch die Länge der Strecke E.
Da sich A zu C verhält wie D zu E und das Quadrat über A um ein Quadrat größer ist als das Quadrat über C, dessen Seite der Länge nach kommensurabel zu A ist, ist auch das Quadrat über D um ein Quadrat größer als das Quadrat über E, dessen Seite der Länge nach kommensurabel zu D ist [wie X.15.].

Ich sage nun, das Rechteck aus D mit E ist quadriert rational.
Denn da das Rechteck aus B mit C gleich dem Rechteck aus D mit E ist, und das Rechteck aus B mit C quadriert rational ist, ist auch das Rechtecks aus D mit E quadriert rational.

Damit sind zwei biquadriert rationale Strecken D, E gefunden, die nur im Quadrat kommensurabel sind und ein quadriert rationales Rechteck ergeben, wobei das Quadrat über D um ein Quadrat, dessen Seite der Länge nach kommensurabel zu D ist, größer ist als das Quadrat über E.

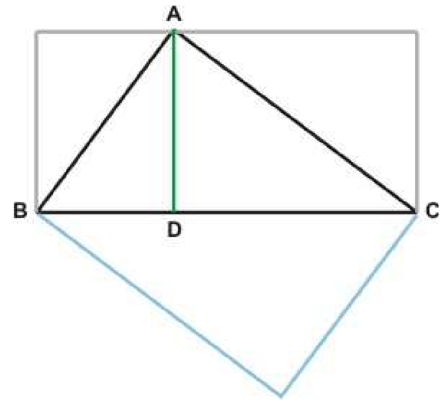
Zusatz: **Ebenso ist zu zeigen, dass das Quadrat über D um ein Quadrat, dessen Seite der Länge nach zu D inkommensurabel ist, größer als das Quadrat über E ist, wenn das Quadrat über A um ein Quadrat, dessen Seite der Länge nach zu A inkommensurabel ist, größer als das Quadrat über C ist.**



Lemma X.34.

Wird im Dreieck ABC mit rechtem Winkel in A die Senkrechte AD errichtet, dann, sage ich,
ist das Rechteck aus CB mit BD gleich dem Quadrat über BA,
ist das Rechteck aus BC mit CD gleich dem Quadrat über CA,
ist das Rechteck aus BD mit DC gleich dem Quadrat über AD und
ist das Rechteck aus BC mit AD gleich dem Rechteck aus BA mit AC.

Denn es ist das Rechteck aus CB mit BD gleich dem Quadrat über BA, wenn im rechtwinkligen Dreieck vom rechten Winkel aus auf der Grundseite die Senkrechte AD errichtet wird, da die Dreiecke ABD und ADC dem ganzen Dreieck ABC ähnlich sind.



Da ABC dem ABD ähnlich ist, verhält sich CB zu BA wie BA zu BD, womit das Rechteck aus CB mit BD dem Quadrat über AB gleich ist [wie VI.17.].

Aus den gleichen Gründen ist das Rechteck aus BC mit CD gleich dem Quadrat über AC.

Da sich im rechtwinkligen Dreieck die vom rechten Winkel auf der Grundseite errichtete Senkrechte wie das mittlere Glied in fortlaufend gleicher Proportion mit den beiden Abschnitten der Grundseite verhält [wie VI.8. Zusatz], verhält sich BD zu DA wie AD zu DC und damit ist das Rechteck aus BD mit DC gleich dem Quadrat über DA.

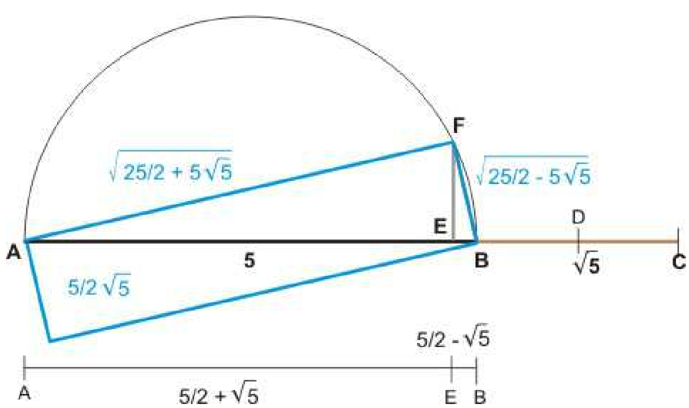
Ich sage, das Rechteck aus BC mit AD ist gleich dem Rechteck BA mit AC.
Denn da die Dreiecke ABC und ABD ähnlich sind, verhält sich BC zu CA wie BA zu AD, womit das Rechteck aus BC mit AD gleich dem Rechteck aus BA mit AC ist [wie VI.16.].

Was zu zeigen war.

X.34. [X.33]

Zwei im Quadrat inkommensurable Strecken finden, deren Summe der Quadrate rational ist und die ein quadriert rationales Rechteck ergeben.

Es seien zwei im Quadrat kommensurable Strecken AB, BC gegeben, deren größere AB, im Quadrat um ein Quadrat über einer zu ihr der Länge nach inkommensurablen Strecke größer ist als das Quadrat über der kleineren BC [wie X.31.].



Es ist BC in D zwei gleiche Teile zu teilen und über AB ein Parallelogramm zu errichten, das vermindert um ein Quadrat gleich dem Quadrat über BD oder DC ist [wie VI.29.].
Es sei dies das Rechteck aus AE mit EB. Es ist dann über AB der Halbkreis AFB zu schlagen, in E die Senkrechte EF auf AB zu errichten und AF und FB zu ziehen.

Da AB, BC ungleiche Strecken sind, wobei das Quadrat über AB um ein Quadrat größer ist als das Quadrat über BC, dessen Seite der Länge nach zu AB inkommensurabel ist, und da über AB ein Rechteck errichtet ist, das verringert um ein Quadrat einem Viertel des Quadrats über BC, das ist das Quadrat über der Hälfte von BC, gleich ist und sich aus AE mit EB ergibt, deshalb ist AE inkommensurabel zu EB [wie X.19.].

Es verhält sich AE zu EB wie das Rechteck aus BA mit AE zum Rechteck aus AB mit BE. Da das Rechteck aus BA mit AE gleich dem Quadrat über AF und da das Rechteck aus AB mit BE gleich dem Quadrat über BF ist, ist das Quadrat über AF zum Quadrat über FB inkommensurabel. Somit sind AF, FB im Quadrat inkommensurabel.

Es ist AB quadriert rational, damit ist das Quadrat über AB rational und ist das Quadrat über AF mit dem Quadrat über FB zusammen rational. Da das Rechteck aus AE mit EB gleich dem Quadrat über EF und, wie errichtet, gleich dem Quadrat über BD ist, ist FE gleich BD und ist BC gleich dem Doppelten von FE.

Damit ist das Rechteck aus AB mit BC zum Rechteck aus AB mit EF kommensurabel.

Da das Rechteck aus AB mit BC quadriert rational ist, ist auch das Rechteck aus AB mit EF quadriert rational.

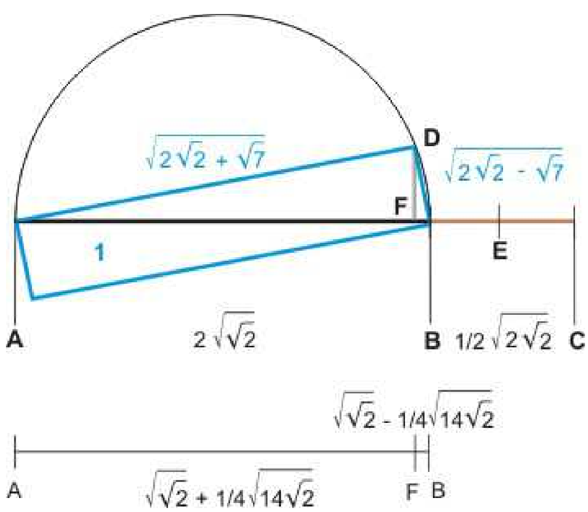
Da das Rechteck aus AB mit EF gleich dem Rechteck aus AF mit FB ist, ist somit auch das Rechteck mit den Seiten AF und FB quadriert rational, jedoch sind die Quadrate über den Seiten zusammen rational, wie gezeigt.

Damit sind zwei im Quadrat inkommensurable Strecken AF, FB gefunden, deren Summe der Quadrate rational ist und die ein quadriert rationales Rechteck ergeben, was auszuführen war.

X.35. [X.34]

Zwei im Quadrat inkommensurable Strecken finden, deren Summe der Quadrate quadriert rational ist und die ein rationales Rechteck ergeben.

Es seien zwei biquadriert rationale, nur im Quadrat kommensurable Strecken AB, BC gegeben, die ein rationales Rechteck ergeben und deren größere AB, im Quadrat um ein Quadrat über einer zu ihr der Länge nach inkommensurablen Strecke größer ist als das Quadrat über der kleineren BC [wie X.32. Zusatz].



Es ist über AB der Halbkreis ADB zu schlagen, die Strecke BC in E in zwei gleiche Teile zu teilen und auf AB ein Parallelogramm zu errichten, das vermindert um ein Quadrat gleich dem Quadrat über BE ist [wie VI.28.].
Es sei dies das Rechteck aus AF mit FB. Dadurch sind die Strecken AF, FB der Länge nach inkommensurabel.
Im Punkt F ist dann auf AB die Senkrechte FD zu errichten und AD, DB zu ziehen.

Da AF, FB inkommensurabel sind, ist auch das Rechteck aus BA mit AF zum Rechteck aus AB mit BF inkommensurabel.

Das Rechteck aus BA mit AF ist gleich dem Quadrat über AD und das Rechteck aus AB mit BF ist gleich dem Quadrat über DB.
Also ist das Quadrat über AD zum Quadrat über DB inkommensurabel.

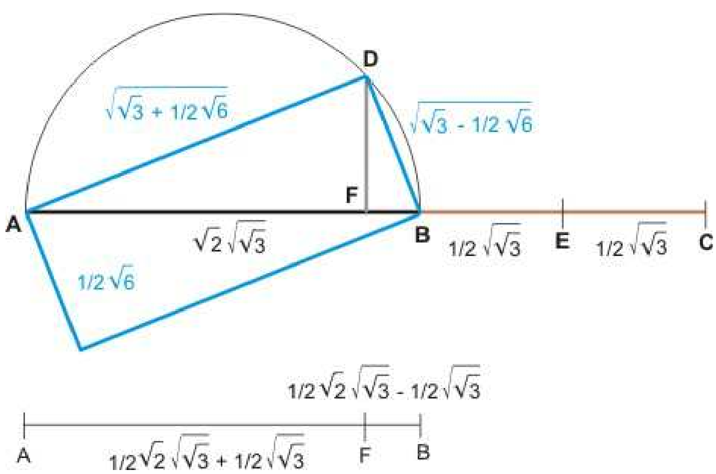
Da das Quadrat über AB quadriert rational ist, sind die Quadrate über AD und DB zusammen quadriert rational.
Die Strecke BC ist das Doppelte der Strecke DF und damit ist das Rechteck aus AB mit BC gleich dem Doppelten des Rechtecks aus AB mit FD.
Es ist das Rechteck aus AB mit BC rational, damit ist das Rechteck aus AB mit FD rational.
Da das Rechteck aus AB mit FD gleich dem Rechteck aus AD mit DB ist, ist auch das Rechteck aus AD mit DB rational.

Damit sind zwei im Quadrat inkommensurable Strecken AD, DB gefunden, deren Summe der Quadrate quadriert rational ist und die ein rationales Rechteck ergeben, was auszuführen war.

X.36. [X.35]
Zwei im Quadrat inkommensurable Strecken finden, deren Summe der Quadrate quadriert rational ist und die ein quadriert rationales Rechteck ergeben, das zur Summe der Quadrate inkommensurabel ist.

Es seien zwei biquadriert rationale, nur im Quadrat kommensurable Strecken AB, BC gegeben, die ein quadriert rationales Rechteck ergeben und deren größere AB, im Quadrat um ein Quadrat über einer zu ihr der Länge nach inkommensurablen Strecke größer ist als das Quadrat über der kleineren BC [wie X.33. Zusatz].
Es ist über AB der Halbkreis ADB zu schlagen und das übrige so auszuführen wie oben.

Da AF, FB der Länge nach inkommensurabel sind, sind AD, DB im Quadrat inkommensurabel.
Da das Quadrat über AB quadriert rational ist, ist auch die Summe der Quadrate über AD und DB quadriert rational.
Es ist das Rechteck aus AF mit FB gleich dem Quadrat über BE und gleich dem Quadrat über DF, somit ist BE gleich DF.



Die Strecke BC ist das Doppelte der Strecke FD, womit das Rechteck aus AB mit BC gleich dem doppelten Rechteck aus AB mit FD ist.

Da das Rechteck aus AB mit BC quadriert rational ist, ist auch das Rechteck aus AB mit FD quadriert rational.

Das Rechteck aus AB mit FD ist gleich dem Rechteck aus AD mit DB, womit das Rechteck aus AD mit DB quadriert rational ist.

Da AB, BC der Länge nach inkommensurabel, jedoch CB, BE kommensurabel sind, sind AB, BE der Länge nach inkommensurabel.

Das Quadrat über AB ist damit inkommensurabel zum Rechteck aus AB mit BE.

Die Summe der Quadrate über AD und DB ist gleich dem Quadrat über AB, das Rechteck aus AB mit FD ist gleich dem Rechteck aus AB mit BE und gleich dem Rechteck aus AD mit DB, also ist die Summe der Quadrate über AD und DB zum Rechteck aus AD mit DB inkommensurabel.

Damit sind zwei im Quadrat inkommensurable Strecken AD, DB gefunden, deren Summe der Quadrate quadriert rational ist und die ein quadriert rationales Rechteck ergeben, das zur Summe der Quadrate inkommensurabel ist, was auszuführen war.