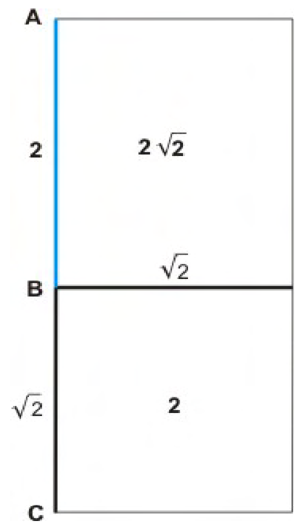
Euklid: Stoicheia.

Buch X. 2.Teil.

X.37 [X.36]

Werden zwei nur im Quadrat kommensurable Strecken zusammengesetzt, dann ist die ganze Strecke irrational und wird eine binomische Strecke genannt.



Wenn zwei nur im Quadrat kommensurable Strecken AB, BC zusammengesetzt werden, dann, sage ich, ist die ganze Strecke AC eine binomische Strecke.

Denn da AB, BC der Länge nach inkommensurabel sind und sich AB zu BC verhält wie das Rechteck aus AB mit BC zum Quadrat über BC, ist das Rechteck aus AB mit BC zum Quadrat über BC inkommensurabel. Da das Rechteck aus AB mit BC zum doppelten Rechteck aus AB mit BC kommensurabel ist und auch die Summe der Quadrate über AB und BC zum Quadrat über BC kommensurabel ist, denn AB, BC sind im Quadrat kommensurabel, deshalb ist das doppelte Rechteck aus AB mit BC zur Summe der Quadrate über AB und BC inkommensurabel.

Beides zusammen ergibt das Quadrat über AC [wie II.4.], das somit zur Summe der Quadrate über AB und BC inkommensurabel ist.

Die Summe der Quadrate über AB und BC ist rational, jedoch das Quadrat über AC irrational, deshalb wird AC binomisch genannt, was zu zeigen war.

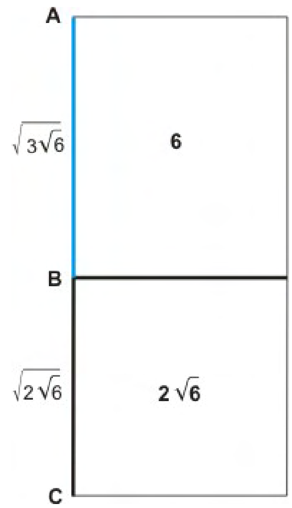
Anmerkung: in X.37, X.38 und X.39 ist:
$a + b = (p + 2q)^{1/2}$ wenn $p = a^2 + b^2$ und $2q = 2ab$. ($a = AB$, $b = BC$).
Dabei ist wegen Lemma X.61 stets $p > 2q$.

Beispiele: $2 + 2^{1/2} = (6 + 4 \cdot 2^{1/2})^{1/2}$, $2^{1/2} + 3^{1/2} = (5 + 2 \cdot 6^{1/2})^{1/2}$.

Beispiel des Commandinus: $2 + 3^{1/2} = (7 + 48^{1/2})^{1/2} = (7 + 4 \cdot 3^{1/2})^{1/2}$.

X.38. [X.37]

Werden zwei biquadriert rationale Strecken zusammengesetzt, die im Quadrat kommensurabel sind und ein rationales Rechteck ergeben, dann ist die ganze Strecke irrational und wird binomisch primär irrational genannt.



Wenn zwei biquadriert rationale Strecken AB, BC, die im Quadrat kommensurabel sind und ein rationales Rechteck ergeben, zusammengesetzt werden, dann, sage ich, ist die ganze Strecke AC irrational.

Denn da AB, BC der Länge nach inkommensurabel sind, ist die Summe der Quadrate über AB und BC zum doppelten Rechteck aus AB mit BC inkommensurabel. Beides zusammen, nämlich die Summe aus den Quadraten über AB und BC und dem doppelten Rechteck aus AB mit BC, die gleich dem Quadrat über AC ist, ist somit inkommensurabel zum Rechteck aus AB mit BC.
Da das Rechteck aus AB mit BC nach Voraussetzung rational ist, ist das Quadrat über AC irrational. Also ist auch AC irrational.

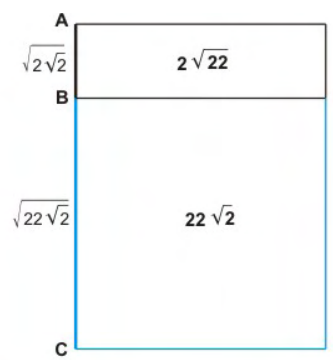
Deshalb ist die irrationale Strecke AC binomisch primär irrational, was zu zeigen war.

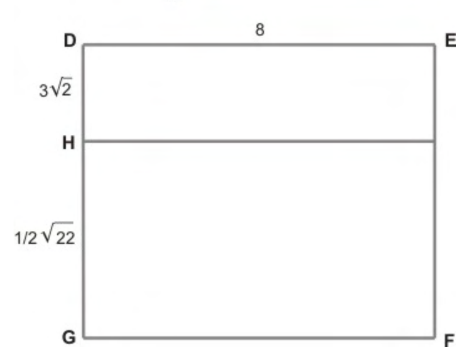
Beispiel: $(3 \cdot 6^{1/2})^{1/2} + (2 \cdot 6^{1/2})^{1/2} = (5 \cdot 6^{1/2} + 12)^{1/2}$, wobei $(3 \cdot 6^{1/2})^{1/2} \cdot (2 \cdot 6^{1/2})^{1/2} = 6$.

X.39. [X.38]

Werden zwei biquadriert rationale Strecken zusammengesetzt, die im Quadrat kommensurabel sind und ein quadriert rationales Rechteck ergeben, dann ist die ganze Strecke irrational und wird binomisch sekundär irrational genannt.

Wenn zwei biquadriert rationale Strecken AB, BC, die im Quadrat kommensurabel sind und ein quadriert rationales Rechteck ergeben, zusammengesetzt werden, dann, sage ich, ist AC irrational.





Denn wird auf der rationalen Strecke DE ein dem Quadrat über AC gleiches Rechteck DF errichtet, das dann die Seite DG hat, dann ist, da das Quadrat über AC gleich der Summe aus den Quadraten über AB und BC und dem doppelten Rechteck aus AB mit BC ist, das auf DE errichtete Rechteck EH ist gleich dem Quadrat über AB und dem Quadrat über BC zusammen und ist das Rechteck HF gleich dem doppelten Rechteck aus AB mit BC.

Da jede der beiden Strecken AB, BC biquadriert rational ist, sind die Summe der Quadrate über AB und BC quadriert rational.
Das doppelte Rechteck aus AB mit BC ist, entsprechend der Voraussetzung, quadriert rational.

Da die Summe der Quadrate über AB und BC gleich EH und das doppelte Rechteck aus AB mit BC gleich FH ist, sind die Rechtecke EH, FH quadriert rational.

Sie sind auf der rationalen Strecke DE errichtet, womit ihre Seiten DH, HG quadriert rational und inkommensurabel zu DE sind.
Es sind AB, BC der Länge nach inkommensurabel und es verhält sich AB zu BC wie das Quadrat über AB zum Rechteck aus AB mit BC, somit ist das Quadrat über AB zum Rechteck aus AB mit BC inkommensurabel.

Das Quadrat über AB ist kommensurabel zur Summe der Quadrate über AB und BC und das Rechteck aus AB mit BC ist kommensurabel zum doppelten Rechteck aus AB mit BC, also ist die Summe der Quadrate über AB und BC inkommensurabel zum doppelten Rechteck aus AB mit BC.
Da EH gleich der Summe der Quadrate über AB und BC und da HF gleich dem doppelten Rechteck aus AB mit BC ist, sind EH, HF inkommensurabel.
DH, HG sind der Länge nach inkommensurabel und quadriert rational.
Da DG irrational und DE rational ist, ist das Rechteck, das sie ergeben, irrational.
Da das Rechteck DF irrational ist, ist das Quadrat über AC, das ihm gleich gleich ist, irrational.

Deshalb ist AC irrational und zwar binomisch sekundär irrational, was zu zeigen war.

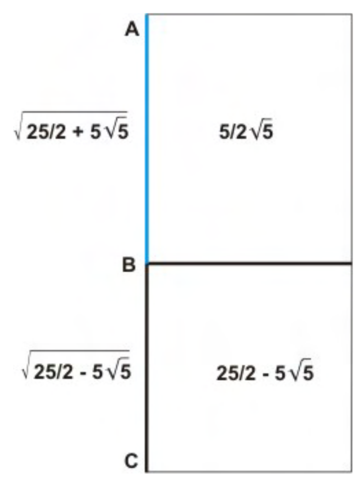
Beispiel: $(2 \cdot 2^{1/2})^{1/2} + (22 \cdot 2^{1/2})^{1/2} = (24 \cdot 2^{1/2} + 4 \cdot 22^{1/2})^{1/2}$.

Erklärung: Jede binomisch sekundär irrationale Größe ist das Produkt einer binomisch primär irrationalen Größe mit einer biquadriert rationalen Zahl.

<u>X.40.</u> [X.39]

Werden zwei im Quadrat inkommensurable Strecken zusammengesetzt, deren Summe ihrer Quadrate rational ist und die ein quadriert rationales Rechteck ergeben, dann ist die ganze Strecke irrational und wird konjugiert binomisch genannt.

Wenn zwei Strecken AB, BC die genannten Voraussetzungen erfüllen und im Quadrat inkommensurabel sind [wie X.34.], dann, sage ich, ist AC irrational.



Denn da das Rechteck aus AB mit BC quadriert rational ist, ist auch das doppelte Rechteck aus AB mit BC quadriert rational.

Da die Summe der Quadrate über AB und BC rational ist, ist das doppelte Rechteck aus AB mit BC zur Summe der Quadrate über AB und BC inkommensurabel.

Die Summe der Quadrate über AB und BC zusammen mit dem doppelten Rechteck aus AB und BC ist gleich dem Quadrat über AC und dies ist zur Summe der Quadrate über AB und BC inkommensurabel, womit das Quadrat über AC irrational ist.

Deshalb ist AC irrational und wird konjugiert binomische Strecke genannt, was zu zeigen war.

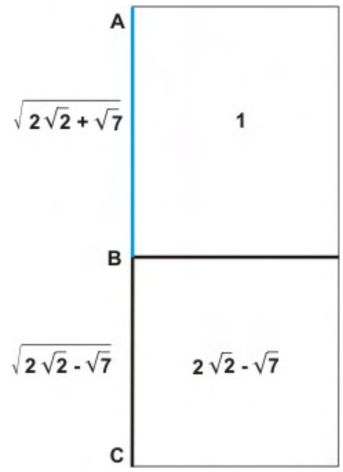
Anmerkung:
in X.40, X.41 und X.42 ist: $(d + e)^{1/2} = (g + h)^{1/2} + (g - h)^{1/2}$ wenn $d = 2g$ und $e = 2 \cdot (g^2 - h^2)^{1/2}$
wobei $(g + h)^{1/2} = AB$, $(g - h)^{1/2} = BC$ konjugierte Terme sind.

Beispiel: $(25 / 2 + 5 \cdot 5^{1/2})^{1/2} + (25 / 2 - 5 \cdot 5^{1/2})^{1/2} = (25 + 5 \cdot 5^{1/2})^{1/2}$.

<u>X.41.</u> [X.40]

Werden zwei im Quadrat inkommensurable Strecken zusammengesetzt, deren Summe ihrer Quadrate quadriert rational ist und die ein rationales Rechteck ergeben, dann ist die ganze Strecke irrational und wird konjugiert binomisch primär irrational genannt.

Wenn zwei Strecken AB, BC die genannten Voraussetzungen erfüllen und im Quadrat inkommensurabel sind [wie X.35.], dann, sage ich, ist AC irrational.



Denn da die Summe der Quadrate über AB und BC quadriert rational, das doppelte Rechteck aus AB mit BC aber rational ist, ist die Summe der Quadrate über AB und BC zum doppelten Rechteck aus AB mit BC inkommensurabel.

Es ist das Quadrat über AC zum doppelten Rechteck aus AB mit BC inkommensurabel, dieses aber rational, also ist das Quadrat über AC irrational.

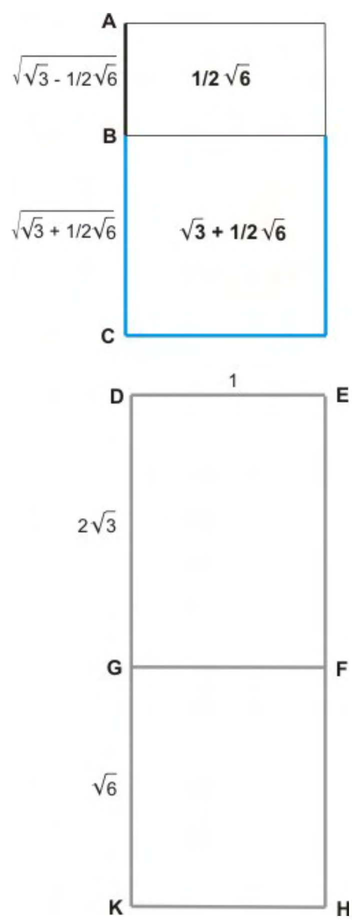
Deshalb ist AC irrational und zwar konjugiert binomisch primär irrational, was zu zeigen war.

Beispiel: $(2 \cdot 2^{1/2} + 7^{1/2})^{1/2} + (2 \cdot 2^{1/2} - 7^{1/2})^{1/2} = (4 \cdot 2^{1/2} + 2)^{1/2}$.

Wobei $(2 \cdot 2^{1/2} + 7^{1/2})^{1/2} \cdot (2 \cdot 2^{1/2} - 7^{1/2})^{1/2} = 1$.

X.42. [X.41]

Werden zwei im Quadrat inkommensurable Strecken zusammengesetzt, deren Summe ihrer Quadrate quadriert rational ist und die ein, zu ihr inkommensurables, quadriert rationales Rechteck ergeben, dann ist die ganze Strecke irrational und wird konjugiert binomisch sekundär irrational genannt.



Wenn zwei Strecken AB, BC die genannten Voraussetzungen erfüllen und im Quadrat inkommensurabel sind [wie X.36.], dann, sage ich, ist AC irrational.

Denn wird auf der rationalen Strecke DE das Rechteck DF errichtet, das der Summe der Quadrate über AB und BC gleich ist, und daran das Rechteck GH, das gleich dem doppelten Rechteck aus AB mit BC ist, dann ist das Rechteck DH gleich dem Quadrat über AC.

Da die Summe der Quadrate über AB und BC quadriert rational ist und gleich dem Rechteck DF, ist DF quadriert rational. Es ist DF auf der rationalen Strecke DE errichtet, also ist DG quadriert rational und inkommensurabel der Länge nach zu DE.
Aus den gleichen Gründen ist GK quadriert rational und zu GF, das gleich DE ist, der Länge nach inkommensurabel.

Da die Summe der Quadrate über AB und BC zum doppelten Rechteck aus AB mit BC inkommensurabel ist und da DF zu GH inkommensurabel ist, ist DG zu GK inkommensurabel, jedoch im Quadrat kommensurabel.
Damit ist DK binomisch.
Da DE rational ist, ist DH irrational, denn GK ist irrational.

Da das Quadrat über AC gleich DH ist, ist AC irrational und zwar konjugiert binomisch sekundär irrational, was zu zeigen war.

Anmerkung: Jede konjugiert binomisch sekundär irrationale Größe ist das Produkt einer konjugiert binomisch primär irrationalen Größe mit einer biquadriert rationalen Zahl.

Für alle binomischen Größen ist $(a + b)^2 = p + 2q$, wenn $p = a^2 + b^2$ und $2q = 2ab$.

Dabei ist wegen Lemma X.61 stets $p > 2q$.

Aus $p - a^2 = b^2$ und $q^2 / a^2 = b^2$ erhält man mit $a^2 = u$ die quadratische Gleichung

$-u^2 + p\,u - q^2 = 0$ mit den Lösungen $u_1 = p / 2 + (p^2 - 4\,q^2)^{½} / 2 = a^2$

$u_2 = p / 2 - (p^2 - 4\,q^2)^{½} / 2 = b^2$

Beispiel mit konjugiert binomisch sekundär irrationalen Größen:

Wie oben sei $a + b = (p + 2q)^{½}$

In $(2 \cdot 3^{½} + 6^{½})^{½}$ ist $2 \cdot 3^{½} > 6^{½}$ und $p = 2 \cdot 3^{½}$ und $q = 6^{½} / 2$.

$a^2 = 3^{½} + ½ \cdot 6^{½}$ und $b^2 = 3^{½} - ½ \cdot 6^{½}$

Damit ist $(3^{½} + ½ \cdot 6^{½})^{½} + (3^{½} - ½ \cdot 6^{½})^{½} = (2 \cdot 3^{½} + 6^{½})^{½}$.

Lemma X.43.

Wird eine Strecke AB in C und auch in D in jeweils zwei ungleiche Teile so geteilt, dass AC größer als DB ist, dann, sage ich, ist die Summe der Quadrate über AC und CB größer als die Summe der Quadrate über AD und DB.

Denn wird AB in E in zwei gleiche Teile geteilt, dann ist, da AC größer als DB ist, wenn beiden das gleiche DC weggenommen wird, der Rest AD größer als der Rest CB.

Da AE gleich EB ist, ist damit DE kleiner als EC.
Somit sind die Punkte C, D nicht gleich weit von E entfernt.

Da die Summe aus dem Rechteck aus AC mit CB und dem Quadrat über EC gleich dem Quadrat über EB ist und auch die Summe aus dem Rechteck aus AD mit DB und dem Quadrat über DE gleich dem Quadrat über EB ist, ist das Rechteck aus AC mit CB und das Quadrat über EC zusammen gleich dem Rechteck aus AD mit DB und dem Quadrat über DE zusammen.

Da das Quadrat über DE kleiner als das Quadrat über EC ist, ist das Rechteck aus AC mit CB kleiner als das Rechteck aus AD mit DB. Es ist dann auch das doppelte Rechteck aus AC mit CB kleiner als das doppelte Rechteck aus AD mit DB.

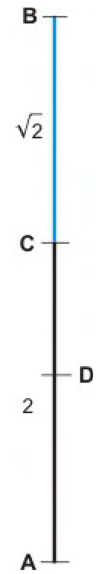
Also ist Summe der Quadrate über AC und CB größer als die Summe der Quadrate über AD und DB, was zu zeigen war.

<u>X.43.</u> [X.42]

Eine binomische Strecke lässt sich nur in einem Punkt in Strecken aufteilen, die im Quadrat kommensurabel sind.

Ist eine binomische Strecke AB [wie in X.37.] im Punkt C in Strecken aufgeteilt, die im Quadrat kommensurabel sind, dann, sage ich, kann AB in keinem anderen Punkt auf gleiche Weise in Strecken aufgeteilt werden.

Denn, wenn dies doch möglich und AB im D geteilt ist, dann sind AD, DB Strecken, die im Quadrat kommensurabel sind.
Offensichtlich ist AC ungleich DB, wenn aber doch, dann ist auch AD gleich CB. Es verhält sich dann AC zu CB wie BD zu DA, womit AB in D auf gleiche Weise geteilt ist wie in C, was dem Vorausgesetzten widerspricht.



Da AB, DB ungleich sind, sind C, D ungleich weit vom Mittelpunkt von AB entfernt. Die Summe der Quadrate über AC und CB unterscheidet sich von der Summe der Quadrate über AD und DB, somit unterscheidet sich auch das doppelte Rechteck aus AD mit DB vom doppelten Rechteck aus AC mit CB.
Das Quadrat über AB ist dabei gleich der Summe aus den Quadraten über AC und CB und dem doppelten Rechteck aus AC und CB und auch gleich der Summe aus den Quadraten über AD und DB und dem doppelten Rechteck aus AD mit DB.

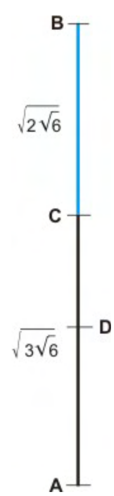
Da sich die Summe der Quadrate über AC und CB von der Summe der Quadrate über AD und DB zwar unterscheidet, beide aber rational sind, unterscheidet sich das doppelte Rechteck aus AD mit DB vom doppelten Rechteck aus AC mit CB um eine rationale Größe.

Ebenso unterscheiden sich dann die biquadriert rationalen Seiten der Quadrate, die diesen Rechtecken gleich sind, um eine rationale Größe, was nicht möglich ist, da eine biquadriert rationale Größe nicht um eine rationale Größe größer sein kann wie eine andere biquadriert rationale Größe [wie X.27.].

Deshalb kann eine binomische Strecke nur in einem Punkt in Strecken aufgeteilt werden, die im Quadrat kommensurabel sind, was zu zeigen war.

<u>X.44.</u> [X.43]

Eine binomisch primär irrationale Strecke lässt sich nur in einem Punkt in biquadriert rationale Strecken aufteilen, die im Quadrat kommensurabel sind und ein rationales Rechteck ergeben.



Ist eine Strecke AB binomisch primär irrational und ist im Punkt C so aufgeteilt, dass AC, CB biquadriert rational und im Quadrat kommensurabel sind und ein rationales Rechteck ergeben [wie in X.38.], dann, sage ich, kann AB in keinem anderen Punkt auf gleiche Weise aufgeteilt werden.

Denn wenn doch, dann ist in D zu teilen, wobei AD, DB biquadriert rational und im Quadrat kommensurabel sind und ein rationales Rechteck ergeben
Da sich das doppelte Rechteck aus AD mit DB vom doppelten Rechteck aus AC mit CB unterscheidet, unterscheidet sich auch die Summe der Quadrate über AC und CB von der Summe der Quadrate über AD und DB.

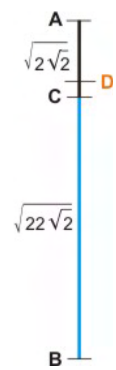
Da sich das doppelte Rechteck aus AD mit DB vom doppelten Rechteck aus AC mit CB um eine rationale Größe unterscheidet, denn beide Rechtecke sind rational, unterscheidet sich dann die Summe der Quadrate über AC und CB von der Summe der Quadrate über AD und DB um eine rationale Größe, was nicht möglich ist, denn beide Summen sind quadriert rational, die Seiten der Quadrate, die ihnen gleich sind, aber sind biquadriert rational und können sich nicht um eine rationale Größe unterscheiden [wie X.27.].

Deshalb lässt sich eine binomisch primär irrationale Strecke, nur in einem Punkt in biquadriert rationale Strecken aufteilen, die im Quadrat kommensurabel sind und ein rationales Rechteck ergeben, was zu zeigen war.

X.45. [X.44]
Eine binomisch sekundär irrationale Strecke lässt sich nur in einem Punkt in biquadriert rationale Strecken aufteilen, die im Quadrat kommensurabel sind und ein quadriert rationales Rechteck ergeben.

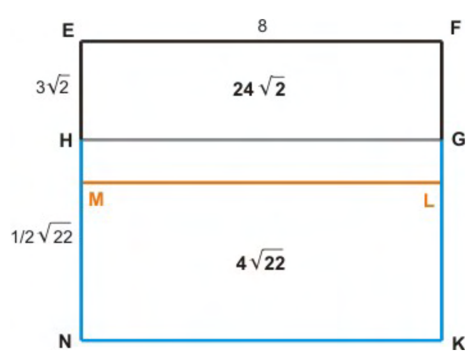
Wenn die Strecke AB binomisch sekundär irrational ist und in C so geteilt ist, dass AC, CB biquadriert rational und im Quadrat kommensurabel sind und ein quadriert rationales Rechteck ergeben [wie X.39.], dann ist C offensichtlich nicht Mittelpunkt, da AC, CB der Länge nach inkommensurabel sind, und ich sage, dann kann AB in keinem anderen Punkt auf gleiche Weise geteilt werden.

Denn wenn doch, dann ist in D zu teilen und da AC, DB nicht gleich sind, sei AC die größere Strecke.
Damit ist, wie schon gezeigt [in Lemma X.43], die Summe der Quadrate über AD und DB kleiner ist als die Summe der Quadrate über AC und CB.
Die Strecken AD, DB sind dann biquadriert rational und im Quadrat kommensurabel und schließen ein quadriert rationales Rechteck ein.



Wird auf der rationalen Strecke EF, ein dem Quadrat über AB gleiches Rechteck EK errichtet und ein der Summe der Quadrate über AC und CB gleiches Rechteck EG abgeteilt, dann ist das Rechteck HK gleich dem doppelten Rechteck aus AC mit CB.
Wird auch das der Summe der Quadrate über AD und DB gleiche Rechteck EL abgeteilt, dann ist das Rechteck MK gleich dem doppelten Rechteck aus AD mit DB.
Da die Summe der Quadrate über AC und CB quadriert rational ist, ist das Rechteck EG quadriert rational und da es auf der rationalen EF errichtet ist, ist seine Seite EH quadriert rational und zu EF der Länge nach inkommensurabel.

Aus den gleichen Gründen ist auch HN quadriert rational und zu EF der Länge nach inkommensurabel.



Da AC, CB biquadriert rational und nur im Quadrat kommensurabel sind, sind AC, CB der Länge nach inkommensurabel.
Es verhält sich AC zu CB wie das Quadrat über AC zum Rechteck aus AC mit CB, weshalb auch das Quadrat über AC zum Rechteck aus AC mit CB inkommensurabel ist.

Das Quadrat über AC ist kommensurabel zur Summe der Quadrate über AC und CB, weil AC, CB im Quadrat kommensurabel sind. Das Rechteck aus AC mit CB ist kommensurabel zum doppelten Rechteck aus AC mit CB und die Summe der Quadrate über AC und CB ist inkommensurabel zum doppelten Rechteck aus AC mit CB.
Da EG gleich der Summe der Quadrate über AC und CB und HK gleich dem doppelten Rechteck aus AC mit CB ist, sind daher EG, HK inkommensurabel.
Damit sind EH, HN der Länge nach inkommensurabel und quadriert rational.

Werden zwei nur im Quadrat kommensurable Strecken zusammengesetzt, dann ist die ganze Strecke binomisch [wie X.37.]. Die binomische Strecke EN kann deshalb nur im Punkt H in Stecken geteilt werden, die im Quadrat kommensurabel sind [wie X.43.].

Ebenso ist zu zeigen, dass EM, MN quadriert rational und nur im Quadrat kommensurabel sind. Die binomische Strecke EN in H und M auf gleiche Weise zu teilen ist somit nicht möglich.

Da EH, MN nicht gleich sind und die Summe der Quadrate über AC und CB größer ist als die Summe der Quadrate über AD und DB, und da die Summe der Quadrate über AD und DB größer ist als das doppelte Rechteck aus AD mit DB, ist die Summe der Quadrate über AC und CB umso größer als das doppelte Rechteck aus AD mit DB.
Damit EG größer ist als MK.

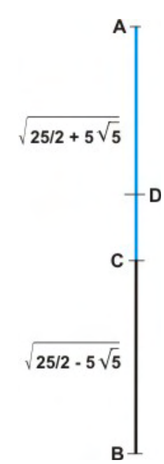
Deshalb ist die Strecke EH größer als MN und ihr nicht gleich, was zu zeigen war.

<u>X.46.</u> [X.45]

Eine konjugiert binomische Strecke lässt sich nur in einem Punkt in Strecken aufteilen, deren Summe ihrer Quadrate rational ist und die ein quadriert rationales Rechteck ergeben.

Wenn die konjugiert binomische Strecke AB in C so geteilt ist, dass AC, CB im Quadrat inkommensurabel sind, dass die Summe der Quadrate über AC und CB rational ist und sie ein quadriert rationales Rechteck ergeben [wie in X.40.], dann, sage ich, kann AB in keinem anderen Punkt auf gleiche Weise geteilt werden.

Denn wenn doch, dann ist in D so zu teilen, dass AD, DB im Quadrat inkommensurabel sind, dass die Summe der Quadrate über AD, DB rational ist und sie ein quadriert rationales Rechteck ergeben.



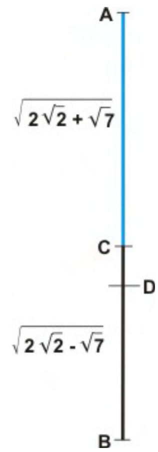
Da sich dann die Summe der Quadrate über AC und CB von der Summe der Quadrate über AD und DB unterscheidet, unterscheidet sich auch das doppelte Rechteck aus AD mit DB vom doppelten Rechteck aus AC mit CB.

Die Summe der Quadrate über AC und CB unterscheidet sich dann von der Summe der Quadrate über AD und DB um eine rationale Größe, da beide rational sind.Somit unterscheiden sich das doppelte Rechteck aus AD mit DB vom doppelten Rechteck aus AC mit CB, die beide quadriert rational sind, um eine rationale Größe, was nicht möglich ist.

Deshalb lässt sich eine Strecke, deren Länge konjugiert binomisch ist, nur in einem Punkt in Strecken aufteilen, deren Summe ihrer Quadrate rational ist und die ein quadriert rationales Rechteck ergeben, was zu zeigen war.

X.47. [X.46]

Eine konjugiert binomisch primär irrationale Strecke lässt sich nur in einem Punkt in Strecken aufteilen, deren Summe ihrer Quadrate quadriert rational ist und die ein rationales Rechteck ergeben.



Wenn die Strecke AB, die konjugiert binomisch primär irrational ist, in C so geteilt ist, dass AC, CB im Quadrat inkommensurabel sind, dass die Summe der Quadrate über AC und CB quadriert rational ist und das doppelte Rechteck, das sie ergeben, rational ist [wie in X.41.], dann, sage ich, kann AB in keinem anderen Punkt auf gleiche Weise geteilt werden.

Denn wenn doch, dann ist in D so zu teilen, dass AD, DB im Quadrat inkommensurabel sind, dass die Summe der Quadrate über AD, DB quadriert rational ist und das doppelte Rechteck, das sie ergeben, rational ist.
Es unterscheidet sich dann das doppelte Rechteck aus AC mit CB vom doppelten Rechteck aus AD mit DB und damit auch die Summe der Quadrate über AD und DB von der Summe der Quadrate über AC und CB.

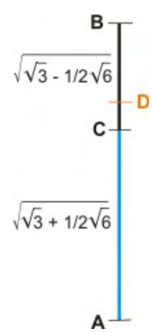
Das doppelte Rechteck aus AC mit CB unterscheidet sich vom doppelten Rechteck aus AD mit DB um eine rationale Größe, denn beide sind rational. Damit unterscheidet sich dann die Summe der Quadrate über AD und DB von der Summe der Quadrate über AC mit CB, die beide quadriert rational sind, um eine rationale Größe, was nicht möglich ist.

Deshalb lässt sich eine konjugiert binomisch primär irrationale Strecke nur in einem Punkt in Strecken aufteilen, deren Summe ihrer Quadrate quadriert rational ist und die ein rationales Rechteck ergeben, was zu zeigen war.

X.48. [X.47]

Eine konjugiert binomisch sekundär irrationale Strecke lässt sich nur in einem Punkt in Strecken aufteilen, deren Summe ihrer Quadrate quadriert rational ist und die ein, zu ihr inkommensurables, quadriert rationales Rechteck ergeben.

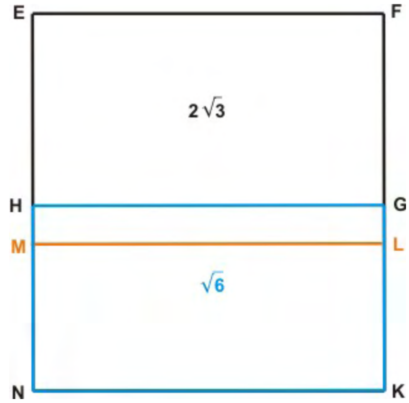
Wenn die Strecke AB, deren Länge konjugiert binomisch sekundär irrational ist, in C so geteilt ist, dass AC, CB im Quadrat inkommensurabel sind, dass die Summe der Quadrate über AC und CB quadriert rational ist und sie das, zu ihr inkommensurable, quadriert rationale Rechteck aus AC mit CB ergeben [wie in X.42.], dann, sage ich, kann AB in keinem anderen Punkt auf gleiche Weise geteilt werden.



Denn wenn doch, dann ist in D zu teilen.
Es sind dann AC, DB ungleich, wobei AC größer sei.
Auf der rationalen Strecke EF ist das der Summe der Quadrate über AC und CB gleiche Rechteck EG und an diesem das dem doppelten Rechteck aus AC und CB gleiche Rechteck HK zu errichten, womit EK gleich dem Quadrat über AB ist.
Wird auf EF auch das der Summe der Quadrate über AD und DB gleiche Rechteck EL errichtet, dann ist das Rechteck MK gleich dem doppelten Rechteck aus AD mit DB.

Da nach Voraussetzung die Summe der Quadrate über AC und CB quadriert rational ist, ist auch EG quadriert rational.

Da EG auf der rationalen Strecke EF errichtet ist, ist HE quadriert rational und zu EF der Länge nach inkommensurabel.
Aus den gleichen Gründen ist auch HN quadriert rational und zu EF der Länge nach inkommensurabel.



Da die Summe der Quadrate über AC und CB zum doppelten Rechteck aus AC mit CB inkommensurabel ist, sind auch die Rechtecke EG, GN inkommensurabel.
Somit sind EH, HN der Länge nach inkommensurabel, jedoch im Quadrat kommensurabel.
Also ist EN eine binomische Strecke, die in H geteilt ist.

Ebenso ist zu zeigen, dass EN dann in M auf gleiche Weise zu teilen ist.
Aber EH und MN sind nicht gleich, womit eine binomische Strecke in verschiedenen Punkten auf gleiche Weise zu teilen wäre, was nicht möglich ist.

Deshalb lässt sich eine konjugiert binomisch sekundär irrationale Strecke nicht in verschiedenen Punkten in Strecken aufteilen, deren Summe ihrer Quadrate quadriert rational ist und die ein, zu ihr inkommensurables, quadriert rationales Rechteck ergeben, was zu zeigen war.

<u>Lemma X.49.</u>

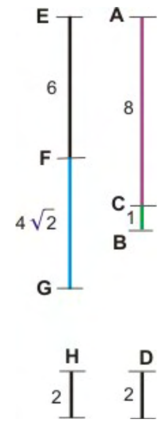
Unterteilung.

1. Ist eine binomische Strecke so aufgeteilt, dass die Teilstrecken im Quadrat kommensurabel sind, und ist das Quadrat über der größeren um ein Quadrat, dessen Seite der Länge nach kommensurabel zur größeren Teilstrecke ist, größer als das Quadrat über der kleineren, und ist dann die größere Teilstrecke rational, ist sie eine quadriert binomische Strecke erster Art;
2. ist aber die kleinere Teilstrecke rational, ist sie eine quadriert binomische Strecke zweiter Art;
3. ist keine der beiden Teilstrecken rational, dann eine quadriert binomische Strecke dritter Art.
4. Ist dagegen das Quadrat über der größeren Teilstrecke um ein Quadrat, dessen Seite der Länge nach inkommensurabel zu ihr ist, größer als das Quadrat über der kleineren und ist dann die größere Teilstrecke rational, ist dies eine quadriert binomische Strecke vierter Art;
5. ist die kleinere rational, dann ist die Strecke eine quadriert binomische Strecke fünfter Art;
6. ist keine der beiden Teilstrecken rational, eine quadriert binomische Strecke sechster Art.

X.49. [X.48]

Eine quadriert binomische Strecke erster Art finden.

Es seien zwei Zahlen AC, CB gegeben so, dass sich AB zu BC verhält wie eine Quadratzahl zu einer anderen, jedoch AB zu CA sich nicht verhält wie eine Quadratzahl zu einer anderen, und es sei eine rationale Strecke D gegeben, zu der EF der Länge nach kommensurabel ist.
Die Strecke EF ist dann rational.
Es verhalte sich BA zu AC wie das Quadrat über EF zum Quadrat über FG.



Da sich AB zu AC verhält wie eine Zahl zu einer anderen, verhält sich auch das Quadrat über EF zum Quadrat über FG wie eine Zahl zu einer anderen, damit sind die Quadrate über EF und FG kommensurabel. Da sich BA zu AC nicht verhält wie eine Quadratzahl zu einer anderen, verhält sich das Quadrat über EF zum Quadrat über FG nicht wie eine Quadratzahl zu einer anderen, somit sind EF, FG der Länge nach inkommensurabel, jedoch im Quadrat kommensurabel.

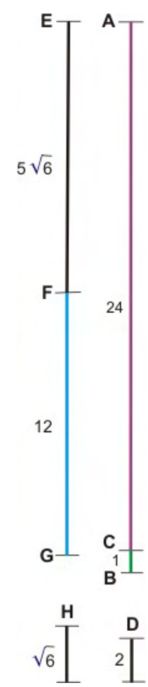
Damit ist EG eine binomische Strecke und, sage ich, eine quadriert binomische Strecke erster Art. Denn da sich BA zu AC verhält wie das Quadrat über AF zum Quadrat über FG und da BA größer ist als AC, ist das Quadrat über EF größer als das Quadrat über FG. Ist das Quadrat über EF um das Quadrat über H größer als das Quadrat über FG, dann, da sich BA zu AC verhält wie das Quadrat über EF zum Quadrat über FG, verhält sich dadurch AB zu BC wie das Quadrat über EF zum Quadrat über H [wie V.19. Zusatz].

Da sich AB zu BC verhält wie eine Quadratzahl zu einer anderen, verhält sich das Quadrat über EF zum Quadrat über H wie eine Quadratzahl zu einer anderen.
Die Strecke EF ist zu H der Länge nach kommensurabel, also ist das Quadrat über EF um ein Quadrat, dessen Seite zu EF kommensurabel ist, größer als das Quadrat über FG.

Deshalb ist EG eine quadriert binomische Strecke erster Art, was zu zeigen war.

X.50. [X.49]

Eine quadriert binomische Strecke zweiter Art finden.



Es seien zwei Zahlen AC, CB gegeben so, dass AB zu BC sich verhält wie eine Quadratzahl zu einer anderen, aber AB sich nicht zu AC verhält wie eine Quadratzahl zu einer anderen, und es sei eine rationale Strecke D gegeben, zu der FG der Länge nach kommensurabel ist. Somit ist FG rational.
Es verhalte sich CA zu AB wie das Quadrat über FG zum Quadrat über FE.

Damit sind die Quadrate über EF und FG kommensurabel.
Da sich CA zu AB nicht verhält wie eine Quadratzahl zu einer anderen und somit das Quadrat über FG zum Quadrat über FE sich nicht verhält wie eine Quadratzahl zu einer anderen, sind EF, FG der Länge nach inkommensurabel, aber im Quadrat kommensurabel. Da FG rational ist, ist somit FE quadriert rational. Damit ist EG eine binomische Strecke und, sage ich, eine quadriert binomische Strecke zweiter Art.

Denn da BA sich zu AC verhält wie das Quadrat über EF zum Quadrat über FG und da BA größer ist als AC, ist das Quadrat über EF größer als das Quadrat über FG [wie V.14.].

Ist das Quadrat über EF um das Quadrat über H größer als das Quadrat über GF, dann verhält sich AB zu BC wie das Quadrat über EF zum Quadrat über H.

Da AB zu BC sich verhält wie eine Quadratzahl zu einer anderen, verhält sich dann das Quadrat über EF zum Quadrat über H wie eine Quadratzahl zu einer anderen. Es ist somit EF zu H der Länge nach kommensurabel.

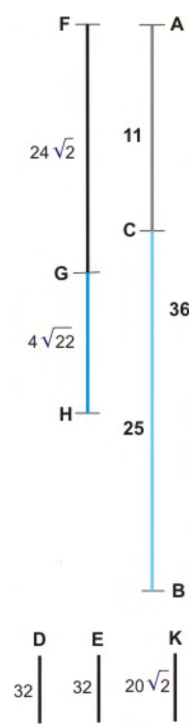
Das Quadrat über EF ist damit um ein Quadrat, dessen Seite der Länge nach kommensurabel zu EF ist, größer ist als das Quadrat über FG.
Es sind die Strecken EF, FG im Quadrat kommensurabel. FG ist die kleinere Strecke und rational, da zu D der Länge nach kommensurabel.

Deshalb ist EG eine quadriert binomische Strecke zweiter Art, was zu zeigen war.

<u>X.51.</u> [X.50]
Eine quadriert binomische Strecke dritter Art finden.

Es seien zwei Zahlen AC, CB gegeben so, dass AB zu BC sich verhält wie eine Quadratzahl zu einer anderen, aber AB sich nicht zu AC verhält wie eine Quadratzahl zu einer anderen, es sei eine Zahl D gegeben, die weder Quadratzahl ist, noch zu BA, AC sich verhält wie eine Quadratzahl zu einer anderen, und es sei eine rationale Strecke E gegeben so, dass sich D zu AB verhält wie das Quadrat über E zum Quadrat über FG.

Da die Quadrate über E und FG kommensurabel sind und E rational ist, ist FG quadriert rational. Da sich D zu AB nicht verhält wie eine Quadratzahl zu einer anderen und auch das Quadrat über E sich zum Quadrat über FG nicht verhält wie eine Quadratzahl zu einer anderen, sind E, FG der Länge nach inkommensurabel [wie X.9.].



Es verhält sich BA zu AC wie das Quadrat über FG zum Quadrat über GH, und da die Quadrate über FG und GH kommensurabel sind und FG quadriert rational ist, ist GH quadriert rational.
Da sich BA zu AC nicht verhält wie eine Quadratzahl zu einer anderen und auch das Quadrat über FG zum Quadrat über GH sich nicht verhält wie eine Quadratzahl zu einer anderen, sind FG, GH der Länge nach inkommensurabel, aber im Quadrat kommensurabel.

Damit ist FH eine binomische Strecke und, sage ich, eine quadriert binomische Strecke dritter Art.

Denn da sich D zu AB verhält wie das Quadrat über E zum Quadrat über FG und BA sich zu AC verhält wie das Quadrat über FG zum Quadrat über GH, verhält sich aufgrund Gleichheit D zu AC wie das Quadrat über E zum Quadrat über GH [wie V.22.]. Da D zu AC sich nicht verhält wie eine Quadratzahl zu einer anderen und auch das Quadrat über E zum Quadrat über GH sich nicht verhält wie eine Quadratzahl zu einer anderen, sind E, GH der Länge nach inkommensurabel.

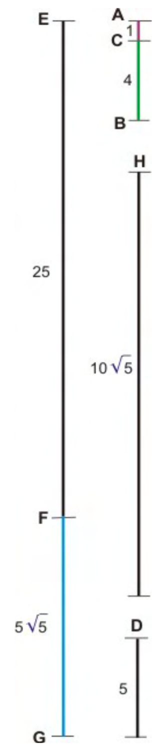
Es verhält sich BA zu AC wie das Quadrat über FG zum Quadrat über GH, wobei das Quadrat über FG größer als das Quadrat über GH ist.

Ist das Quadrat über FG um das Quadrat über K größer als das Quadrat über GH, dann verhält sich AB zu BC wie das Quadrat über FG zum Quadrat über K. Da sich AB zu BC verhält wie eine Quadratzahl zu einer anderen und auch das Quadrat über FG sich zum Quadrat über K verhält wie eine Quadratzahl zu einer anderen, sind FG, K der Länge nach kommensurabel.

Das Quadrat über FG ist damit um ein Quadrat, dessen Seite der Länge nach zu FG kommensurabel ist, größer als das Quadrat über GH. Die Strecken FG, GH sind im Quadrat kommensurabel, aber untereinander und zu E der Länge nach inkommensurabel.

Deshalb ist FH eine quadriert binomische Strecke dritter Art, was zu zeigen war.

<u>X.52.</u> [X.51]
Eine quadriert binomische Strecke vierter Art finden.



Es seien zwei Zahlen AC, CB gegeben so, dass AB weder zu BC noch zu AC in einem Verhältnis steht wie eine Quadratzahl zu einer anderen und es sei eine rationale Strecke D gegeben, die zu EF der Länge nach kommensurabel ist.
Es verhalte sich BA zu AC wie das Quadrat über EF zum Quadrat über FG.

Da EF dann rational ist und die Quadrate über EF und FG kommensurabel sind, ist FG quadriert rational.

Da sich BA zu AC nicht verhält wie eine Quadratzahl zu einer anderen und auch das Quadrat über EF zum Quadrat über FG sich nicht verhält wie eine Quadratzahl zu einer anderen, sind EF, FG der Länge nach inkommensurabel, jedoch im Quadrat kommensurabel.

Damit ist EG eine binomische Strecke und, sage ich, eine quadriert binomische Strecke vierter Art.

Denn da sich BA zu AC verhält wie das Quadrat über EF zum Quadrat über FG und da das Quadrat über EF größer ist als das Quadrat über FG, sei nun das Quadrat über FG um das Quadrat über H größer als das Quadrat über FG.

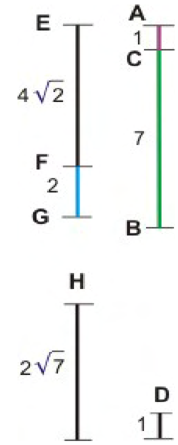
Es verhält sich dann AB zu BC wie das Quadrat über EF zum Quadrat über H.
Da sich AB zu BC nicht verhält wie eine Quadratzahl zu einer anderen und auch das Quadrat über EF zum Quadrat über H sich nicht verhält wie eine Quadratzahl zu einer anderen, sind EF, H der Länge nach inkommensurabel.
Das Quadrat über EF ist somit um ein Quadrat, dessen Seite der Länge nach zu EF inkommensurabel ist, größer als das Quadrat über FG.

Die Strecken EF, FG sind im Quadrat kommensurabel und EF, D sind kommensurabel der Länge nach.

Deshalb ist EG eine quadriert binomische Strecke vierter Art, was zu zeigen war.

X.53. **[X.52]**
Eine quadriert binomische Strecke fünfter Art finden.

Es seien zwei Zahlen AC, CB gegeben, so dass AB zu beiden sich nicht verhält wie eine Quadratzahl zu einer anderen, und es sei eine rationale Strecke D gegeben, die zu FG kommensurabel ist.
Somit ist FG rational.
Es verhalte sich CA zu AB wie das Quadrat über GF zum Quadrat über FE.



Da CA zu AB sich nicht verhält wie eine Quadratzahl zu einer anderen und auch das Quadrat über GF sich zum Quadrat über FE sich nicht verhält wie eine Quadratzahl zu einer anderen, sind GF, FE der Länge nach inkommensurabel, jedoch im Quadrat kommensurabel.

Also ist EG eine binomische Strecke und, sage ich, eine quadriert binomische Strecke fünfter Art.

Denn da sich CA zu AB verhält wie das Quadrat über FG zum Quadrat über EF, verhält sich umgekehrt BA zu CA wie das Quadrat über EF zum Quadrat über FG.
Es ist das Quadrat über FE größer als das Quadrat über GF und es sei daher das Quadrat über FE um das Quadrat über H größer als das Quadrat über GF.
Es verhält sich dann AB zu BC wie das Quadrat über EF zum Quadrat über H.

Da AB zu BC sich nicht verhält wie eine Quadratzahl zu einer anderen und auch das Quadrat über EF zum Quadrat über H sich nicht verhält wie eine Quadratzahl zu einer anderen, sind EF, H der Länge nach inkommensurabel.
Damit ist das Quadrat über EF um ein Quadrat, dessen Länge zu EF inkommensurabel ist, größer als das Quadrat über FG.
Die Strecken EF, FG sind im Quadrat kommensurabel, FG ist die kleinere und zu D der Länge nach kommensurabel.

Deshalb ist EG eine quadriert binomische Strecke fünfter Art, was zu zeigen war.

X.54. **[X.53]**
Eine quadriert binomische Strecke sechster Art finden.

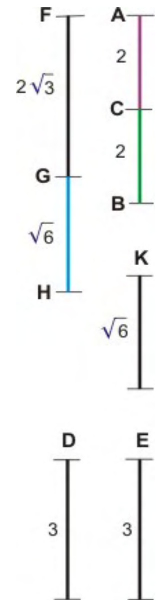
Es seien zwei Zahlen AC, CB gegeben, so dass AB zu beiden sich nicht verhält wie eine Quadratzahl zu einer anderen, es sei eine Zahl D gegeben, die weder Quadratzahl ist, noch zu BA, AC sich verhält wie eine Quadratzahl zu einer anderen, und es sei eine rationale Strecke E gegeben so, dass sich D zu AB verhält wie das Quadrat über E zum Quadrat über FG.

Die Quadrate über E und FG sind kommensurabel und E ist rational, somit ist FG quadriert rational.

Da D zu AB sich nicht verhält wie eine Quadratzahl zu einer anderen und auch das Quadrat über E zum Quadrat über FG sich nicht verhält wie eine Quadratzahl zu einer anderen, sind E, FG der Länge nach inkommensurabel.

Da BA zu AC sich verhält wie das Quadrat über FG zum Quadrat über GH, da die Quadrate über FG und GH kommensurabel sind und das Quadrat über GH rational ist, ist GH quadriert rational.

Es verhält sich BA zu AC nicht wie eine Quadratzahl zu einer anderen und es verhält sich das Quadrat über FG zum Quadrat über GH nicht wie eine Quadratzahl zu einer anderen, somit sind FG, GH der Länge nach inkommensurabel.



Da FG, GH im Quadrat kommensurabel sind, ist FH eine binomische Strecke und, wie zu zeigen, eine quadriert binomische Strecke sechster Art.

Denn es verhält sich D zu AB wie das Quadrat über E zum Quadrat über FG und es verhält sich BA zu AC wie das Quadrat über FG zum Quadrat über GH, somit verhält sich aufgrund Gleichheit [wie V.22.]
D zu AC wie das Quadrat über E zum Quadrat über GH.
Da D zu AC sich nicht verhält wie eine Quadratzahl zu einer anderen und auch das Quadrat über E zum Quadrat über GH sich nicht verhält wie eine Quadratzahl zu einer anderen, sind E, GH der Länge nach inkommensurabel.
Wie gezeigt, sind E, FG der Länge nach inkommensurabel, somit sind sowohl FG wie GH zu E der Länge nach inkommensurabel.

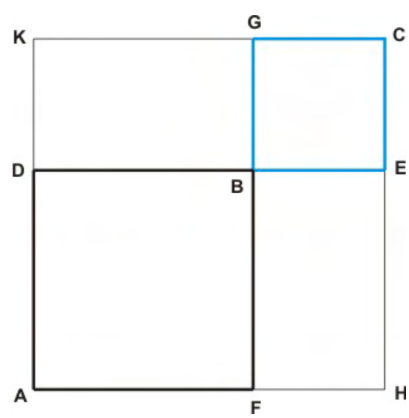
Es verhält sich BA zu AC wie das Quadrat über FG zum Quadrat über GH, wobei das Quadrat über FG größer als das Quadrat über GH ist.
Ist das Quadrat über FG um das Quadrat über K größer als das Quadrat über GH, dann verhält sich AB zu BC wie das Quadrat über FG zum Quadrat über K.
Da AB zu BC sich nicht verhält wie eine Quadratzahl zu einer anderen und auch das Quadrat über FG zum Quadrat über K sich nicht verhält wie eine Quadratzahl zu einer anderen, sind FG, K der Länge nach inkommensurabel.
Damit ist das Quadrat über FG um ein Quadrat, dessen Seite der Länge nach inkommensurabel zu FG ist, größer als das Quadrat über GH.
Die Strecken FG, GH sind im Quadrat kommensurabel, jedoch sind beide nicht zur rationalen Strecke E der Länge nach kommensurabel.

Deshalb ist FH eine quadriert binomische Strecke sechster Art, was zu zeigen war.

Lemma X.55.

Werden zwei Quadrate AB, BC so aneinandergelegt, dass jeweils die Seiten DB und BE und die Seiten FB und BG auf einer Geraden liegen und wird das Parallelogramm AC vervollständigt, dann, sage ich, ist AC ein Quadrat und verhält sich DG zu AB, BC und verhält sich DC zu AC, CB wie die mittlere Größe in fortlaufend gleicher Proportion.

Denn da DB gleich BF ist und da BE gleich BG ist, ist DE gleich GF.



Es ist DE gleich AH und gleich KC und es ist FG gleich AK und gleich HC, damit ist
AH gleich KC, gleich AK und gleich HC.
Also ist das Parallelogramm AC gleichseitig.
Da es auch rechtwinklig ist, ist es ein Quadrat.

Es verhält sich FB zu BG wie DB zu BE, es verhält sich FB zu BG wie AB zu DG und es verhält sich DB zu BE wie DG zu BC, damit verhält sich AB zu DG wie DG zu BC.

Somit verhält sich DG wie die mittlere Größe zu AB, BC in fortlaufend gleicher Proportion. Nunmehr sage ich, DC verhält sich zu AC, CB wie die mittlere Größe in fortlaufend gleicher Proportion.

Denn da AD zu DK sich verhält wie KG zu GC und im vergrößerten Verhältnis [wie V.18.] AK zu KD sich verhält wie KC zu CG, verhält sich AK zu KD wie AC zu CD und verhält sich KC zu CG wie DC zu CB. Also verhält sich AC zu DC wie DC zu BC.

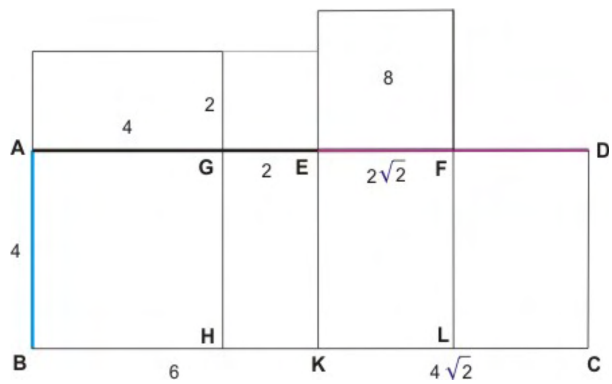
Deshalb verhält sich DC wie die mittlere Größe zu AC, CB in fortlaufend gleicher Proportion, was zu zeigen war.

<u>X.55.</u> [X.54]

Das von einer rationalen Strecke und einer quadriert binomischen Strecke erster Art eingeschlossene Rechteck ist gleich dem Quadrat über einer binomischen Strecke.

Wird ein Rechteck ABCD von einer rationalen Strecke AB und einer quadriert binomischen Strecke erster Art AD [wie X.49.] eingeschlossen, dann, sage ich, ist AC gleich dem Quadrat über einer binomischen Strecke [wie in X.37.].

Denn da AD eine quadriert binomische Strecke erster Art ist, die nur in E in Strecken geteilt werden kann, die im Quadrat kommensurabel sind [wie X.43.], wobei AE die größere Teilstrecke ist, ist offensichtlich das Quadrat über AE um ein Quadrat, dessen Seite zu AE kommensurabel ist, größer als das Quadrat über ED.



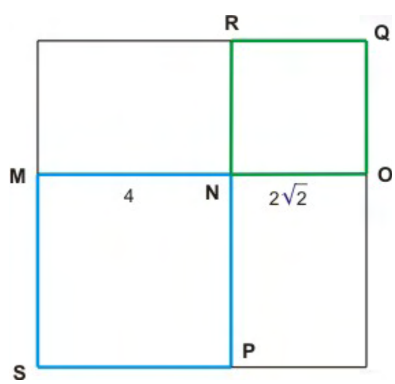
Da AD eine quadriert binomische Strecke erster Art ist, ist AE rational und zu AB der Länge nach kommensurabel. Es ist ED in F in zwei gleiche Teile zu teilen.

Da das Quadrat über AE um ein Quadrat, dessen Seite zu AE kommensurabel ist, größer ist als das Quadrat über ED ist, ist über AE ein Rechteck zu errichten, das weniger dem Quadrat über der anderen Seite des Rechtecks einem Viertel des Quadrats über ED, das ist das Quadrat über EF, gleich ist, so dass AE in kommensurable Strecken geteilt wird [wie in X.18.].

Wird auf AE das dem Quadrat über EF gleiche Rechteck aus AG mit GE errichtet, dann sind deshalb AG, EG der Länge nach kommensurabel.

Es sind von G, E F die zu AB, CD parallelen GH, EK, FL zu ziehen.

Das dem Rechteck AH gleiche Quadrat SN und das dem Rechteck GK gleiche Quadrat NQ sind so aneinanderzulegen, dass jeweils die Seiten MN, NO und die Seiten RN, NP auf einer Geraden liegen.
Wird dann das Parallelogramm SQ vervollständigt, ist SQ ein Quadrat.



Da das Rechteck aus AG mit GE gleich dem Quadrat über EF ist, verhält sich AG zu EF wie FE zu EG und deshalb verhält sich AH zu EL wie EL zu KG.
Damit verhält sich EL zu SN, NQ wie die mittlere Größe in fortlaufend gleicher Proportion.

Da MR zu SN, NQ die mittlere Größe in fortlaufend gleicher Proportion ist, ist EL gleich MR und gleich OP.

Es ist die Summe aus AH und GK gleich der Summe aus SN und NQ.

Also ist das ganze AC gleich SQ und gleich dem Quadrat über MO. Damit ist das Quadrat über MO gleich dem Rechteck AC.

Ich sage, MO ist eine binomische Strecke.

Denn da die Strecken AG, GE kommensurabel sind, ist AE zu AG, GE kommensurabel.
Da AE, AB kommensurabel sind, sind AG, GE zu AB kommensurabel.
Da AB rational ist, sind auch AG, GE rational.
Somit sind AH, GK rational und kommensurabel.

Es ist AH gleich SN und es ist GK gleich NQ.
Damit sind die Quadrate über MN und NO kommensurabel, somit sind SN und NQ kommensurabel.
Es sind AE, ED der Länge nach inkommensurabel, jedoch DE, EF kommensurabel, somit AG, EF inkommensurabel und damit AH, EL inkommensurabel.
Da AH gleich SN und EL gleich MR ist, sind SN, MR inkommensurabel.
Es verhält sich SN zu MR wie PN zu NR, womit PN, NR inkommensurabel sind.
Da PN gleich MN und da NR gleich NO ist, sind MN, NO inkommensurabel, jedoch im Quadrat kommensurabel.

Deshalb ist MO eine binomische Strecke und das Quadrat über MO gleich AC, was zu zeigen war.

Anmerkung: $r \cdot (p + q) = r \cdot (a + b)^2$ wenn $p = a^2 + b^2$ und $q = 2ab$
wobei $r \cdot p = MN$, $r \cdot q = NO$, $r^2 = AB$.

Beispiel: $r \cdot (6 + 4 \cdot 2^{1/2}) = r \cdot (2 + 2^{1/2})^2$, (im graphischen Beispiel ist $r = 4$).

<u>X.56.</u> [X.55]

Das von einer rationalen Strecke und einer quadriert binomischen Strecke zweiter Art eingeschlossene Rechteck ist gleich einem Quadrat, dessen Seite, wie benannt, binomisch primär irrational ist.

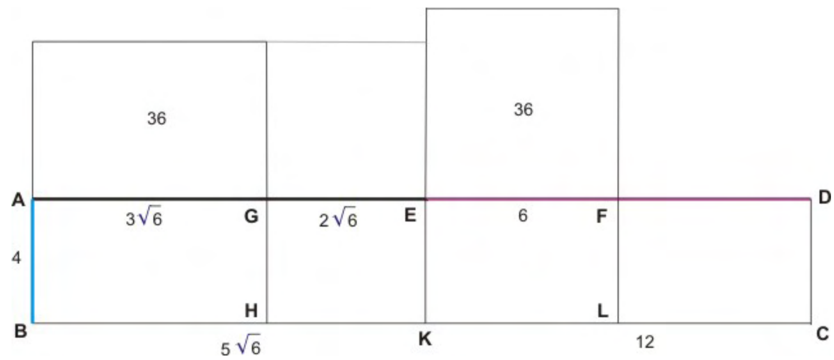
Wird ein Rechteck ABCD von einer rationalen Strecke AB und einer quadriert binomischen Strecke zweiter Art AD [wie X.50.] eingeschlossen, dann, sage ich, ist AC gleich einem Quadrat, dessen Seite, wie benannt, binomisch primär irrational ist [wie in X.38.].

Denn da AD eine binomische Strecke ist, die nur in E in Strecken AE, ED geteilt werden kann, die im Quadrat kommensurabel sind, wobei AE die größere Teilstrecke ist, ist das Quadrat über AE um ein Quadrat, dessen Seite zu AE kommensurabel ist, größer als das Quadrat über ED und es ist ED zu AB kommensurabel der Länge nach.

Die Strecke ED ist in F in zwei gleiche Teile zu teilen und auf AE das Rechteck AG mit GE zu errichten, das nach Abteilen des Quadrats über GE dem Quadrat über EF gleich ist.
Damit sind AG, GE kom-mensurabel der Länge nach.

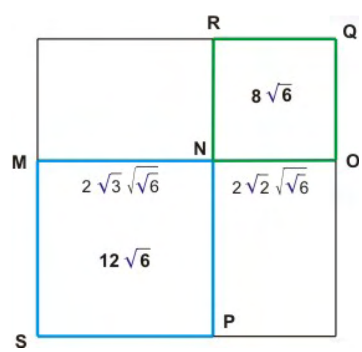
Es sind von G, E F die zu AB, CD parallelen GH, EK, FL zu ziehen.

Das dem Rechteck AH gleiche Quadrat SN und das dem Rechteck GK gleiche Quadrat NQ sind so aneinanderzulegen, dass jeweils die Seiten MN, NO und die Seiten RN, NP auf einer Geraden liegen und das Quadrat SQ ist zu vervollständigen.



Wie bereits gezeigt, verhält sich das Rechteck MR zu SN, NQ wie die mittlere Größe in fortlaufend gleicher Proportion und ist gleich EL. Das Quadrat über MO ist damit gleich AC.

Nun ist zu zeigen, dass die Strecke MO binomisch primär irrational ist.



Denn da AE, ED der Länge nach inkommensurabel sind, jedoch ED, AB kommensurabel, sind AE, AB inkommensurabel. Da AG, EG kommensurabel sind, ist AE zu AG, GE jeweils kommensurabel. Es sind AE, AB der Länge nach inkommensurabel, somit sind AG, GE zur Strecke AB inkommensurabel, jedoch im Quadrat kommensurabel.
Also sind die den AH, GK gleichen Quadrate SN, NQ quadriert rational und sind deren Seiten MN, NO biquadriert rational.
Da AG, GE der Länge nach kommensurabel sind, sind auch AH, GK und damit SN, NQ, das sind die Quadrate über MN, NO, kommensurabel.
Es sind AE, ED der Länge nach inkommensurabel, jedoch sind AE, AG kommensurabel und sind ED, EF kommensurabel, somit sind AG, EF inkommensurabel.

Wie AH, EL sind auch SN, MR inkommensurabel und ist damit ON, das gleich NR ist, und sind damit MN, NO der Länge nach inkommensurabel, jedoch, wie gezeigt, im Quadrat kommensurabel und biquadriert rational.
Zu dem, sage ich, schließen sie ein rationales Rechteck ein.
Denn da DE zu AB, EF jeweils kommensurabel ist und EF, EK kommensurabel und rational sind, ist EL, das MR gleich ist, rational, somit ist das Rechteck aus MN mit NO rational.
Also sind MN, NO biquadriert rationale Strecken, die im Quadrat kommensurabel sind und ein rationales Rechteck ergeben.

Deshalb ist die ganze Strecke MO binomisch primär irrational, was zu zeigen war.

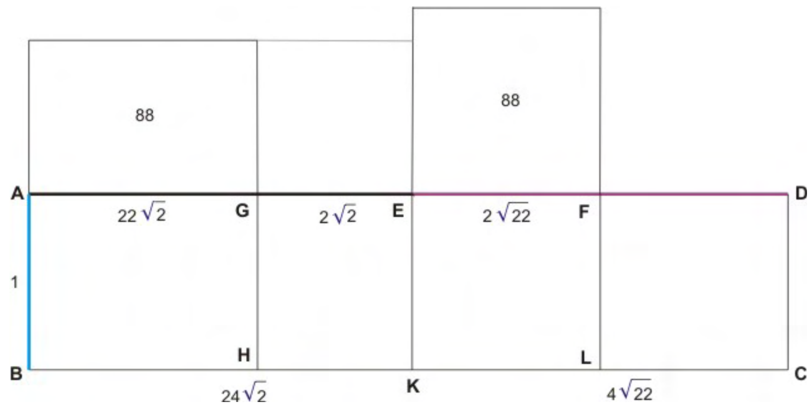
Beispiel: $r \cdot (5 \cdot 6^{1/2} + 12) = r \cdot (2^{1/2} \cdot 6^{1/4} + 3^{1/2} \cdot 6^{1/4})^2$, (im graphischen Beispiel ist $r = 4$).

<u>X.57.</u> [X.56]

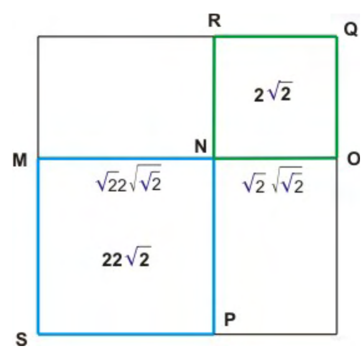
Das von einer rationalen Strecke und einer quadriert binomische Strecke dritter Art eingeschlossene Rechteck ist gleich einem Quadrat, dessen Seite, wie benannt, binomisch sekundär irrational ist.

Wird ein Rechteck ABCD von einer rationalen Strecke AB und einer quadriert binomischen Strecke dritter Art AD [wie X.51.] eingeschlossen, dann, sage ich, ist AC gleich einem Quadrat, dessen Seite, wie benannt, binomisch sekundär irrational ist [wie X.39.].

Es sind die Strecken auf gleiche Weise wie vorher zu vergleichen.



Es ist AD eine binomische Strecke ist, die nur in E in Strecken AE, ED geteilt werden kann, die im Quadrat kommensurabel sind, wobei das Quadrat über AE um ein Quadrat, dessen Seite zu AE kommensurabel ist, größer als das Quadrat über ED ist.
Da keine der Strecken AE, ED zur Strecke AB der Länge nach kommensurabel ist, ist auf gleiche Weise wie vorher zu zeigen, dass das Quadrat über MO gleich AC und dass MN, NO biquadriert rational und im Quadrat kommensurabel sind.
Damit ist MO die Summe biquadriert rationaler Strecken.



Es ist zu zeigen, dass MN, NO ein quadriert rationales Rechteck ergeben.

DE, AB sind wie DE, EK der Länge nach inkommensurabel, DE, EF jedoch kommensurabel, somit sind EF, EK der Länge nach inkommensurabel, aber im Quadrat kommensurabel.
Da EL, das gleich MR ist, quadriert rational ist und sich aus MN, NO ergibt, ist das Rechteck aus MN mit NO quadriert rational.

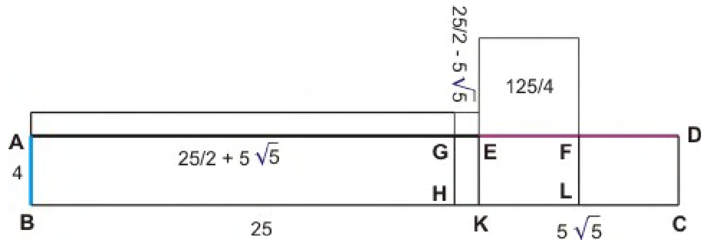
Deshalb ist MO binomisch sekundär irrational, was zu zeigen war.

Beispiel: $r \cdot (24 \cdot 2^{1/2} + 4 \cdot 22^{1/2}) = r \cdot (22^{1/2} \cdot 2^{1/4} + 2^{1/2} \cdot 2^{1/4})^2$, (im graphischen Beispiel ist $r = 1$).

X.58. **[X.57]**

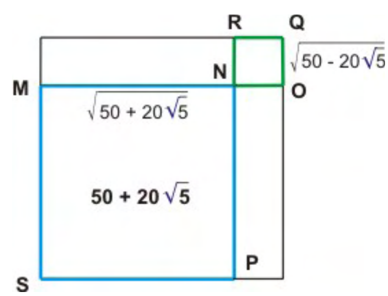
Das von einer rationalen Strecke und einer quadriert binomischen Strecke vierter Art eingeschlossene Rechteck ist gleich einem Quadrat, dessen Seite, wie benannt, konjugiert binomisch ist.

Wird ein Rechteck ABCD von einer rationalen Strecke AB und einer quadriert binomischen Strecke vierter Art AD [wie X.52.] eingeschlossen, die in E in Strecken geteilt ist, die nur im Quadrat kommensurabel sind, dann, sage ich, ist AC gleich einem Quadrat, dessen Seite, wie benannt, konjugiert binomisch ist [wie in X.40.].



Denn da AD eine quadriert binomische Strecke vierter Art ist, sind AE, ED im Quadrat kommensurabel, ist das Quadrat über AE um eine Quadrat, dessen Länge zu AE inkommensurabel ist, größer als das Quadrat über ED und sind AE, AB der Länge nach kommensurabel.
Es ist DE in F in zwei gleiche Teile zu teilen und ein, dem Quadrat über EF gleiches Rechteck aus AG mit GE auf AE zu errichten.
Damit sind AG, GE der Länge nach inkommensurabel [wie X.19.].
Die zu AB parallelen GH, RK, FL sind auf gleiche Weise zu ziehen wie zuvor.
Das Quadrat über MO ist daher gleich dem Rechteck AC.

Zu dem ist zu zeigen, dass MO konjugiert binomisch ist.



Denn da AG, EG der Länge nach inkommensurabel sind, sind auch AH, GK und damit auch SN, NQ inkommensurabel. Somit sind MN, NO im Quadrat inkommensurabel. Da AE, AB der Länge nach kommensurabel sind, ist AK rational. Die Summe der Quadrate über MN und NO ist gleich AK und daher rational.

Da DE, AB ebenso wie DE, EK der Länge nach inkommensurabel sind, jedoch DE, EF kommensurabel, sind EF, EK der Länge nach inkommensurabel, jedoch im Quadrat kommensurabel.
Da LE, dem MR gleich ist, quadriert rational ist und sich aus MN mit NO ergibt, ist das Rechteck aus MN mit NO quadriert rational. Die Summe der Quadrate über MN und NO ist rational und MN, NO sind im Quadrat inkommensurabel.
Schließen zwei im Quadrat inkommensurable Strecken, deren Summe ihrer Quadrate rational ist, ein quadriert rationales Rechteck ein, dann ist die zusammengesetzte Strecke irrational und, wie benannt, konjugiert binomisch.

Deshalb ist MO konjugiert binomisch und ist das Quadrat über MO gleich AC, was zu zeigen war.

Anmerkung: $r \cdot (d + e)^{1/2} = r \cdot (g + h)^{1/2} + r \cdot (g - h)^{1/2}$ wenn $d = 2g$ und $e = 2 \cdot (g^2 - h^2)^{1/2}$
wobei $r \cdot (g + h)^{1/2} = MN$, $r \cdot (g - h)^{1/2} = NO$, $r = AB$.

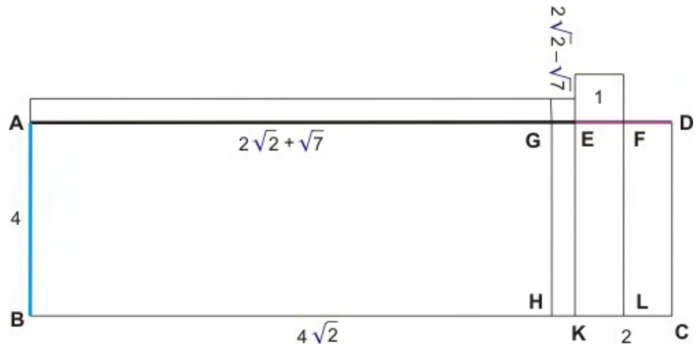
Beispiele: $r \cdot (50 + 10 \cdot 5^{1/2}) = r \cdot ((25 + 10 \cdot 5^{1/2})^{1/2} + (25 - 10 \cdot 5^{1/2})^{1/2})^2$.

X.59. **[X.58]**

Das von einer rationalen Strecke und einer quadriert binomischen Strecke fünfter Art eingeschlossene Rechteck ist gleich einem Quadrat, dessen Seite, wie benannt, konjugiert binomisch primär irrational ist.

Wird ein Rechteck ABCD von einer rationalen Strecke AB und einer quadriert binomischen Strecke fünfter Art AD [wie X.53.] eingeschlossen, die in E in Strecken geteilt ist, die nur im Quadrat kommensurabel sind, dann, sage ich, ist AC gleich einem Quadrat, dessen Seite, wie benannt, konjugiert binomisch primär irrational ist [wie in X.41.].

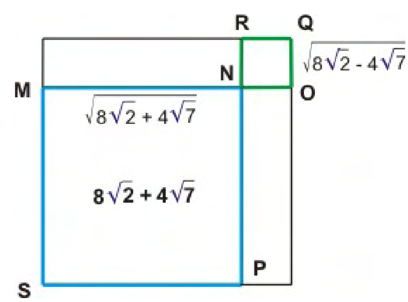
Es sind die Strecken auf gleiche Weise wie vorher zu vergleichen. Offensichtlich ist somit das Quadrat über MO gleich dem Rechteck AC.



Es ist deshalb zu zeigen, dass MO konjugiert binomisch primär irrational ist.

Denn da AG, GE inkommensurabel sind, ebenso wie AH, HE, sind die Quadrate über MN, NO inkommensurabel. MN, NO sind damit im Quadrat inkommensurabel.

Da AD eine quadriert binomische Strecke fünfter Art und ED die kleinere der beiden Teilstrecken ist, sind ED, AB der Länge nach inkommensurabel.
Da AE, ED inkommensurabel sind, sind damit AB, ED der Länge nach inkommensurabel.
Somit ist AK, dem die Summe der Quadrate über MN und NO gleich ist, quadriert rational.



Da DE, AB, die gleich DE, EK sind, der Länge nach kommensurabel sind und DE, EF kommensurabel sind, sind auch EF, EK kommensurabel.
Es ist EK rational, somit EL, das MR gleich ist und sich aus MN mit NO ergibt.
Also ist das Rechteck aus MN mit NO rational.
Damit sind MN, NO im Quadrat inkommensurabel, die Summe ihrer Quadrate ist quadriert rational und das Rechteck, das sie ergeben, ist rational.

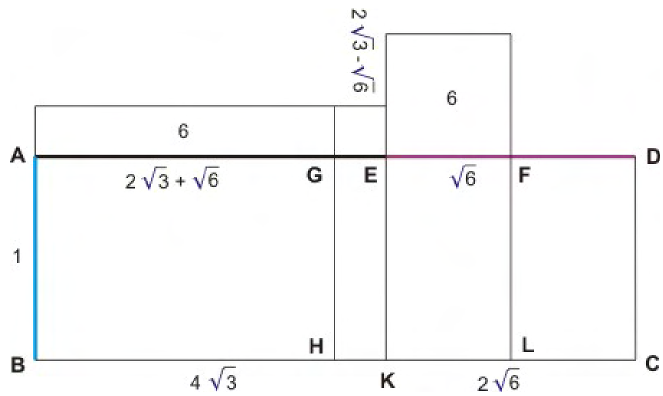
Deshalb ist MO konjugiert binomisch primär irrational und ist das Quadrat über MO gleich AC, was zu zeigen war.

Beispiel: $r \cdot (4 \cdot 2^{1/2} + 2) = r \cdot ((2 \cdot 2^{1/2} + 7^{1/2})^{1/2} + (2 \cdot 2^{1/2} - 7^{1/2})^{1/2})^2$, (im graphischen Beispiel r= 4).

X.60. [X.59]

Das von einer rationalen Strecke und einer quadriert binomischen Strecke sechster Art eingeschlossene Rechteck ist gleich einem Quadrat, dessen Seite, wie benannt, konjugiert binomisch sekundär irrational ist.

Wird ein Rechteck ABCD von einer rationalen Strecke AB und einer quadriert binomischen Strecke sechster Art AD [wie X.54.] eingeschlossen, die in E in Strecken geteilt ist, die nur im Quadrat kommensurabel sind, wobei die größere Strecke AE ist, dann, sage ich, ist AC gleich einem Quadrat, dessen Seite, wie benannt, konjugiert binomisch sekundär irrational ist [wie in X.42.].

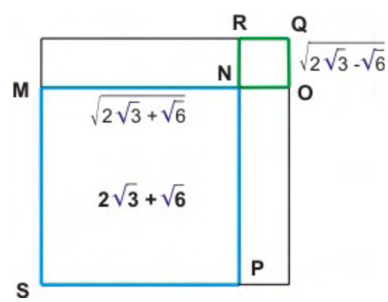


Es sind die Strecken auf gleiche Weise wie vorher zu vergleichen.
Offensichtlich ist somit das Quadrat über MO gleich dem Rechteck AC und sind MN, NO im Quadrat inkommensurabel.

EA, AB sind der Länge nach inkommensurabel, jedoch im Quadrat kommensurabel, deshalb ist AK, dem die Summe der Quadrate über MN und NO gleich ist, quadriert rational.

Da ED, AB der Länge nach inkommensurabel sind, sind FE, EK inkommensurabel, damit sind FE, EK der Länge nach inkommensurabel, jedoch im Quadrat kommensurabel.

Damit ist EL, dem das Rechteck MR, das sich aus MN mit NO ergibt, gleich ist, quadriert rational.
Da AE, EF inkommensurabel sind, sind auch AK, EL inkommensurabel.



Es ist AK gleich der Summe der Quadrate über MN und NO und EL gleich dem Rechteck aus MN mit NO, also ist die Summe der Quadrate über MN und NO zum Rechteck aus MN mit NO inkommensurabel und da sie quadriert rational sind, sind MN, NO im Quadrat inkommensurabel.

Deshalb ist MO konjugiert binomisch sekundär irrational und ist das Quadrat über MO gleich AC, was zu zeigen war.

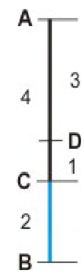
Beispiel: $r \cdot (4 \cdot 3^{1/2} + 2 \cdot 6^{1/2}) = r \cdot ((2 \cdot 3^{1/2} + 6^{1/2})^{1/2} + (2 \cdot 3^{1/2} - 6^{1/2})^{1/2})^2$,
(im graphischen Beispiel ist $r = 1$).

Lemma X.61.

Wird eine Strecke in ungleiche Teile geteilt, dann ist die Summe ihrer Quadrate größer als das doppelte Rechteck, das sie ergeben

Wenn die Strecke AB in C in ungleiche Teile geteilt ist und AC der größere ist, dann, sage ich, ist die Summe der Quadrate über AC und CB größer als das doppelte Rechteck aus AC mit CB.

Denn wird AB in D in zwei gleiche Teile geteilt, in C aber in ungleiche, dann ist die Summe aus dem Quadrat über CD zusammen mit dem Rechteck aus AC mit CB gleich dem Quadrat über AD [wie II.5.].



Da das Rechteck aus AC mit CB kleiner als das Quadrat über AD ist, ist auch das doppelte Rechteck aus AC mit CB kleiner als das doppelte Quadrat über AD.
Die Summe der Quadrate über AC und CB ist gleich der doppelten Summe der Quadrate über AD und DC [wie II.9.].

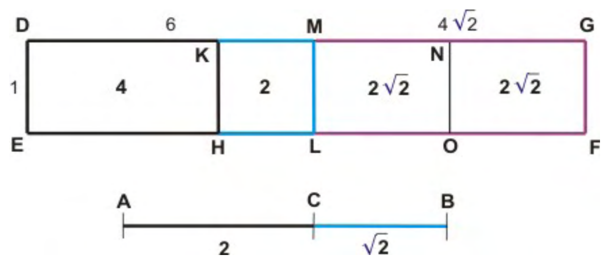
Deshalb ist die Summe der Quadrate über AC und CB größer als das doppelte Rechteck aus AC mit CB, was zu zeigen war.

X.61. [X.60]

Wird auf einer rationalen Strecke ein Rechteck errichtet, das dem Quadrat über einer binomischen Strecke gleich ist, ist seine andere Seite eine quadriert binomische Strecke erster Art.

Ist die binomische Strecke AB in C in Strecken geteilt, die nur im Quadrat kommensurabel sind [wie X.43.], wobei AC die größere Teilstrecke ist, und schließt sie mit der rationalen Strecke DE das dem Quadrat über AB gleiche Rechteck DEFG mit der Strecke DG ein, dann, sage ich, ist DG eine quadriert binomische Strecke erster Art.

An DE ist das dem Quadrat über AC gleiche Rechteck DH und daran das dem Quadrat über BC gleiche Rechteck KL einzuzeichnen.
Das übrige Rechteck MF ist dann gleich dem doppelten Rechteck aus AC mit CB.
MG ist in N in zwei gleiche Teile zu teilen und die zu DE parallele NO zu ziehen.
Es ist dann das Rechteck aus AC mit CB gleich MO und gleich NF.



Da AB eine binomische Strecke ist, die in C so geteilt ist, dass AC, CB im Quadrat kommensurabel sind, ist das Quadrat über AC zum Quadrat über CB kommensurabel und zur Summe der Quadrate über AC und CB.

Die Summe der Quadrate über AC und CB ist rational und gleich DL.
Somit ist DL rational und da es an der rationalen Strecke DE errichtet ist, ist auch DM rational, das damit zu DE der Länge nach kommensurabel ist.

Da AC, CB im Quadrat kommensurabel sind, ist MF, das dem doppelten Rechteck aus AC mit CB gleich ist, quadriert rational und da es der rationalen Strecke ML errichtet ist, ist MG quadriert rational und zur Strecke ML, die gleich DE ist, der Länge nach inkommensurabel.
Da MD rational ist und zur Strecke DE der Länge nach kommensurabel, sind DM, MG der Länge nach inkommensurabel, jedoch im Quadrat kommensurabel.

Damit ist DG eine binomische Strecke und es ist zu zeigen, eine quadriert binomische Strecke erster Art.

Es verhält sich das Rechteck aus AC mit CB zu den Quadraten über AC und CB und es verhält sich MO zu DO, KL wie das mittlere Glied in fortlaufend gleicher Proportion.
Also verhält sich DH zu MO wie MO zu KL und verhält sich DK zu MN wie MN zu MK. Das Rechteck aus DK mit KM ist damit gleich dem Quadrat über MN.

Da die Quadrate über AC, CB kommensurabel sind und auch DH, KL kommensurabel sind, sind DK, KM kommensurabel. Die Summe der Quadrate über AC und CB ist größer als das doppelte Rechteck aus AC mit CB, damit ist DL größer als MF und ist DM größer als MG.

Das Rechteck aus DK mit KM ist gleich dem Quadrat über MN, das ein Viertel des Quadrats über MG ist, wobei DK, KM kommensurabel sind.
Wird bei zwei ungleichen Strecken durch Abteilen des Quadrats über einer Seite vom Rechteck über der größeren Strecke, das verringert um das abgeteilte Quadrat gleich einem Viertel des Quadrats über der kleineren ist, die größere Strecke in der Länge nach kommensurable Teile geteilt, dann ist das Quadrat über der größere Strecke um ein Quadrat, dessen Seite der Länge nach kommensurabel zu ihr ist, größer als das Quadrat über der kleineren [wie X.18.].
Also ist das Quadrat über DM um ein Quadrat, dessen Seite zu DM kommensurabel ist, größer als das Quadrat über MG.
Somit sind DM, MG im Quadrat kommensurabel, wobei DM die größere Teilstrecke und zu DE der Länge nach kommensurabel ist.

Deshalb ist DG eine quadriert binomische Strecke erster Art, was zu zeigen war.

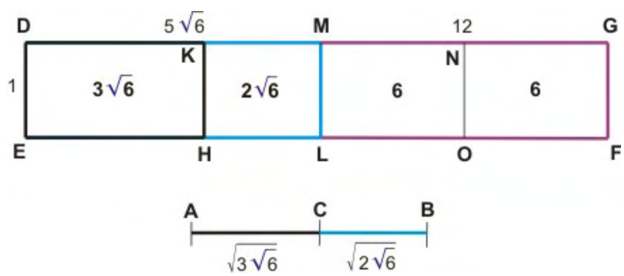
Beispiel: $(2 + 2^{1/2})^2 = 6 + 4 \cdot 2^{1/2}$.

X.62. [X.61]

Wird auf einer rationalen Strecke ein Rechteck errichtet, das dem Quadrat über einer binomisch primär irrationalen Strecke gleich ist, ist seine andere Seite eine quadriert binomische Strecke zweiter Art.

Ist die binomisch primär irrationale Strecke AB in C in biquadriert rationale Strecken geteilt, wobei AC die größere ist, und schließt mit der rationalen Strecke DE das dem Quadrat über AB gleiche Rechteck DF mit der Strecke DG ein, dann, sage ich, ist DG eine quadriert binomische Strecke zweiter Art.

Es sind die Strecken wie vorher zu vergleichen.



Die Strecke AB ist binomisch primär irrational und in C so geteilt, dass AC, CB biquadriert rational und im Quadrat kommensurabel sind und ein rationales Rechteck ergeben [wie X.44.]. Die Quadrate über AC, CB sind damit quadriert rational.

Da damit DL quadriert rational ist und an der rationalen Strecke DE errichtet, ist MD quadriert rational und zu DE der Länge nach inkommensurabel.

Da das doppelte Rechteck aus AC mit CB rational ist, ist MF rational und da es an der rationalen Strecke ML errichtet ist, ist MG rational und zu DE der Länge nach kommensurabel. Somit sind DM, MG der Länge nach inkommensurabel, jedoch im Quadrat kommensurabel.

Damit ist DG eine binomische Strecke und, sage ich, eine quadriert binomische Strecke der zweiten Art.

Denn da die Summe der Quadrate über AC und CB größer ist als das doppelte Rechteck aus AC mit CB, ist DL größer als MF. Damit ist auch DM größer als MG.
Da die Quadrate über AC, CB kommensurabel sind, sind auch DH, KL und damit auch DK, KM kommensurabel.
Das Rechteck aus DK mit KM ist gleich dem Quadrat über MN.
Also ist das Quadrat über DM um eine Quadrat, dessen Seite zu DM kommensurabel ist, größer als das Quadrat über MG, wobei MG, DE der Länge nach kommensurabel sind.

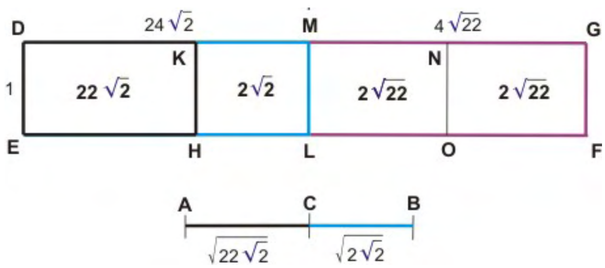
Deshalb ist DG eine quadriert binomische Strecke zweiter Art, was zu zeigen war.

Beispiel: $(3^{1/2} \cdot 6^{1/4} + 2^{1/2} \cdot 6^{1/4})^2 = 5 \cdot 6^{1/2} + 12.$

<u>X.63.</u> [X.62]

Wird auf einer rationalen Strecke ein Rechteck errichtet, das dem Quadrat über einer binomisch sekundär irrationalen Strecke gleich ist, ist seine andere Seite eine quadriert binomische Strecke dritter Art.

Ist die binomisch sekundär irrationale Strecke AB in C in biquadriert rationale Strecken geteilt, wobei AC die größere ist, und schließt mit der rationalen Strecke DE das dem Quadrat über AB gleiche Rechteck DF mit der Strecke DG ein, dann, sage ich, ist DG eine quadriert binomische Strecke dritter Art. Es sind die Strecken wie vorher zu vergleichen.



Die Strecke AB ist binomisch sekundär irrational und in C so geteilt, dass AC, CB biquadriert rational und im Quadrat kommensurabel sind und ein quadriert rationales Rechteck ergeben [wie X.45.].

Da die Summe der Quadrate über AC, BC quadriert rational ist und gleich DL, ist DL quadriert rational. Da DL an der rationalen Strecke DE errichtet ist, ist DM quadriert rational und zu DE der Länge nach inkommensurabel. Aus den gleichen Gründen ist MG quadriert rational und zu ML, das gleich DE ist, der Länge nach inkommensurabel.
Die Strecken AC, CB sind der Länge nach inkommensurabel, wobei sich AC zu CB verhält wie das Quadrat über AC zum Rechteck aus AC mit CB. Damit ist das Quadrat über AC zum Rechteck aus AC, CB inkommensurabel.
Die Summe der Quadrate über AC, CB, die gleich DL und das doppelte Rechteck aus AC mit CB, das gleich MF ist, sind inkommensurabel, somit sind DM, MG der Länge nach inkommensurabel, jedoch im Quadrat kommensurabel.

Also ist DG ein binomische Strecke und, wie zu zeigen, eine quadriert binomische Strecke dritter Art.
Ebenso wie zuvor ist DM größer als MG und sind DK, KM kommensurabel.

Das Rechteck aus DK mit KM ist gleich dem Quadrat über MN.
Das Quadrat über DM ist also um ein Quadrat, dessen Seite zu DM kommensurabel ist, größer als das Quadrat über MG.
Keine der Strecken DM, MG ist der Länge nach kommensurabel zu DE.

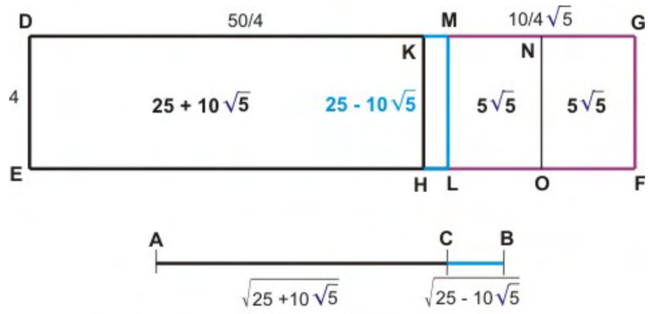
Deshalb ist DG eine quadriert binomische Strecke dritter Art, was zu zeigen war.

Beispiel: $(22^{1/2} \cdot 2^{1/4} + 2^{1/2} \cdot 2^{1/4})^2 = 24 \cdot 2^{1/2} + 4 \cdot 22^{1/2}$.

<u>X.64.</u> [X.63]

Wird auf einer rationalen Strecke ein Rechteck errichtet, das dem Quadrat über einer konjugiert binomischen Strecke gleich ist, ist seine andere Seite eine quadriert binomische Strecke vierter Art.

Ergibt die, in C geteilte [wie X.46.], konjugiert binomische Strecke AB, wobei AC größer als CB ist, mit der rationalen Strecke DE ein dem dem Quadrat über AB gleiches Rechteck mit der Strecke DG, dann, sage ich, ist DG eine quadriert binomische Strecke vierter Art.



Es sind die Strecken wie vorher zu vergleichen.

Da AB eine, in C geteilte, konjugiert binomische Strecke ist, sind AC, CB im Quadrat inkommensurabel, ergeben ein quadriert rationales Rechteck und es ist die Summe der Quadrate über AC, CB rational. Da die Summe der Quadrate über AC, CB rational ist, ist DL rational. Somit ist DM rational und zu DE der Länge nach kommensurabel.
Das doppelte Rechteck aus AC mit CB ist quadriert rational, es ist MF gleich und, da an der rationalen Strecke ML errichtet, ist MG zu DE der Länge nach inkommensurabel.
Damit sind DM, MG der Länge nach inkommensurabel, jedoch im Quadrat kommensurabel.

Also ist DG eine binomische Strecke und, wie zu zeigen, eine quadriert binomische Strecke vierter Art.
Ebenso wie zuvor ist zu zeigen, dass DM größer als MG und das Rechteck aus DK mit KM gleich dem Quadrat über MN ist. Da die Quadrate über AC, CB inkommensurabel sind, sind DH, KL inkommensurabel.

Wird bei zwei ungleichen Strecken durch Abteilen des Quadrats über einer Seite vom Rechteck über der größeren Strecke, das verringert um das abgeteilte Quadrat gleich einem Viertel des Quadrats über der kleineren ist, die größere Strecke in der Länge nach inkommensurable Teile geteilt, dann ist das Quadrat über der größere Strecke um ein Quadrat, dessen Seite der Länge nach inkommensurabel zu ihr ist, größer als das Quadrat über der kleineren [wie X.19.].
Somit ist das Quadrat über DM um ein Quadrat, dessen Seite der Länge nach inkommensurabel zu DM ist, größer als das Quadrat über MG. Die Strecken DM, MG sind im Quadrat kommensurabel, wobei DM zur rationalen Strecke DE kommensurabel ist.

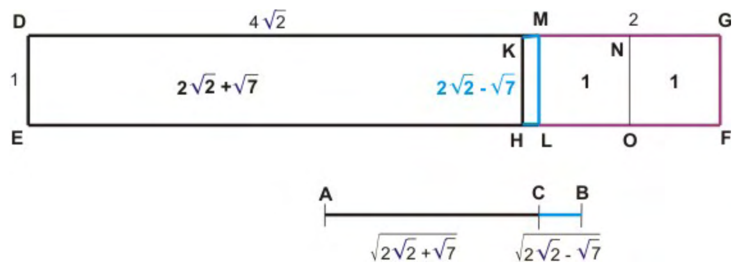
Deshalb ist DG eine quadriert binomische Strecke vierter Art, was zu zeigen war.

Beispiel: $((25 + 10 \cdot 5^{1/2})^{1/2} + (25 - 10 \cdot 5^{1/2})^{1/2})^2 = 50 + 10 \cdot 5^{1/2}$.

X.65. **[X.64]**
Wird auf einer rationalen Strecke ein Rechteck errichtet, das dem Quadrat über einer konjugiert binomisch primär irrationalen Strecke gleich ist, ist seine andere Seite eine quadriert binomische Strecke fünfter Art.

Ergibt die, in C geteilte [wie X.47.], konjugiert binomisch primär irrationale Strecke AB, wobei AC größer als CB ist, mit der rationalen Strecke DE ein dem dem Quadrat über AB gleiches Rechteck mit der Strecke DG, dann, sage ich, ist DG eine quadriert binomische Strecke fünfter Art. Es sind die Strecken wie vorher zu vergleichen.

AB ist eine konjugiert binomisch primär irrationale Strecke und in C so geteilt, dass AC, CB im Quadrat inkommensurabel sind, die Summe der Quadrate über ihnen quadriert rational ist und sie ein rationales Rechteck ergeben.



Da die Summe der Quadrat über AB, BC quadriert rational ist, ist DL quadriert rational, somit auch die Strecke DM, die damit zur rationalen Strecke DE der Länge nach inkommensurabel ist.

Da das doppelte Rechteck aus AC mit CB, dem MF gleich, rational ist, ist MG rational und zur Strecke DE kommensurabel. Somit sind DM, MG der Länge nach inkommensurabel, jedoch im Quadrat kommensurabel.

Also ist DG eine binomische Strecke und, sage ich, quadriert binomisch fünfter Art.

Es ist, wie schon gezeigt, das Rechteck aus DK mit KM gleich dem Quadrat über MN, wobei DK, KM der Länge nach inkommensurabel sind.
Damit ist das Quadrat über DM um ein Quadrat, dessen Seite zu DM kommensurabel ist, größer als das Quadrat über MG.
Somit sind DM, MG im Quadrat kommensurabel und ist die kleinere Strecke MG zur Strecke DE der Länge nach kommensurabel.

Deshalb ist DG eine quadriert binomische Strecke fünfter Art, was zu zeigen war.

Beispiel: $((2 \cdot 2^{1/2} + 7^{1/2})^{1/2} + (2 \cdot 2^{1/2} - 7^{1/2})^{1/2})^2 = 4 \cdot 2^{1/2} + 2.$

X.66. **[X.65]**
Wird auf einer rationalen Strecke ein Rechteck errichtet, das dem Quadrat über einer konjugiert binomisch sekundär irrationalen Strecke gleich ist, ist seine andere Seite eine quadriert binomische Strecke sechster Art.

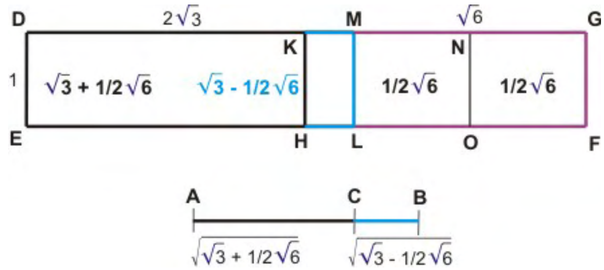
Ergibt die, in C geteilte, konjugiert binomisch sekundär irrationale Strecke AB, wobei AC größer als CB ist, mit der rationalen Strecke DE ein dem dem Quadrat über AB gleiches Rechteck mit der Strecke DG, dann, sage ich, ist DG eine quadriert binomische Strecke sechster Art. Es sind die Strecken wie vorher zu vergleichen.

AB ist eine konjugiert binomisch sekundär irrationale Strecke und in C so geteilt, dass AC, CB im Quadrat inkommensurabel sind, die Summe der Quadrate über ihnen quadriert rational ist und das Rechteck, das sie ergeben, quadriert rational und zur Summe der Quadrate inkommensurabel ist [wie X.48.].

Da die Rechtecke DL, MF, wie vorher gezeigt, im Quadrat kommensurabel sind und an der rationalen Strecke DE errichtet, sind DM, MG quadriert rational und zu DE der Länge nach inkommensurabel.
Die Summe der Quadrate über AC, CB ist inkommensurabel zum doppelten Rechteck aus AC mit CB, womit DL, MF inkommensurabel sind und damit auch DM, MG.

Da DM, MG quadriert rational und inkommensurabel sind, ist DG eine binomische Strecke und, sage ich, eine quadriert binomische sechster Art.

Denn, wie vorher gezeigt, ist das Rechteck aus DK mit KM gleich dem Quadrat über MN und sind DK, KM der Länge nach inkommensurabel.



Aus den gleichen Gründen ist das Quadrat über DM um ein Quadrat, dessen Seite zu DM der Länge nach inkommensurabel ist, größer als das Quadrat über MG.
Es ist keine der Strecken DM, MG kommensurabel zur rationalen Strecke DE.

Deshalb ist DG eine quadriert binomische Strecke sechster Art, was zu zeigen war.

Beispiel: $((3^{1/2} + 1/2 \cdot 6^{1/2})^{1/2} + (3^{1/2} - 1/2 \cdot 6^{1/2})^{1/2})^2 = 2 \cdot 3^{1/2} + 6^{1/2}$.

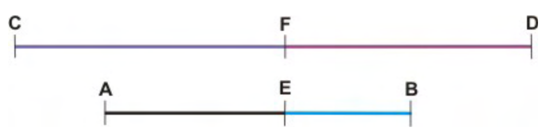
<u>X.67.</u> [X.66]

Eine Strecke, die zu einer binomischen Strecke der Länge nach kommensurabel ist, ist eine quadriert binomische Strecke gleicher Art.

Wenn AB eine binomische Strecke und die Strecke CD zu AB kommensurabel ist, dann, sage ich, ist CD eine quadriert binomische Strecke der gleichen Art wie AB.

Denn ist AB eine binomische Strecke, dann ist sie in E so zu teilen, dass AE, EB nur im Quadrat kommensurabel sind [wie X.43.].

Verhält sich AB zu CD wie AE zur Strecke CF, dann verhält sich EB zu FD wie AB zu CD [wie V.19.].



Da AB, CD der Länge nach kommensurabel sind, sind auch AE, CF und sind auch EB, FD der Länge nach kommensurabel.
Die Strecken AE, EB sind quadriert rational, somit sind auch CF, FD quadriert rational.

Das sich AE zu CF verhält wie EB zu FD, verhält sich, nach Umordnung, AE zu EB wie CF zu FD. Die Strecken AE, EB sind im Quadrat kommensurabel, somit sind auch CF, FD im Quadrat kommensurabel.

Also ist CD eine binomische Strecke und, sage ich, der gleichen Art wie AB.

Denn das Quadrat über AE ist um ein Quadrat, dessen Seite zu AE kommensurabel oder inkommensurabel ist, größer als das Quadrat über EB.
Ist das Quadrat über AE um ein Quadrat, dessen Seite zu AE kommensurabel ist, größer als das Quadrat über EB, dann ist auch das Quadrat über CF um ein Quadrat, dessen Seite zu CF kommensurabel ist, größer als das Quadrat über FD.

Ist AE rational, dann ist auch CF rational, womit AB, CD quadriert binomische Strecken erster und damit gleicher Art sind. Ist EB rational, dann ist auch FD rational und damit ist CD, wie AB, eine quadriert binomische Strecke zweiter Art.
Ist aber keine der Strecken AE, EB rational, dann auch keine der Strecken CF, FD, womit AB, CD quadriert binomische Strecken dritter Art sind.

Ist dagegen das Quadrat über AE um eine Quadrat, dessen Seite zu AE inkommensurabel ist, größer als das Quadrat über EB, dann ist auch das Quadrat über CF um ein Quadrat, dessen Seite zu CF inkommensurabel ist, größer als das Quadrat über FD.
Ist dann AE rational, dann auch CF, womit AB, CD quadriert binomische Strecken vierter Art sind. Ist EB rational, dann auch FD und somit sind AB, CD quadriert binomische Strecken fünfter Art. Ist keine der Strecken AE, EB rational, dann auch keine der Strecken CF, FD, weshalb AB, CD quadriert binomische Strecken sechster Art sind.

Deshalb ist eine Strecke, die zu einer binomischen Strecke kommensurabel ist, eine quadriert binomische Strecke gleicher Art, was zu zeigen war.

Beispiel: die binomische Größe $2 + 2^{1/2}$ ist eine quadriert binomische Größe vierter Art:
$2 + 2^{1/2} = ((1 + \frac{1}{2}\, 2^{1/2})^{1/2} + (1 - \frac{1}{2}\, 2^{1/2})^{1/2})^2$, ebenso $r \cdot (2 + 2^{1/2})$, wobei r rational.

<u>X.68.</u> [X.67]

Eine Strecke, die zu einer binomisch primär oder sekundär irrationalen Strecke kommensurabel ist, ist ebenso binomisch primär oder sekundär irrational.

Wenn AB eine binomisch primär oder sekundär irrationale Strecke und die Strecke CD zu AB der Länge nach kommensurabel ist, dann, sage ich, ist CD ebenso eine binomisch primär oder sekundär irrationale Strecke.

Denn ist AB eine binomisch primär oder sekundär irrationale Strecke, dann ist sie in E so zu teilen, dass AE, EB biquadriert rational und im Quadrat kommensurabel sind [wie X.44, X.45.].

Verhält sich AB zu CD wie AE zur Strecke CF, dann verhält sich EB zu FD wie AB zu CD [wie V.19.]. Da AB, CD kommensurabel sind, sind AE, CF und sind EB, FD kommensurabel. Die Strecken AE, EB sind biquadriert rational, also sind CF, FD biquadriert rational.
Da sich AE zu EB verhält wie CF zu FD und da AE, EB im Quadrat kommensurabel sind, sind auch CF, FD im Quadrat kommensurabel.

Damit ist CD binomisch primär oder sekundär irrational und, sage ich, ebenso wie AB binomisch primär oder binomisch sekundär irrational.
Denn da sich AE zu EB verhält wie CF zu FD, verhält sich das Quadrat über AE zum Rechteck aus AE mit EB wie das Quadrat über CF zum Rechteck aus CF mit FD und, nach Umordnung, verhält sich das Quadrat über AE zum Quadrat über CF wie das Rechteck aus AE mit EB zum Rechteck aus CF mit FD.
Die Quadrate über AE, CF sind kommensurabel, somit ist auch das Rechteck aus AE mit EB zum Rechteck aus CF mit FD kommensurabel.

Ist das Rechteck aus AE mit EB rational, dann ist auch das Rechteck aus CF mit FD rational und die Strecke CD binomisch primär irrational, ist es aber das eine Rechteck quadriert rational, dann auch das andere und CD dann binomisch sekundär irrational.

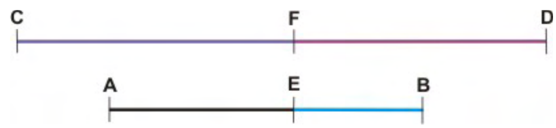
Deshalb ist CD ebenso wie AB binomisch primär oder sekundär irrational, was zu zeigen war.

<u>X.69.</u> [X.68]

Eine Strecke, die zu einer konjugiert binomischen Strecke der Länge nach kommensurabel ist, ist eine konjugiert binomische Strecke.

Wenn AB eine konjugiert binomische Strecke ist, zu der die Strecke CD kommensurabel ist, dann, sage ich, CD ist konjugiert binomisch.

Denn AB ist in E so teilen, dass AE, EB im Quadrat inkommensurabel sind, die Summe der Quadrate über ihnen rational ist und sie ein quadriert rationales Rechteck ergeben [wie X.46.].



Verhält sich dann, wie vorher, AB zu CD wie AE zu CF, dann verhält sich AB zu CD wie EB zu FD und es verhält sich deshalb AE zu CF wie EB zu FD.
Da AB, CD kommensurabel sind, sind AE, CF und sind EB, FD kommensurabel.
Es verhält sich AE zu CF wie EB zu FD und, nach Umordnung, verhält sich AE zu EB wie CF zu FD. Damit verhält sich die ganze Strecke AB zu BE wie CD zu DF und es verhält sich das Quadrat über AB zum Quadrat über BE wie das Quadrat über CD zum Quadrat über DF.

Auf gleiche Weise ist zu zeigen, dass sich das Quadrat über AB zum Quadrat über AE verhält wie das Quadrat über CD zum Quadrat über CF.

Da sich das Quadrat über AB zur Summe der Quadrate über AE, EB verhält wie das Quadrat über CD zur Summe der Quadrate über CF, FD, verhält sich, nach Umordnung, das Quadrat über AB zum Quadrat über CD wie die Summe der Quadrate über AE, EB zur Summe der Quadrate über CF, FD.
Da die Quadrate über AB, CD kommensurabel sind, ist auch die Summe der Quadrate über AE, EB zur Summe der Quadrate über CF, FD kommensurabel.
Die Summe der Quadrate über AE, EB ist rational, somit ist die Summe der Quadrate über CF, FD rational. Damit ist das doppelte Rechteck aus AE mit EB zum doppelten Rechteck aus CF mit FD kommensurabel.
Da das doppelte Rechteck aus AE mit EB quadriert rational ist, ist auch das doppelte Rechteck aus CF mit FD quadriert rational

Somit sind CF, FD im Quadrat kommensurabel, die Summe ihrer Quadrate ist rational und das von ihnen eingeschlossene Rechteck ist quadriert rational.
Damit ist CD eine, so benannte, konjugiert irrationale Strecke.

Deshalb ist eine Strecke, die zu einer konjugiert binomischen Strecke kommensurabel ist, konjugiert binomisch, was zu zeigen war.

X.70. [X.69]

Eine Strecke, die zu einer konjugiert binomisch primär irrationalen Strecke der Länge nach kommensurabel ist, ist eine konjugiert binomisch primär irrationale Strecke.

Wenn AB eine konjugiert binomisch primär irrationale Strecke ist, zu der die Strecke CD kommensurabel ist, dann ist zu zeigen, dass auch CD eine konjugiert binomisch primär irrationale Strecke ist.

Denn AB ist in E so zu teilen, dass AE, EB im Quadrat inkommensurabel sind, die Summe der Quadrate über ihnen quadriert rational ist und sie ein rationales Rechteck ergeben [wie X.47.].

Die Strecken sind wie vorher zu vergleichen und zu zeigen, dass CF, FD im Quadrat inkommensurabel sind, dass die Summe der Quadrate über AE, EB zur Summe der Quadrate über CF, FD kommensurabel ist und dass das Rechteck aus AE mit EB zum Rechteck aus CF mit FD kommensurabel ist.
Da die Summe der Quadrate über CF, FD quadriert rational ist, ist das Rechteck aus CF mit FD rational.

Deshalb ist CD eine konjugiert binomisch primär irrationale Strecke, was zu zeigen war.

X.71. [X.70]

Eine Strecke, die zu einer konjugiert binomisch sekundär irrationalen Strecke der Länge nach kommensurabel ist, ist eine konjugiert binomisch sekundär irrationale Strecke.

Wenn AB eine konjugiert binomisch sekundär irrationale Strecke ist, zu der die Strecke CD kommensurabel ist, dann ist zu zeigen, dass auch CD eine konjugiert binomisch sekundär irrationale Strecke ist.

Denn AB ist in E so zu teilen, dass AE, EB im Quadrat inkommensurabel sind, dass die Summe der Quadrate über ihnen quadriert rational ist und zu der das quadriert rationale Rechteck, das sie ergeben, inkommensurabel ist [wie X.48.].

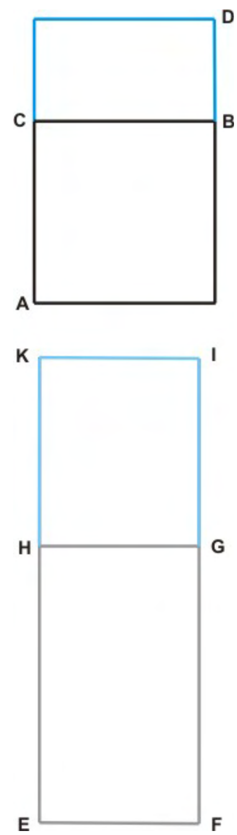
Die Strecken sind wie vorher zu vergleichen und zu zeigen, dass CF, FD im Quadrat inkommensurabel sind, dass die Summe der Quadrate über AE, EB zur Summe der Quadrate über CF, FD kommensurabel ist und dass das Rechteck aus AE mit EB zum Rechteck aus CF mit FD kommensurabel ist.
Da die Summe der Quadrate über CF, FD quadriert rational ist, ist das Rechteck aus CF mit FD quadriert rational, denn die Summe der Quadrate über CF, FD ist zum Rechteck aus CF mit FD inkommensurabel.

Deshalb ist CD eine konjugiert binomisch sekundär irrationale Strecke, was zu zeigen war.

X.72. [X.71]

Eine rationale und eine quadriert rationale Fläche zusammen sind gleich dem Quadrat über einer von vier verschiedenen binomischen Strecken, der binomischen und der binomisch primär irrationalen, der konjugiert binomischen und der konjugiert binomisch primär irrationalen Strecke.

Wenn AB eine rationale, CD aber eine quadriert rationale Fläche ist, dann, sage ich, ist die Fläche AD, die sie zusammen ergeben, gleich dem Quadrat über entweder einer binomischen, einer binomisch primär irrationalen, einer konjugiert binomischen oder einer konjugiert binomisch primär irrationalen Strecke.



Denn AB ist größer als CD oder kleiner als CD.

Es sei nun AB größer als CD und auf der rationalen Strecke EF ein der Fläche AB gleiches Rechteck EG mit der Seite EH errichtet, sowie daran das der Fläche DC gleiche Rechteck HI mit der Seite HK.

Ist AB rational, dann ist, da EG gleich AB ist, EG rational und seine Seite EH, da an der rationalen Strecke EF errichtet, zu EF der Länge nach kommensurabel.
Es ist dann CD quadriert rational und, da HI gleich CD ist, HI quadriert rational und seine Seite HK, da an der rationalen EF errichtet, quadriert rational und zu EF der Länge nach inkommensurabel.
Da CD quadriert rational, aber AB rational ist, sind AB, CD inkommensurabel und sind auch EG, HI inkommensurabel.
Es verhält sich dann EG zu HI wie EH zu HK. Somit sind EH, HK der Länge nach inkommensurabel, jedoch im Quadrat kommensurabel.
Damit ist EK binomisch und in H so geteilt, dass EH, HK nur im Quadrat kommensurabel sind.
Da AB größer als CD ist, da AB gleich EG und CD gleich HI ist, ist EG größer als HI und ist EH größer als HK.

Das Quadrat über EH ist um ein Quadrat, dessen Seite zu EH kommensurabel oder inkommensurabel ist, größer als das Quadrat über HK.

Ist das Quadrat über EH um ein Quadrat größer, dessen Seite zu ihm kommensurabel ist, dann ist, da EH die größere Strecke, zu EF kommensurabel und rational ist, EK eine quadriert binomische Strecke erster Art.
Das von einer rationalen Strecke und einer quadriert binomischen Strecke erster Art eingeschlossene Rechteck ist gleich dem Quadrat über einer binomischen Strecke [wie X.55.]
Also ist damit das Rechteck EI gleich dem Quadrat über einer binomischen Strecke, das AD gleich ist.

Ist das Quadrat über EH um ein Quadrat größer, dessen Seite zu ihm inkommensurabel ist, dann ist, da EH die größere Strecke, zu EF kommensurabel und rational ist, EK eine quadriert binomische Strecke vierter Art.
Das von einer rationalen Strecke und einer quadriert binomischen Strecke vierter Art eingeschlossene Rechteck ist gleich einem Quadrat, dessen Seite, wie benannt, konjugiert binomisch ist [wie X.58.].
Also ist dann das Rechteck EI gleich dem Quadrat über einer konjugiert binomischen Strecke, das AD gleich ist.

Ist aber AB kleiner als CD, dann ist EG kleiner als HI und ist EH kleiner als HK.

Das Quadrat über HK ist dann um eine Quadrat, dessen Seite zu HK kommensurabel oder inkommensurabel ist, größer als das Quadrat über EH.

Ist das Quadrat über HK um ein Quadrat größer, dessen Seite zu ihm kommensurabel ist, dann ist, da EH die kleinere Strecke und zur rationalen EF der Länge nach kommensurabel ist, EK eine quadriert binomische Strecke zweiter Art.
Das von einer rationalen Strecke und einer quadriert binomischen Strecke zweiter Art eingeschlossene Rechteck ist gleich einem Quadrat, dessen Seite, wie benannt, binomisch primär irrational ist [wie X.56.].
Also ist dann das Rechteck EI gleich dem Quadrat über einer binomisch primär irrationalen Strecke, das AD gleich ist.

Ist das Quadrat über HK um ein Quadrat größer, dessen Seite zu ihm inkommensurabel ist, dann ist, da EH die kleinere Strecke, zu EF kommensurabel und rational ist, EK eine quadriert binomische Strecke fünfter Art.
Das von einer rationalen Strecke und einer quadriert binomischen Strecke fünfter Art eingeschlossene Rechteck ist gleich einem Quadrat, dessen Seite, wie benannt, konjugiert binomisch primär irrational ist [wie X.59.].
Also ist dann das Rechteck EI gleich dem Quadrat über einer konjugiert binomisch primär irrationalen Strecke, das AD gleich ist.

Deshalb ist eine rationale und eine quadriert rationale Fläche zusammen gleich dem Quadrat über einer von vier verschiedenen binomischen Strecken: entweder der binomischen, der binomisch primär irrationalen, der konjugiert binomischen oder der konjugiert binomisch primär irrationalen Strecke. Was zu zeigen war.

Beispiele:

$$6 + 4 \cdot 2^{1/2} = (2 + 2^{1/2})^2,$$
$$3 \cdot 2^{1/2} + 4 = (2^{1/4} + 2^{1/2} \cdot 2^{1/4})^2,$$
$$50 + 10 \cdot 5^{1/2} = ((25 + 10 \cdot 5^{1/2})^{1/2} + (25 - 10 \cdot 5^{1/2})^{1/2})^2,$$
$$4 \cdot 2^{1/2} + 2 = ((2 \cdot 2^{1/2} + 7^{1/2})^{1/2} + (2 \cdot 2^{1/2} - 7^{1/2})^{1/2})^2.$$

X.73. [X.72]

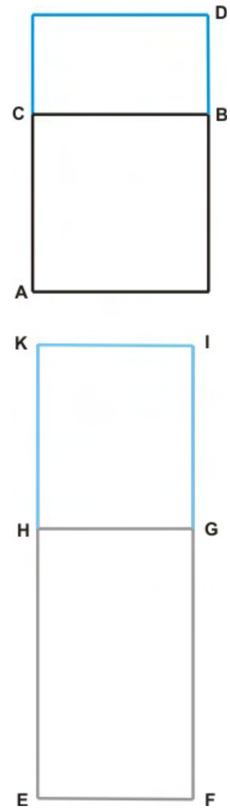
Zwei quadriert rationale Flächen zusammen sind gleich einem Quadrat über einer von zwei verschiedenen binomischen Strecken, der binomisch sekundär irrationalen und der konjugiert binomisch sekundär irrationalen Strecke.

Wenn zwei quadriert rationale Flächen AB, CD zusammengenommen werden, dann, sage ich, ist die Fläche AD, die sie ergeben, gleich einem Quadrat entweder über einer binomisch sekundär irrationalen oder über einer konjugiert binomisch sekundär irrationalen Strecke.

Denn AB ist entweder größer oder kleiner als CD.

Ist nun AB größer als CD und ist an der rationalen Strecke EF ein der Fläche AB gleiches Rechteck EG mit der Seite EH errichtet und daran ein der Fläche CD gleiches Rechteck HI mit der Seite HK, dann sind AB, CD und auch EG, HI quadriert rational.
Da EG, HI an der rationalen Strecke EF errichtet sind, sind auch EH, HK quadriert rational und zu EF der Länge nach inkommensurabel.
Die Flächen AB, CD sind inkommensurabel, AB gleich EG und CD gleich HI, somit sind EG, HI inkommensurabel.

Da sich EG zu HI verhält wie EH zu HK sind EH, HK der Länge nach inkommensurabel, jedoch im Quadrat kommensurabel.
Damit ist EK eine binomische Strecke.



Das Quadrat über EH ist um ein Quadrat, dessen Seite zu EH entweder kommensurabel oder inkommensurabel ist, größer als das Quadrat über HK.

Ist EH um ein Quadrat größer, dessen Seite zu ihm der Länge nach kommensurabel ist und da keine der Strecken EH, HK zur rationalen Strecke EF der Länge nach kommensurabel ist, ist EK eine quadriert binomische Strecke dritter Art.
Das von einer rationalen Strecke und einer quadriert binomische Strecke dritter Art eingeschlossene Rechteck ist gleich einem Quadrat, dessen Seite, wie benannt, binomisch sekundär irrational ist [wie X.57.].
Damit ist das Rechteck EI, das der Fläche AD gleich ist, gleich einem Quadrat, dessen Seite binomisch sekundär irrational ist.

Ist EH um ein Quadrat größer, dessen Seite zu ihm der Länge nach inkommensurabel ist und da keine der Strecken EH, HK zur rationalen Strecke EF der Länge nach kommensurabel ist, ist EK eine quadriert binomische Strecke sechster Art.
Das von einer rationalen Strecke und einer quadriert binomischen Strecke sechster Art eingeschlossene Rechteck ist gleich einem Quadrat, dessen Seite, wie benannt, konjugiert binomisch sekundär irrational ist [wie X.60.].
Damit ist das Rechteck EI, das der Fläche AD gleich ist, gleich einem Quadrat, dessen Seite konjugiert binomisch sekundär irrational ist.

Deshalb sind zwei quadriert rationale Flächen zusammen gleich einem Quadrat über einer von zwei verschiedenen binomischen Strecken, der binomisch sekundär irrationalen oder der konjugiert binomisch sekundär irrationalen Strecke, was zu zeigen war.

Beispiele: $24 \cdot 2^{1/2} + 4 \cdot 22^{1/2} = (22^{1/2} \cdot 2^{1/4} + 2^{1/2} \cdot 2^{1/4})^2$,
$4 \cdot 3^{1/2} + 2 \cdot 6^{1/2} = ((2 \cdot 3^{1/2} + 6^{1/2})^{1/2} + (2 \cdot 3^{1/2} - 6^{1/2})^{1/2})^2$.

Corollar:

Keine der benannten binomischen und irrationalen Strecken kann eine Strecke der anderen Benennungen sein.

Denn das dem Quadrat über einer biquadriert rationalen Strecke gleiche Rechteck rationaler Länge hat eine, zu ihr inkommensurable, quadriert rationale Breite [wie X.23.];

das dem Quadrat über einer binomischen Strecke gleiche Rechteck rationaler Länge hat eine quadriert binomische Breite erster Art [wie X.55.];

das dem Quadrat über einer binomisch primär irrationalen Strecke gleiche Rechteck rationaler Länge hat eine quadriert binomische Breite zweiter Art [wie X.56.];

das dem Quadrat über einer binomisch sekundär irrationalen Strecke gleiche Rechteck rationaler Länge hat eine quadriert binomische Breite dritter Art [wie X.57.];

das dem Quadrat über einer konjugiert binomischen Strecke gleiche Rechteck rationaler Länge hat eine quadriert binomische Breite vierter Art [wie X.58.];

das dem Quadrat über einer konjugiert binomisch primär irrationalen Strecke gleiche Rechteck rationaler Länge hat eine quadriert binomische Breite fünfter Art [wie X.59.];

das dem Quadrat über einer konjugiert binomisch sekundär irrationalen Strecke gleiche Rechteck rationaler Länge hat eine quadriert binomische Breite sechster Art [wie X.60.].

Da es nicht möglich ist, dass eine quadriert rationale Strecke gleich einer quadriert binomischen Strecke einer der sechs Arten ist und da keine quadriert binomische Strecke der sechs Arten gleich einer Strecke einer der anderen Arten ist, deshalb kann keine der benannten binomischen und irrationalen Strecken eine Strecke der anderen Benennungen sein.
