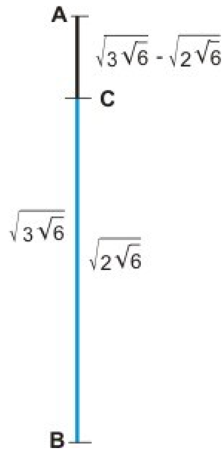
X.74. [X.73]

Wird von einer rationalen oder quadriert rationalen Strecke eine Strecke weggenommen, die zu ihr nur im Quadrat kommensurabel ist, dann ist die restliche Strecke irrational und wird apotomisch genannt.



Wenn von der rationalen oder quadriert rationalen Strecke AB die Strecke BC weggenommen wird, die zu ihr nur im Quadrat kommensurabel ist [wie X.30., X.31.], dann, sage ich, ist die restliche AC eine irrationale und apotomisch genannte Strecke. Denn da AB, BC der Länge nach inkommensurabel sind und sich AB zu BC verhält wie das Quadrat über AB zum Rechteck aus AB mit BC, ist das Quadrat über AB zum Rechteck aus AB mit BC inkommensurabel.

Das Quadrat über AB ist zur Summe der Quadrate über AB und BC kommensurabel und es ist das Rechteck aus AB mit BC zum doppelten Rechteck aus AB mit BC kommensurabel. Da die Summe der Quadrate über AB und BC gleich der Summe aus dem doppelten Rechteck aus AB mit BC und dem Quadrat über CA ist, ist das Quadrat über AC zur Summe aus dem doppelten Rechteck aus AB mit BC und dem Quadrat über CA inkommensurabel.

Die Summe der Quadrate über AB und BC ist rational, somit ist AC irrational und wird apotomische Strecke genannt, was zu zeigen war.

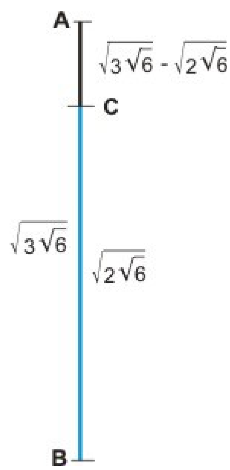
Anmerkung: In X.74, X.75 und X.76 ist $a^2 + b^2 = 2ab + (a - b)^2$, wobei $a = AB$, $b = BC$ damit ist $(a - b)^2 = p - 2q$, wenn $p = a^2 + b^2$ und $2q = 2ab$.

Beispiele: $(2 - 2^{1/2})^2 = 6 - 4 \cdot 2^{1/2}$, $(3^{1/2} - 2^{1/2})^2 = 5 - 2 \cdot 6^{1/2}$.

X.75. [X.74]

Wird von einer biquadriert rationalen Strecke eine Strecke weggenommen, die zu ihr im Quadrat kommensurabel ist und mit ihr ein rationales Rechteck ergibt, dann ist die restliche Strecke irrational und wird apotomisch primär irrational genannt.

Wenn von der biquadriert rationalen Strecke AB die Strecke BC weggenommen wird, die zu AB im Quadrat kommensurabel ist und mit ihr ein rationales Rechteck ergibt [wie X.32.], dann, sage ich ist die restliche AC irrational und eine apotomisch primär irrationale Strecke.



Denn da AB, BC biquadriert rational sind, sind die Quadrate über AB, BC quadriert rational. Das doppelte Rechteck aus AB mit BC ist rational, somit ist die Summe der Quadrate über AB und BC zum doppelten Rechteck aus AB mit BC inkommensurabel.

Da das doppelte Rechteck aus AB mit BC zusammen mit dem Quadrat über AC gleich der Summe der Quadrate über AB und BC ist [wie II.7.] und da die gesamte Strecke AB zu den beiden Teilstrecken inkommensurabel ist, ist das Quadrat über AC zum doppelten Rechteck aus AB mit BC inkommensurabel. Das doppelte Rechteck aus AB mit BC ist rational, damit ist das Quadrat über AC irrational.

Also ist AC irrational und eine apotomisch primär irrationale Strecke, was zu zeigen war.

Beispiel: $(3^{1/2} \cdot 6^{1/4} - 2^{1/2} \cdot 6^{1/4})^2 = 5 \cdot 6^{1/2} - 12.$

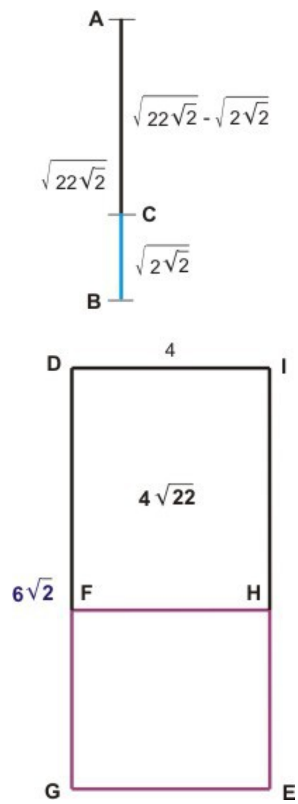
X.76. [X.75]

Wird von einer biquadriert rationalen Strecke eine Strecke weggenommen, die zu ihr im Quadrat kommensurabel ist und mit ihr ein quadriert rationales Rechteck ergibt, dann ist die restliche Strecke irrational und wird apotomisch sekundär irrational genannt.

Wird von der biquadriert rationalen Strecke AB die Strecke CB weggenommen, die zu ihr im Quadrat kommensurabel ist und mit ihr ein quadriert rationales Rechteck ergibt [wie X.33.], dann, sage ich, ist die restliche AC irrational und wird eine apotomisch sekundär irrationale Strecke genannt.

Denn wird auf der rationalen Strecke DI das der Summe der Quadrate über AB und BC gleiche Rechteck DE mit der Breite DG errichtet und wird davon das dem doppelten Rechteck aus AB mit BC gleiche Rechteck DH mit der Breite DF abgeteilt, dann ist das restliche Rechteck FE gleich dem Quadrat über AC.

Die Quadrate über AB und BC sind quadriert rational und kommensurabel, somit ist DE quadriert rational und an der rationalen Strecke DI mit der Breite DG errichtet. Damit ist DG quadriert rational und zu DI der Länge nach inkommensurabel.
Das Rechteck aus AB mit BC ist quadriert rational, somit auch das doppelte Rechteck, das gleich DH ist.
Also ist DH quadriert rational und an der rationalen Strecke DI mit der Breite DF errichtet. Damit ist DF quadriert rational und zu DI der Länge nach inkommensurabel.



Da AB, BC im Quadrat kommensurabel sind, der Länge nach aber inkommensurabel, ist das Quadrat über AB zum Rechteck aus AB mit BC inkommensurabel.
Das Quadrat über AB ist zur Summe der Quadrate über AB und BC kommensurabel und das Rechteck aus AB mit BC ist zum doppelten Rechteck kommensurabel, somit ist das doppelte Rechteck aus AB mit BC zur Summe der Quadrate über AB und BC inkommensurabel.
Das Rechteck DE ist gleich der Summe der Quadrate über AB und BC, das Rechteck DH ist gleich dem doppelten Rechteck aus AB mit BC, also sind DE, DH inkommensurabel.

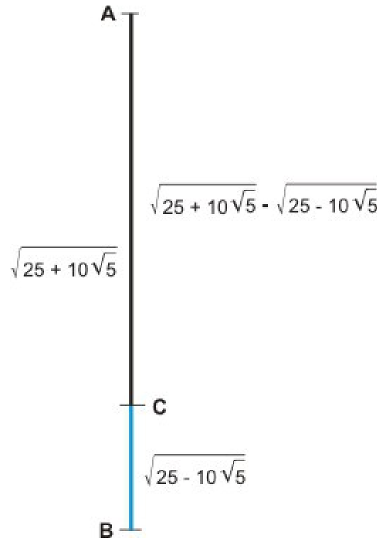
Es verhält sich DE zu DH wie GD zu DF, damit sind auch GD, DF inkommensurabel, beide sind jedoch quadriert rational und im Quadrat kommensurabel.
Da FG eine apotomische Strecke ist, ergibt FG mit der rationalen Strecke DI das irrationale Rechteck FE, das dem Quadrat über AC gleich ist.

Somit ist AC irrational und wird eine apotomisch sekundär irrationale Strecke genannt, was zu zeigen war.

Beispiel: $(22^{½} \cdot 2^{¼} - 2^{½} \cdot 2^{¼})^2 = 24 \cdot 2^{½} - 4 \cdot 22^{½}$.

X.77. [X.76]

Wird von einer Strecke eine Strecke weggenommen, die zu ihr im Quadrat inkommensurabel ist, wobei die Summe der Quadrate über den beiden Strecken rational ist und die beiden Strecken ein quadriert rationales Rechteck ergeben, dann ist die restliche Strecke irrational und wird konjugiert apotomisch genannt.



Wenn von der Strecke AB die zu ihr im Quadrat inkommensurable Strecke BC weggenommen wird, wobei die Summe der Quadrate über AB und BC rational und das Rechteck aus AB mit BC quadriert rational ist [wie X.34.], dann, sage ich, ist die restliche AC irrational und wird konjugiert apotomisch genannt.

Denn da die Summe der Quadrate über AB und BC rational und das doppelte Rechteck aus AB mit BC quadriert rational ist, sind sie zueinander inkommensurabel.
Damit ist die Summe der Quadrate über AB und BC zum Quadrat über AC inkommensurabel.
Da die Summe der Quadrate über AB und BC rational ist, ist das Quadrat über AC irrational.

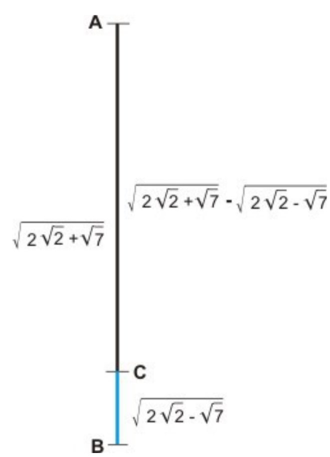
Deshalb ist AC irrational und wird konjugiert apotomisch genannt, was zu zeigen war.

Anmerkung: In X.77, X.78 und X.79 ist
$((g+h)^{½} - (g-h)^{½})^2 = d - e$, wenn $d = 2g$ und $e = 2 \cdot (g^2 - h^2)^{½}$
wobei $(g+h)^{½} = AB$, $(g-h)^{½} = BC$ konjugierte Terme sind.

Beispiel: $((25 + 10 \cdot 5^{½})^{½} - (25 - 10 \cdot 5^{½})^{½})^2 = 50 - 10 \cdot 5^{½}$.

X.78. [X.77]

Wird von einer Strecke eine Strecke weggenommen, die zu ihr im Quadrat inkommensurabel ist, wobei die Summe der Quadrate über den beiden Strecken quadriert rational ist und die beiden Strecken ein rationales Rechteck ergeben, dann ist die restliche Strecke irrational und wird konjugiert apotomisch primär irrational genannt.



Wenn von der Strecke AB die zu ihr im Quadrat inkommensurable Strecke BC weggenommen wird, wobei die Summe der Quadrate über AB und BC quadriert rational und das Rechteck aus AB mit BC rational ist [wie X.35.], dann, sage ich, ist die restliche AC irrational und wird konjugiert apotomisch primär irrational genannt.

Denn da die Summe der Quadrate über AB und BC quadriert rational und das doppelte Rechteck aus AB mit BC rational ist, sind sie inkommensurabel.

Da das doppelte Rechteck aus AB mit BC zusammen mit dem Quadrat über AC gleich der Summe der Quadrate über AB und BC ist [wie II.7.], ist das Quadrat über AC zum doppelten Rechteck aus AB mit BC inkommensurabel [wie X.17.].

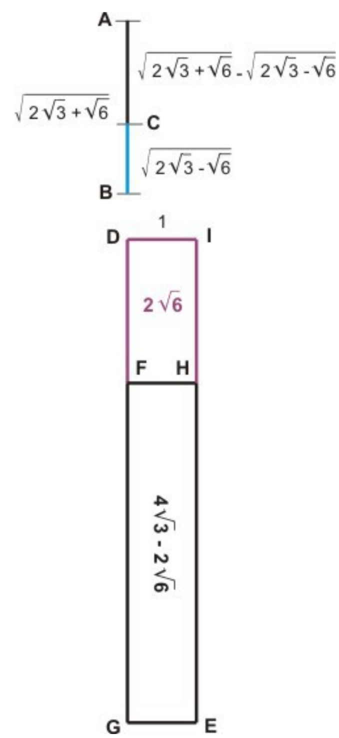
Das doppelte Rechteck aus AB mit BC ist rational, also ist das Quadrat über AC irrational und wird konjugiert apotomisch primär irrational genannt, was zu zeigen war.

Beispiel: $((2 \cdot 2^{½} + 7^{½})^{½} - (2 \cdot 2^{½} - 7^{½})^{½})^2 = 4 \cdot 2^{½} - 2.$

X.79. [X.78]

Wird von einer Strecke eine Strecke weggenommen, die zu ihr im Quadrat inkommensurabel ist, wobei die Summe der Quadrate über den beiden Strecken quadriert rational ist und die beiden Strecken ein quadriert rationales Rechteck ergeben, das zur Summe der Quadrate inkommensurabel ist, dann ist die restliche Strecke irrational und wird konjugiert apotomisch sekundär irrational genannt.

Wenn von der Strecke AB die zu ihr im Quadrat inkommensurable Strecke BC weggenommen wird, wobei die Summe der Quadrate über AB und BC quadriert rational und das Rechteck aus AB mit BC quadriert rational und zur Summe der Quadrate inkommensurabel ist [wie X.36.], dann, sage ich, ist die restliche AC irrational und wird konjugiert apotomisch sekundär irrational genannt.



Denn wird an der rationalen Strecke DI das der Summe der Quadrate über AB und BC gleiche Rechteck DE mit der Breite DG errichtet und wird davon das dem doppelten Rechteck aus AB mit BC gleiche Rechteck DH abgeteilt, dann ist das restliche Rechteck FE gleich dem Quadrat über AC.

Die Summe der Quadrate über AB und BC ist quadriert rational und gleich DE, somit ist DE quadriert rational.
DE ist an der rationalen Seite DI mit der Breite DG errichtet, womit DG quadriert rational und zu DI der Länge nach inkommensurabel ist.

Da das doppelte Rechteck aus AB mit BC quadriert rational und gleich DH ist, ist DH quadriert rational.
DH ist an der rationalen Strecke DI mit der Breite DF errichtet, womit DF quadriert rational und zu DI der Länge nach inkommensurabel ist.

Die Summe der Quadrate über AB und BC ist zum doppelten Rechteck aus AB mit BC inkommensurabel, somit sind DE, DH inkommensurabel.
Da sich DE zu DH verhält wie DG zu DF, sind DG, DF inkommensurabel, wobei beide quadriert rational sind. Damit sind DG, DF im Quadrat kommensurabel.

Die Strecke FG ist somit apotomisch und schließt mit der rationalen FH das apotomische und irrationale Rechteck FE ein, das gleich dem Quadrat über AC ist.

Deshalb ist AC irrational und wird konjugiert apotomisch sekundär irrational genannt, was zu zeigen war.

Für alle diese apotomischen Größen ist $(a - b)^2 = p - 2q$, wenn $p = a^2 + b^2$ und $2q = 2ab$.
Wegen Lemma X.61 ist stets $p > 2q$.
a und b sind wie in X.42 angemerkt aus $(p - 2q)^{½}$ zu bestimmen.

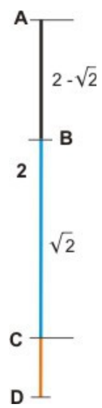
Beispiel: $((2 \cdot 3^{½} + 6^{½})^{½} - (2 \cdot 3^{½} - 6^{½})^{½})^2 = 4 \cdot 3^{½} - 2 \cdot 6^{½}.$

X.80. [X.79]

Zu jeder apotomischen Strecke gibt es nur eine ergänzende Strecke, die zur ganzen Strecke im Quadrat kommensurabel ist.

Wenn die apotomische Strecke AB durch BC so ergänzt wird, dass AC, CB im Quadrat kommensurabel sind [wie X.74.], dann, sage ich, gibt es keine andere ergänzende Strecke, die zu AB im Quadrat kommensurabel ist.

Denn wenn doch, sei BD diese Strecke. Es sind dann AD, DB im Quadrat kommensurabel. Die Summe der Quadrate über AD, DB ist dann um das Quadrat über AB größer als das doppelte Rechteck aus AD mit DB. Ebenso ist die Summe der Quadrate über AC, CB um das Quadrat über AB größer als das doppelte Rechteck aus AC mit CB.
Damit ist dann die Summe der Quadrate über AD, DB um das Gleiche größer als die Summe der Quadrate über AC, CB wie das doppelte Rechteck aus AD mit DB größer ist als das doppelte Rechteck aus AC mit CB.



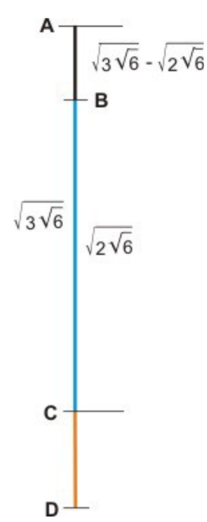
Da somit die Summe der Quadrate über AD, DB um eine rationale Größe größer ist als die Summe der Quadrate über AC, CB, ist dann auch das doppelte Rechteck aus AD mit DB um eine rationale Größe größer als das doppelte Rechteck AC, CB, was nicht möglich ist, da die Rechtecke quadriert rational sind und das eine Rechteck nicht um eine rationale Größe größer sein kann als das andere [wie X.27.].
Also kann AB durch keine andere Strecke, die zur ganzen Strecke im Quadrat kommensurabel ist, ergänzt werden.

Deshalb gibt es zu jeder apotomischen Strecke nur eine ergänzende Strecke, die zur ganzen Strecke im Quadrat kommensurabel ist, was zu zeigen war.

X.81. [X.80]

Zu jeder apotomisch primär irrationalen Strecke gibt es nur eine ergänzende Strecke, die zur ganzen Strecke im Quadrat kommensurabel ist und mit ihr ein rationales Rechteck ergibt.

Wenn AB eine apotomisch primär irrationale Strecke, die ergänzende Strecke BC zu AC im Quadrat kommensurabel und das Rechteck aus AC mit CB rational ist [wie X.75.], dann, sage ich, gibt es keine andere Strecke, die zu AC im Quadrat kommensurabel ist und mit ihr ein rationales Rechteck ergibt.



Denn wenn doch, dann sei DB diese Strecke.
AD, DB sind dann biquadriert rational und im Quadrat kommensurabel; das Rechteck aus AD mit DB ist dann rational.

Die Summe der Quadrate über AD, DB ist dann um das Quadrat über AB größer als das doppelte Rechteck aus AD mit DB. Ebenso ist die Summe der Quadrate über AC, CB um das Quadrat über AB größer als das doppelte Rechteck aus AC mit CB.
Damit ist dann die Summe der Quadrate über AD, DB um das Gleiche größer als die Summe der Quadrate über AC, CB wie das doppelte Rechteck aus AD mit DB größer ist als das doppelte Rechteck aus AC mit CB.

Da somit das doppelte Rechteck aus AD mit DB um eine rationale Größe größer als das doppelte Rechteck AC, CB, ist auch die Summe der Quadrate über AD, DB um eine rationale Größe größer als die Summe der Quadrate über AC, CB, was nicht möglich ist, da beide quadriert rational sind und eine quadriert rationale Größe nicht um eine rationale größer sein kann als eine andere quadriert rationale Größe [wie X.27.].

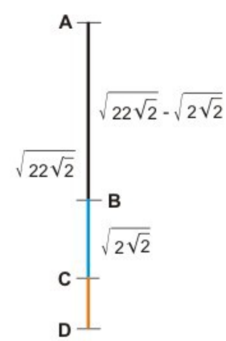
Deshalb gibt es zu jeder apotomisch primär irrationalen Strecke nur eine ergänzende Strecke, die zur ganzen Strecke im Quadrat kommensurabel ist und mit ihr ein rationales Rechteck ergibt, was zu zeigen war.

X.82. [X.81]

Zu jeder apotomisch sekundär irrationalen Strecke gibt es nur eine ergänzende Strecke, die zur ganzen Strecke im Quadrat kommensurabel ist und mit ihr ein quadriert rationales Rechteck ergibt.

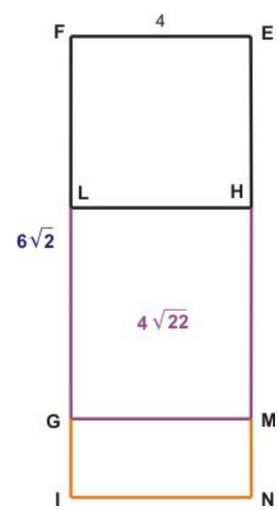
Wenn AB eine apotomisch sekundär irrationale Strecke, die ergänzende Strecke BC zu AC im Quadrat kommensurabel und das Rechteck aus AC mit CB quadriert rational ist [wie X.76.], dann, sage ich, gibt es keine andere Strecke, die zu AC im Quadrat kommensurabel ist und mit ihr ein quadriert rationales Rechteck ergibt.

Denn wenn doch, dann sei DB diese Strecke.
AD, DB sind dann biquadriert rational und im Quadrat kommensurabel; das Rechteck aus AD mit DB ist dann quadriert rational.



Wird auf der rationalen Strecke EF das der Summe der Quadrate über AC und CB gleiche Rechteck EG mit der Breite EM errichtet und wird davon das dem doppelten Rechteck aus AC mit CB gleiche Rechteck HG mit der Breite HM abgeteilt, dann ist das restliche Rechteck EL gleich dem Quadrat über AB.

Wird auf der rationalen Strecke EF auch das der Summe der Quadrate über AD und DB gleiche Rechteck EI mit der Breite EN errichtet, dann ist, da EL gleich dem Quadrat über AB ist, das verbleibende Rechteck HI gleich dem doppelten Rechteck aus AD mit DB.



Da AC, CB biquadriert rational sind, ist die Summe der Quadrate über AC und CB quadriert rational, sie gleich EG, womit EG quadriert rational ist. EG ist auf der rationalen Strecke EF errichtet, also ist EM quadriert rational und zu EF der Länge nach inkommensurabel.

Da das Rechteck aus AC mit CB quadriert rational ist, ist das doppelte Rechteck aus AC mit CB quadriert rational, es ist gleich HG, womit HG quadriert rational ist. HG ist auf der rationalen Strecke EF mit der Breite HM errichtet, also ist HM quadriert rational und zu EF der Länge nach inkommensurabel.

AC, CB sind im Quadrat, aber nicht der Länge nach, kommensurabel und AC verhält sich zu CB wie das Quadrat über AC zum Rechteck aus AC mit CB, somit ist das Quadrat über AC zum Rechteck aus AC mit CB inkommensurabel.

Das Quadrat über AC ist zur Summe der Quadrate über AC und CB kommensurabel, auch ist das Rechteck aus AC mit CB zum doppelten Rechteck aus AC mit CB kommensurabel, damit ist die Summe der Quadrate über AB und BC zum doppelten Rechteck aus AC mit CB inkommensurabel.
EG ist gleich der Summe der Quadrate über AB und CB, GH ist gleich dem doppelten Rechteck aus AC mit CB, somit ist EG zu GH inkommensurabel.
Es verhält sich EG zu HG wie EM zu HM, also sind EM, HM der Länge nach inkommensurabel, jedoch im Quadrat kommensurabel.

Damit ist EH eine apotomische Strecke, die durch HM so ergänzt wird, dass diese zu EM im Quadrat kommensurabel ist [wie X.74.].

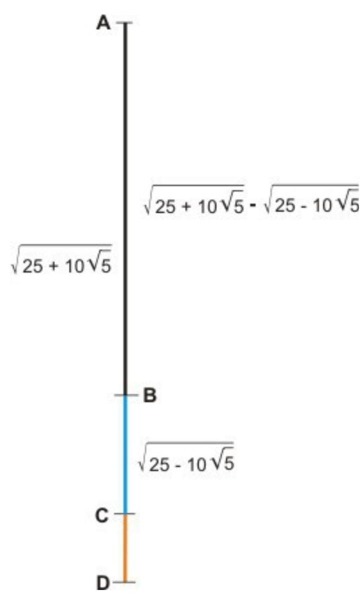
Ebenso ist zu zeigen, dass dann HN eine Ergänzung ist, die zu EN im Quadrat kommensurabel, aber was nicht möglich ist [wie X.80.].

Deshalb gibt es zu jeder apotomisch sekundär irrationalen Strecke nur eine ergänzende Strecke, die zur ganzen Strecke im Quadrat kommensurabel ist und mit ihr ein quadriert rationales Rechteck ergibt, was zu zeigen war.

X.83. [X.82]

Zu jeder konjugiert apotomischen Strecke gibt es nur eine ergänzende Strecke, die zur ganzen Strecke im Quadrat inkommensurabel ist, wobei die Summe ihrer Quadrate rational und das sich mit ihr ergebende Rechteck quadriert rational ist.

Wenn AB eine konjugiert apotomische Strecke ist, die mit BC so ergänzt wird, dass AC, CB im Quadrat inkommensurabel sind, die Summe der Quadrate über AC und CB rational und das Rechteck aus AC mit BC quadriert rational ist [wie X.77.], dann, sage ich, gibt es keine andere derartige Strecke.



Denn wenn doch, sei BD diese Strecke.
AD, DB sind dann im Quadrat inkommensurabel, die Summe der Quadrate über ihnen ist dabei rational und das Rechteck, das sie ergeben, quadriert rational.

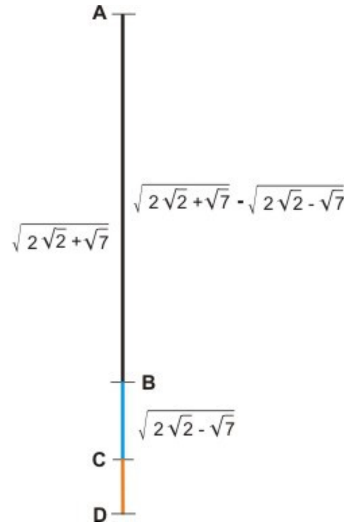
Die Summe der Quadrate über AD, DB ist dann um so viel größer als die Summe der Quadrate über AC, CB wie das doppelte Rechteck aus AD mit DB größer ist als das doppelte Rechteck aus AC mit CB.
Da die Summe der Quadrate über AD und DB um eine rationale Größe größer ist als die Summe der Quadrate über AC und CB, denn beide sind rational, ist dann auch das doppelte Rechteck aus AD mit DB um eine rationale Größe größer als das doppelte Rechteck aus AC mit CB, was nicht möglich ist, denn diese sind quadriert rational [wie X.27.].

Deshalb gibt es zu jeder konjugiert apotomischen Strecke nur eine ergänzende Strecke, die zur ganzen Strecke im Quadrat inkommensurabel ist, wobei die Summe ihrer Quadrate rational und das sich mit ihr ergebende Rechteck quadriert rational ist, was zu zeigen war.

X.84.

Zu jeder konjugiert apotomisch primär irrationalen Strecke gibt es nur eine ergänzende Strecke, die zur ganzen Strecke im Quadrat inkommensurabel ist, wobei die Summe ihrer Quadrate quadriert rational und das sich mit ihr ergebende Rechteck rational ist.

Wenn AB eine konjugiert apotomisch primär irrationale Strecke ist, die mit BC so ergänzt wird, dass AC, CB im Quadrat inkommensurabel sind, die Summe der Quadrate über AC und CB quadriert rational und das Rechteck aus AC mit BC rational ist [wie X.78.], dann, sage ich, gibt es keine andere derartige Strecke.



Denn wenn doch, sei BD diese Strecke.
AD, DB sind dann im Quadrat inkommensurabel, die Summe der Quadrate über AD und DB ist dabei quadriert rational und das Rechteck, das sie ergeben, rational.

Die Summe der Quadrate über AD, DB ist dann um so viel größer als die Summe der Quadrate über AC, CB wie das doppelte Rechteck aus AD mit DB größer ist als das doppelte Rechteck aus AC mit CB.

Da dann das doppelte Rechteck aus AD mit DB um eine quadriert rationale Größe größer ist als das doppelte Rechteck aus AC mit CB, denn beide sind rational, ist dann auch die Summe der Quadrate über AD und DB um eine rationale Größe größer als die Summe der Quadrate über AC und CB, was nicht möglich ist denn diese sind quadriert rational [wie X.27.].

Deshalb gibt es zu AB keine andere ergänzende Strecke, die zur ganzen Strecke im Quadrat inkommensurabel ist, wobei die Summe ihrer Quadrate quadriert rational und das sich mit ihr ergebende Rechteck rational ist, was zu zeigen war.

X.85. [X.84]

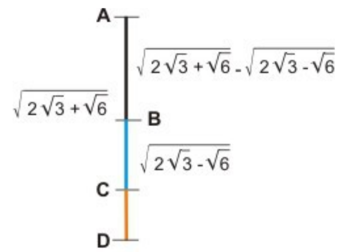
Zu jeder konjugiert apotomisch sekundär irrationalen Strecke gibt es nur eine ergänzende Strecke, die zur ganzen Strecke im Quadrat inkommensurabel ist, wobei die Summe der Quadrate über ihnen quadriert rational ist und sie mit ihr ein quadriert rationales Rechteck ergibt, das zur Summe der Quadrate inkommensurabel ist.

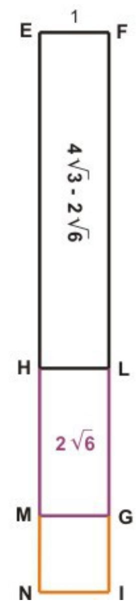
Wenn AB eine konjugiert apotomisch sekundär irrationale Strecke ist, die mit BC so ergänzt wird, dass AC, CB im Quadrat inkommensurabel sind, wobei die Summe der Quadrate über AC und CB quadriert rational und das Rechteck aus AC mit BC quadriert rational und zur Summe der Quadrate inkommensurabel ist [wie X.79.], dann, sage ich, gibt es keine andere derartige Strecke. Denn wenn doch, sei BD diese Strecke.

AD, DB sind dann im Quadrat inkommensurabel, die Summe der Quadrate über AD und DB ist dabei quadriert rational und das doppelte Rechteck aus AD mit DB quadriert rational und zur Summe der Quadrate inkommensurabel.

Denn wird auf der rationalen Strecke EF das der Summe der Quadrate über AC und CB gleiche Rechteck EG mit der Breite EM errichtet und wird davon das dem doppelten Rechteck aus AB mit CB gleiche Rechteck HG mit der Breite HM abgeteilt, dann ist das restliche Rechteck EL gleich dem Quadrat über AB.

Wird auf der rationalen Strecke EF auch das der Summe der Quadrate über AD und DB gleiche Rechteck EI mit der Breite EN errichtet, dann ist, da EL gleich dem Quadrat über AB ist, das verbleibende Rechteck HI gleich dem doppelten Rechteck aus AD mit DB.





Da die Summe der Quadrate über AC und CB quadriert rational und gleich EG ist, ist EG quadriert rational.
EG ist auf der rationalen Strecke EF mit der Breite EM errichtet, somit ist EM quadriert rational und zu EF der Länge nach inkommensurabel.

Das Rechteck aus AC mit CB ist quadriert rational, damit ist das doppelte Rechteck aus AC mit CB quadriert rational und gleich HG, womit HG quadriert rational ist.
HG ist auf der rationalen Strecke EF mit der Breite HM errichtet, also ist HM quadriert rational und zu EF der Länge nach inkommensurabel.

Die Summe de Quadrate über AC und CB ist inkommensurabel zum doppelten Rechteck aus AC mit CB, womit auch EG, GH inkommensurabel sind.
Damit sind auch EM, MH der Länge nach inkommensurabel.

Da EM, MH quadriert rational und im Quadrat kommensurabel sind, ist EH eine apotomische Strecke, die durch HM so ergänzt wird, dass HM, EM im Quadrat kommensurabel sind.

Auf gleiche Weise ist zu zeigen, dass EH eine apotomische Strecke ist, die auch durch HN so ergänzt wird, dass HN, EN im Quadrat kommensurabel sind. Damit wird dann eine apotomische Strecke durch verschiedene Strecken so ergänzt, dass sie zur ganzen Strecke im Quadrat kommensurabel sind, was nicht möglich ist [wie X.80.].

Also gibt es keine andere Strecke, die AB wie verlangt ergänzt.

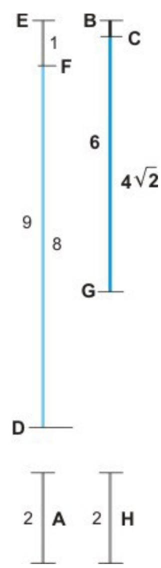
Deshalb gibt es zu jeder konjugiert apotomisch sekundär irrationalen Strecke nur eine ergänzende Strecke, die zur ganzen Strecke im Quadrat inkommensurabel ist, wobei die Summe der Quadrate über ihnen quadriert rational ist und sie mit ihr ein quadriert rationales Rechteck ergibt, das zur Summe der Quadrate inkommensurabel ist, was zu zeigen war.

Unterteilung.

1. Wird eine apotomische Strecke durch eine Strecke so ergänzt, dass das Quadrat über der ganzen Strecke um ein Quadrat, dessen Seite zur ganzen Strecke der Länge nach kommensurabel ist, größer ist als das Quadrat über der ergänzenden Strecke und ist die ganze Strecke rational, dann ist dies eine quadriert apotomische Strecke erster Art;
2. ist die ergänzende Strecke rational, ist dies eine quadriert apotomische Strecke zweiter Art;
3. ist weder die ganze, noch die ergänzende Strecke rational, dann ist dies eine quadriert apotomische Strecke dritter Art.
4. Wird dagegen eine apotomische Strecke durch eine Strecke so ergänzt, dass das Quadrat über der ganzen Strecke um ein Quadrat, dessen Seite zur ganzen Strecke der Länge nach inkommensurabel ist, größer ist als das Quadrat über der ergänzenden Strecke und ist die ganze Strecke rational, ist dies eine quadriert apotomische Strecke vierter Art;
5. ist die ergänzende Strecke rational, dann eine quadriert apotomische Strecke fünfter Art;
6. ist weder die ganze, noch die ergänzende Strecke rational, ist dies eine quadriert apotomische Strecke sechster Art.

X.86. [X.85]
Eine quadriert apotomische Strecke erster Art finden.

Es sei eine Strecke rationaler Länge A und eine zu ihr der Länge nach kommensurable Strecke BG gegeben, die somit rational ist. Sind mit DE, EF zwei Quadratzahlen gegeben, deren Differenz FD keine Quadratzahl ist, dann verhält sich ED zu DF nicht wie eine Quadratzahl zu einer anderen. Es verhalte sich dann ED zu DF wie das Quadrat über BG zum Quadrat über GC.
Damit sind die Quadrate über BG, GC kommensurabel [wie X.6.].



Da das Quadrat über BG rational ist, ist das Quadrat über GC rational und damit GC quadriert rational. Es verhält sich ED zu DF nicht wie eine Quadratzahl zu einer anderen, somit verhält sich das Quadrat über BG zum Quadrat über GC nicht wie eine Quadratzahl zu einer anderen. BG, GC sind der Länge nach inkommensurabel, jedoch im Quadrat kommensurabel.

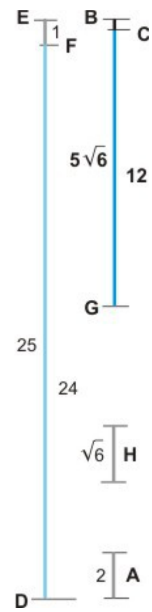
Damit ist BC eine apotomische Strecke und, sage ich, eine quadriert apotomische Strecke erster Art.
Denn wenn das Quadrat über BG weniger dem Quadrat über GC gleich dem Quadrat über H ist, dann, da sich ED zu FD verhält wie das Quadrat über BG zum Quadrat über GC, verhält sich DE zu EF wie das Quadrat über GB zum Quadrat über H [wie V.19.]. DE, EF sind Quadratzahlen, somit verhält sich das Quadrat über GB zum Quadrat über H wie eine Quadratzahl zu einer anderen. Also sind BG, H der Länge nach kommensurabel [wie X.9.].
Das Quadrat über BG ist somit um ein Quadrat, dessen Seite der Länge nach zu BG kommensurabel ist, größer als das Quadrat über GC. Die ganze Strecke BG ist rational. Deshalb ist BC eine quadriert apotomische Strecke erster Art.

Damit ist eine quadriert apotomische Strecke erster Art BC gefunden, was auszuführen war.

X.87. [X.86]

Eine quadriert apotomische Strecke zweiter Art finden.

Es sei eine Strecke rationaler Länge A und eine zu ihr der Länge nach kommensurable Strecke GC gegeben, die somit rational ist. Mit DE, EF seien zwei Quadratzahlen gegeben, deren Differenz FD keine Quadratzahl ist. Es verhalte sich dann FD zu DE wie das Quadrat über CG zum Quadrat über GB. Damit sind die Quadrate über CG, GB kommensurabel [wie X.6.].



Da das Quadrat über CG rational ist, ist das Quadrat über GB rational und damit GB quadriert rational.
Die Quadrate über GC, GB verhalten sich zueinander nicht wie eine Quadratzahl zu einer anderen, somit sind CG, GB der Länge nach inkommensurabel [wie X.9.], jedoch im Quadrat kommensurabel.

Also ist BC eine apotomische Strecke und, sage ich, eine quadriert apotomische Strecke der zweiten Art.

Denn ist das Quadrat über BC weniger dem Quadrat über GC gleich dem Quadrat über H, dann, da sich das Quadrat über BG zum Quadrat über GC verhält wie ED zu DF, verhält sich das Quadrat über BG zum Quadrat über H wie DE zu EF.
Da DE, EF Quadratzahlen sind, verhält sich das Quadrat über BG zum Quadrat über H wie eine Quadratzahl zu einer anderen. Damit sind BG, H der Länge nach kommensurabel.
Das das Quadrat über BG gleich den Quadraten über GC und H zusammen ist, ist das Quadrat über BG um ein Quadrat, dessen Seite zu BG der Länge nach kommensurabel ist, größer als das Quadrat über GC. Die ergänzende Strecke CG ist kommensurabel zur rationalen Strecke A. Also ist BC eine apotomische Strecke zweiter Art.

Damit ist eine quadriert apotomische Strecke zweiter Art BC gefunden, was auszuführen war.

X.88. [X.87]

Eine quadriert apotomische Strecke dritter Art finden.

Es seien gegeben die rationale Strecke A und drei Zahlen E, BC, CD, wovon E zu BC, CD nicht in Verhältnissen steht wie Quadratzahlen zu anderen, jedoch CB, BD sich verhalten wie Quadratzahlen zueinander. Es verhalte sich E zu BC wie das Quadrat über A zum Quadrat über FG und es verhalte sich BC zu CD wie das Quadrat über FG zum Quadrat über GH.

Da sich E zu BC verhält wie das Quadrat über A zum Quadrat über FG, ist das Quadrat über A kommensurabel zum Quadrat über FG [wie X.6.]. Da das Quadrat über A rational ist, ist auch das Quadrat über FG rational, womit FG quadriert rational ist.

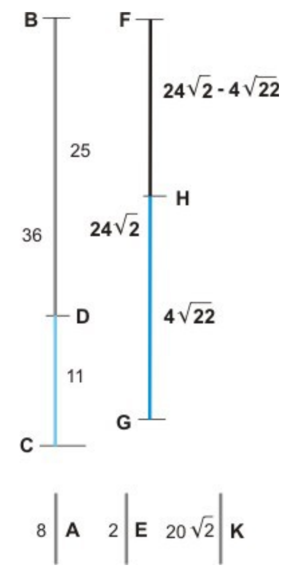
Es verhält sich E zu BC nicht wie eine Quadratzahl zu einer anderen, damit verhält sich auch das Quadrat über A zum Quadrat über FG nicht wie eine Quadratzahl zu einer anderen. Damit sind A, FG der Länge nach inkommensurabel.

Da sich BC zu CD verhält wie das Quadrat über FG zum Quadrat über GH, ist das Quadrat über FG kommensurabel zum Quadrat über GH. Das Quadrat über FG ist rational, womit auch das Quadrat über GH rational und GH quadriert rational ist.

Da BC zu CD sich nicht verhält wie eine Quadratzahl zu einer anderen, verhält sich auch das Quadrat über FG zum Quadrat über GH nicht wie eine Quadratzahl zu einer anderen.
Damit sind FG, GH der Länge nach inkommensurabel [wie X.9.], jedoch im Quadrat kommensurabel; beide sind nur quadriert rational.

Also ist FH apotomisch und, sage ich, eine quadriert apotomische Strecke dritter Art.

Denn da sich E zu BC verhält wie das Quadrat über A zum Quadrat über FG und da BC zu CD sich verhält wie das Quadrat über FG zum Quadrat über HG, verhält sich E zu CD wie das Quadrat über A zum Quadrat über HG.
Da E zu CD nicht in einem Verhältnis steht wie eine Quadratzahl zu einer anderen, steht auch das Quadrat über A zum Quadrat über HG nicht in einem Verhältnis wie eine Quadratzahl zu einer anderen. Somit sind A, GH der Länge nach inkommensurabel.



Damit ist keine der Strecken FG, GH zu A der Länge nach kommensurabel.

Ist das Quadrat über FG weniger dem Quadrat über GH gleich dem Quadrat über K, dann, da sich BC zu CD verhält wie das Quadrat über FG zum Quadrat über GH, verhält sich BC zu BD wie das Quadrat über FG zum Quadrat über K.

Da sich BC zu BD verhält wie eine Quadratzahl zu einer anderen, steht auch das Quadrat über FG zum Quadrat über K in einem Verhältnis wie eine Quadratzahl zu einer anderen. Damit sind FG, K der Länge nach kommensurabel.

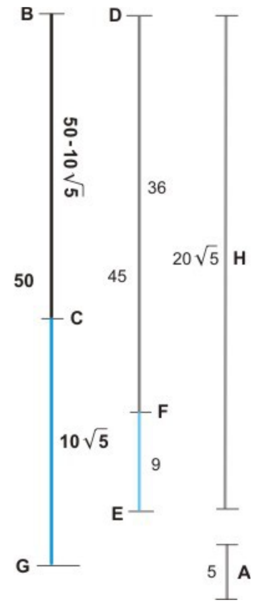
Das Quadrat über FG ist also um ein Quadrat, dessen Seite der Länge nach kommensurabel zu FG ist, größer als das Quadrat über GH. Keine der Strecken FG, GH ist rational.
Also ist FH eine quadriert apotomische Strecke dritter Art.

Damit ist eine quadriert apotomische Strecke dritter Art FH gefunden, was auszuführen war.

X.89. [X.88]
Eine quadriert apotomische Strecke vierter Art finden.

Es sei eine Strecke rationaler Länge A und eine zu ihr der Länge nach kommensurable Strecke BG gegeben, die somit rational ist. Mit DF, FE seien zwei Zahlen so gegeben, dass die daraus zusammengesetzte Strecke DE zu keiner von ihnen in einem Verhältnis steht wie eine Quadratzahl zu einer anderen.
Es verhalte sich DE zu EF wie das Quadrat über BG zum Quadrat über GC.

Die Quadrate über BG, GC sind somit kommensurabel. Da das Quadrat über BG rational ist, ist damit auch das Quadrat über GC und ist auch GC rational.
Da DE zu EF nicht in einem Verhältnis steht wie eine Quadratzahl zu einer anderen, steht auch das Quadrat über BG zum Quadrat über GC nicht in einem Verhältnis wie eine Quadratzahl zu einer anderen.
Somit sind BG, GC der Länge nach inkommensurabel, jedoch im Quadrat kommensurabel.
Also ist BC eine apotomische Strecke.



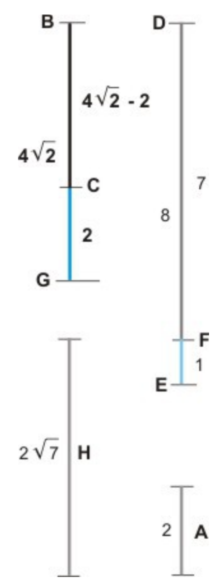
Ist das Quadrat über BG weniger dem Quadrat über GC gleich dem Quadrat über H, dann, da sich DE zu EF verhält wie das Quadrat über BG zum Quadrat über GC, verhält sich ED zu DF wie das Quadrat über BG zum Quadrat über H.
Da sich ED zu DF nicht verhält wie eine Quadratzahl zu einer anderen, verhält sich auch das Quadrat über BG zum Quadrat über H nicht wie eine Quadratzahl zu einer anderen.
Damit sind BG, H der Länge nach inkommensurabel.
Das Quadrat über BG ist somit um ein Quadrat, dessen Seite zu BG der Länge nach inkommensurabel ist, größer als das Quadrat über GC.
BG irrational
Also ist BC eine quadriert apotomische Strecke vierter Art.

Damit ist eine quadriert apotomische Strecke vierter Art BC gefunden, was auszuführen war.

X.90. [X.89]
Eine quadriert apotomische Strecke fünfter Art finden.

Es sei eine Strecke rationaler Länge A und eine zu ihr der Länge nach kommensurable Strecke CG gegeben, die somit rational ist. Mit DF, FE seien zwei Zahlen so gegeben, dass die daraus zusammengesetzte Strecke DE zu keiner von ihnen in einem Verhältnis steht wie eine Quadratzahl zu einer anderen.
Es verhalte sich FE zu ED wie das Quadrat über CG zum Quadrat über GB.

Das Quadrat über GB ist damit rational und GB deshalb quadriert rational.
Da sich DE zu EF verhält wie das Quadrat über BG zum Quadrat über GC und da sich DE zu EF nicht verhält wie eine Quadratzahl zu einer anderen, verhält sich auch das Quadrat über BG zum Quadrat über GC nicht wie eine Quadratzahl zu einer anderen.
Damit sind BG, GC der Länge nach inkommensurabel, jedoch im Quadrat kommensurabel.



Also ist BC eine apotomische Strecke und, sage ich, eine quadriert apotomische Strecke der fünften Art.
Denn ist das Quadrat über BG weniger dem Quadrat über GC gleich dem Quadrat über H, dann, da sich das Quadrat über BG zum Quadrat über GC verhält wie DE zu EF, verhält sich ED zu DF wie das Quadrat über BG zum Quadrat über H.
Da ED sich zu DF nicht verhält wie eine Quadratzahl zu einer anderen, verhält sich das Quadrat über BG zum Quadrat über H nicht wie eine Quadratzahl zu einer anderen.
Damit sind BG, H der Länge nach inkommensurabel.
Also ist das Quadrat über GB um ein Quadrat, dessen Seite der Länge nach zu BG inkommensurabel ist, größer als das Quadrat über GC.
Die ergänzende Strecke GC ist rational und BC deshalb eine quadriert apotomische Strecke fünfter Art.

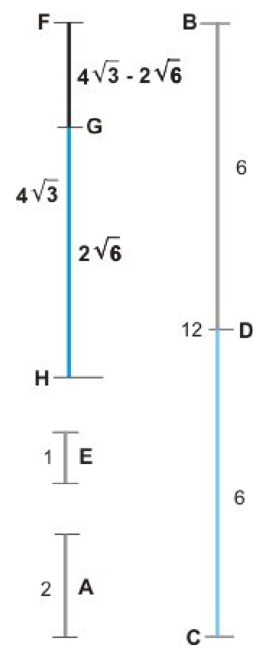
Damit ist eine quadriert apotomische Strecke fünfter Art BC gefunden, was auszuführen war.

X.91. [X.90]
Eine quadriert apotomische Strecke sechster Art finden.

Es seien gegeben die rationale Strecke A und drei Zahlen E, BC, CD, wovon E zu BC, CD nicht in Verhältnissen steht wie Quadratzahlen zu anderen und auch CB, BD sich nicht verhalten wie Quadratzahlen zueinander. Es verhalte sich E zu BC wie das Quadrat über A zum Quadrat über FG und es verhalte sich BC zu CD wie das Quadrat über FG zum Quadrat über GH.

Da sich E zu BC verhält wie das Quadrat über A zum Quadrat über FG, ist das Quadrat über A kommensurabel zum Quadrat über FG [wie X.6.]. Da das Quadrat über A rational ist, ist auch das Quadrat über FG rational, womit FG quadriert rational ist.

Da E zu BC nicht in einem Verhältnis steht wie eine Quadratzahl zu einer anderen, verhält sich auch das Quadrat über A zum Quadrat über FG nicht wie eine Quadratzahl zu einer anderen. Damit sind A, FG der Länge nach inkommensurabel.



Es verhält sich BC zu CD wie das Quadrat über FG zum Quadrat über GH, womit das Quadrat über FG zum Quadrat über GH kommensurabel ist.
Das Quadrat über FG ist rational, somit ist auch das Quadrat über GH rational und damit GH quadriert rational.

Da sich BC zu CD nicht verhält wie eine Quadratzahl zu einer anderen, verhält sich auch das Quadrat über FG zum Quadrat über GH nicht wie eine Quadratzahl zu einer anderen.
Damit sind FG, GH der Länge nach inkommensurabel.
FG, GH sind quadriert rational und im Quadrat kommensurabel.

Also ist FH eine apotomische Strecke und, sage ich, eine quadriert apotomische Strecke sechster Art.
Denn da sich E zu BC verhält wie das Quadrat über A zum Quadrat über FG und sich BC zu CD verhält wie das Quadrat über FG zum Quadrat über GH, verhält sich E zu CD wie das Quadrat über A zum Quadrat über GH.
Da sich E zu CD nicht verhält wie eine Quadratzahl zu einer anderen, verhält sich auch das Quadrat über A zum Quadrat über GH nicht wie eine Quadratzahl zu einer anderen.
Somit sind A, GH der Länge nach inkommensurabel und weder FG noch GH sind rational.

Ist das Quadrat über FG weniger dem Quadrat über GH gleich dem Quadrat über K, dann, da sich BC zu CD verhält wie das Quadrat über FG zum Quadrat über GH, verhält sich BC zu BD wie das Quadrat über FG zum Quadrat über K.
Da sich CB zu BD nicht verhält wie eine Quadratzahl zu einer anderen, verhält sich auch das Quadrat über FG zum Quadrat über K nicht wie eine Quadratzahl zu einer anderen.
Somit sind FG, K der Länge nach inkommensurabel.
Das Quadrat über FG ist damit um ein Quadrat, dessen Seite zu FG inkommensurabel ist, größer als das Quadrat über GH. Weder FG noch GH sind rational.

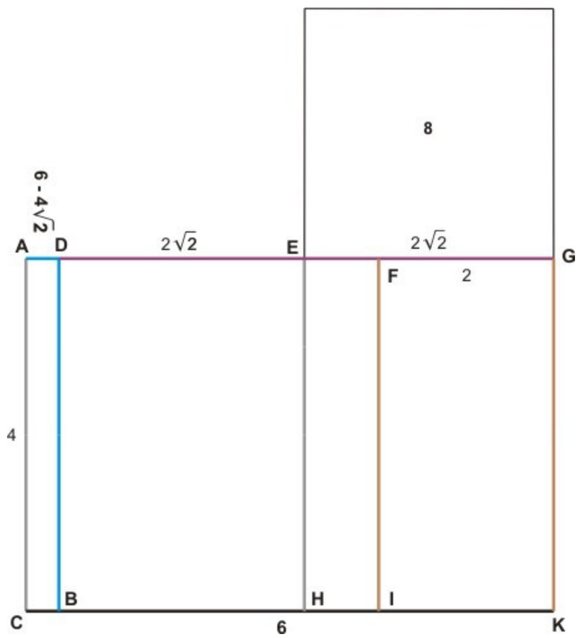
Damit ist eine quadriert apotomische Strecke sechster Art FG gefunden, was auszuführen war.

X.92. [X.91]

Das von einer rationalen Strecke und einer quadriert apotomischen Strecke erster Art eingeschlossene Rechteck ist gleich dem Quadrat über einer apotomischen Strecke.

Wird ein Rechteck AB von einer rationalen Strecke AC und einer quadriert apotomischen Strecke erster Art AD [wie X.86.] eingeschlossen, dann, sage ich, ist AB gleich einem Quadrat, dessen Seite apotomisch ist [wie X.74.].

Denn da AD eine quadriert apotomische Strecke erster Art ist, die durch DG ergänzt wird, sind AG, GD im Quadrat kommensurabel, ist die rationale Strecke AG zu AC kommensurabel und ist das Quadrat über AG um ein Quadrat, dessen Seite zu AG kommensurabel ist, größer als das Quadrat über GD.

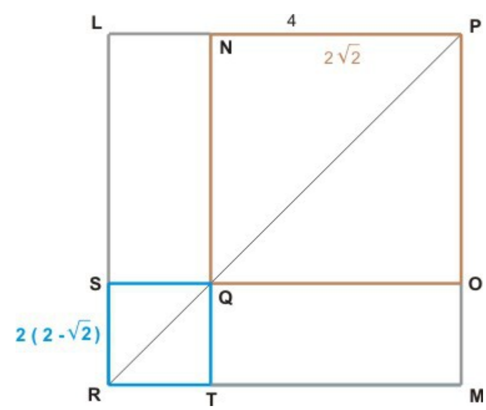


Es ist deshalb durch Abteilen des Quadrats über einer Seite von einem Rechteck auf AG, das verringert um das abgeteilte Quadrat einem Viertel des Quadrats über GD gleich ist, die geteilte Strecke in der Länge nach kommensurable Teile zu teilen [wie X.18.]. Wird also DG in E in zwei gleiche Teile geteilt und an AG ein Rechteck errichtet, das verringert um das Quadrat über AF dem Quadrat über EG gleich ist, dann sind die Seiten des Rechtecks AF mit FG zueinander kommensurabel.

Es sind dann von den Punkten E, F, G die zu AC parallelen EH, FI, GK zu ziehen.

Da AF, FG der Länge nach kommensurabel sind, ist AG sowohl zu AF wie FG kommensurabel. Da AG, AC kommensurabel sind, ist sowohl AF wie FG zu AC der Länge nach kommensurabel.
AC ist damit rational und auch AF, FG sind rational. Also sind auch AI und FK rational.

Da DE, EG der Länge nach kommensurabel sind, ist DG sowohl zu DE wie EG der Länge nach kommensurabel.
Es ist DG quadriert rational und zu AC der Länge nach inkommensurabel und deshalb sowohl DE wie EG zu AC der Länge nach inkommensurabel. Damit sind DH, EK quadriert rational.



Es ist das Quadrat LM, das AI gleich ist, zu errichten und das dem Rechteck FK gleiche Quadrat NO im Winkel LPM abzuteilen. Die Quadrate LM, NO liegen dann auf der Diagonalen RP. Das Rechteck aus AF mit FG ist gleich dem Quadrat über EG, womit sich AF zu EG verhält wie EG zu FG.

Da sich AF zu EG verhält wie AI zu EK und da sich EG zu FG verhält wie EK zu KF, verhält sich EK wie das mittlere Glied in fortlaufend gleicher Proportion mit AI, KF.

Da auch MN sich zu LM, NO verhält wie das mittlere Glied in fortlaufend gleicher Proportion [wie Lemma X.54.] und da AI gleich LM und da KF gleich NO ist, ist MN gleich EK.

Es ist EK gleich DH und ist MN gleich LO, womit DK gleich dem Gnomon LPMQ zusammen mit NO ist.
Da AK gleich LM zusammen mit NO ist, ist das ergänzende AB gleich ST.
Es ist ST das Quadrat über LN und damit ist das Quadrat über LN gleich AB.

Ich sage sodann, LN ist eine apotomische Strecke.
Denn da sowohl AI wie FK rational sind, da AI gleich LM und da FK gleich NO ist, sind die Quadrate über LP, PN rational. Damit sind LP, PN rational.

Da DH quadriert rational ist und DH gleich LO ist, ist auch LO quadriert rational und zu NO inkommensurabel. Es verhält sich LO zu NO wie LP zu NP, womit LP, NP der Länge nach inkommensurabel sind, jedoch im Quadrat kommensurabel.
Also ist das Quadrat über der apotomischen Strecke LN gleich dem Rechteck AB.

Deshalb ist das von einer rationalen Strecke und einer quadriert apotomischen Strecke erster Art eingeschlossene Rechteck ist gleich dem Quadrat über einer apotomischen Strecke, was zu zeigen war.

Anmerkung: $(a - b)^2 = p - 2q$ wenn $p = a^2 + b^2$ und $q = 2ab$
wobei hier $a = AG$, $b = DG$.

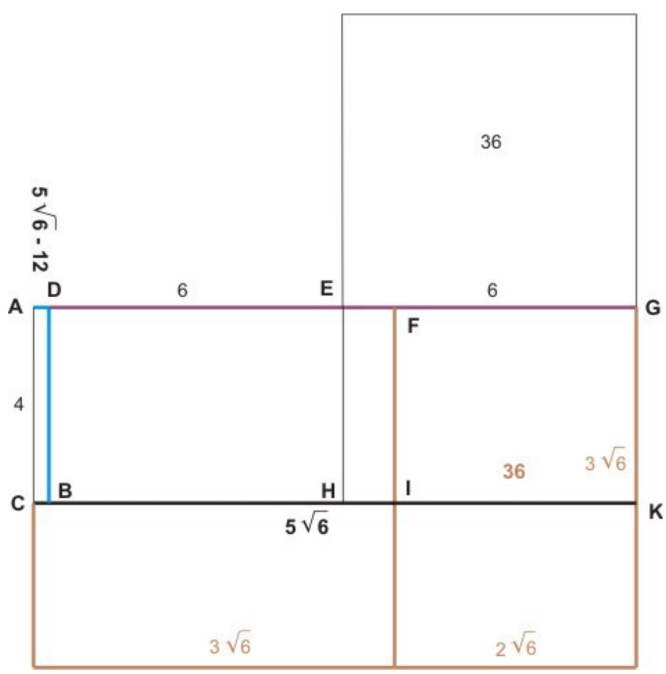
Beispiel: $r \cdot (6 - 4 \cdot 2^{1/2}) = r \cdot (2 - 2^{1/2})^2$, (im graphischen Beispiel ist $r = 4$).

X.93. [X.92]

Das von einer rationalen Strecke und einer quadriert apotomischen Strecke zweiter Art eingeschlossene Rechteck ist gleich dem Quadrat über einer apotomisch primär irrationalen Strecke.

Wird ein Rechteck AB von einer rationalen Strecke AC und einer quadriert apotomischen Strecke zweiter Art AD [wie X.87.] eingeschlossen, dann, sage ich, ist AB gleich einem Quadrat, dessen Seite apotomisch primär irrational ist [wie X.75.].

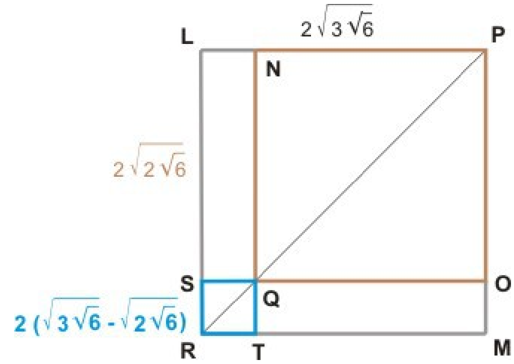
Denn da AD eine quadriert apotomische Strecke zweiter Art ist, die durch DG ergänzt wird, sind AG, GD im Quadrat kommensurabel, ist die rationale Strecke AC zu DG kommensurabel und ist das Quadrat über AG um ein Quadrat, dessen Seite zu AG kommensurabel ist, größer als das Quadrat über GD.



Da das Quadrat über AG um ein Quadrat, dessen Seite zu AG kommensurabel ist, größer ist als das Quadrat über GD wird durch Abteilen eines Quadrats über der anderen Seite des Rechteck auf AG, das verringert um das abgeteilte Quadrat einem Viertel des Quadrats über GD gleich ist, die geteilte Strecke in der Länge nach kommensurable Teile geteilt [wie X.18.].

Wird also DG im Punkt E in zwei gleiche Teile geteilt und auf AG ein Rechteck errichtet, das verringert um das Quadrat über AF dem Quadrat über EG gleich ist, dann sind die Seiten des Rechtecks AF mit FG zueinander der Länge nach kommensurabel.
Von den Punkten E, F, G sind dann die zu AC parallelen EH, FI, GK zu ziehen.
Es ist damit AG sowohl zu AF wie zu FG der Länge nach kommensurabel [wie X.16.].

AG ist quadriert rational und zu AC der Länge nach inkommensurabel, somit sind AF, FG quadriert rational und zu AC der Länge nach inkommensurabel.
Damit sind die Rechtecke AI, FK quadriert rational.
DE, EG sind kommensurabel und DG ist sowohl zu DE wie zu EG kommensurabel.
Da DG, AC der Länge nach kommensurabel sind, sind DH, EK rational.



Es ist das Quadrat LM, das AI gleich ist, zu errichten und das dem Rechteck FK gleiche Quadrat NO im Winkel LPM abzuteilen. Die Quadrate LM, NO liegen dann auf der Diagonalen RP [wie VI.26.].

Da AI, FK quadriert rational sind, da AI gleich dem Quadrat über LP und da FK gleich dem Quadrat über NP ist, sind die Quadrate über LP, NP quadriert rational und sind LP, NP biquadriert rational und im Quadrat kommensurabel.

Das Rechteck aus AF mit FG ist gleich dem Quadrat über EG, weshalb sich AF zu EG verhält wie EG zu FG. Da sich AF zu EG verhält wie AI zu EK und da sich EG zu FG verhält wie EK zu FK, verhält sich EK zu AI, FK wie das mittlere Glied in fortlaufend gleicher Proportion.
Es verhält sich MN zu LM, NO wie das mittlere Glied in fortlaufend gleicher Proportion, wobei AI gleich LM und FK gleich NO sind, und damit ist MN gleich EK.

Da DH gleich EK und da LO gleich MN ist, ist DK gleich dem Gnomon LPMQ und NO zusammen. Das ergänzende TS ist deshalb gleich AB.
TS ist gleich dem Quadrat über LN, somit ist das Quadrat über LN gleich AB.

Ich sage sodann, LN ist eine apotomisch primär irrationale Strecke.
Da EK rational ist und da EK gleich LO ist, ist auch das Rechteck LO aus LP mit PN rational.
Wie gezeigt, ist NO quadriert rational, weshalb LO, NO inkommensurabel sind.
Es verhält sich LO zu NO wie LP zu PN, somit sind LP, PN der Länge nach inkommensurabel.

Da LP, NP biquadriert rational sind und im Quadrat kommensurabel, ergeben sie ein rationales Rechteck. Damit ist LN eine apotomisch primär irrationale Strecke, wobei ihr Quadrat gleich AB ist.

Deshalb ist das von einer rationalen Strecke und einer quadriert apotomischen Strecke zweiter Art eingeschlossene Rechteck gleich dem Quadrat über einer apotomisch primär irrationalen Strecke, was zu zeigen war.

Beispiel: $r \cdot (5 \cdot 6^{1/2} - 12) = r \cdot (3^{1/2} \cdot 6^{1/4} - 2^{1/2} \cdot 6^{1/4})^2$, (im graphischen Beispiel ist $r = 4$).

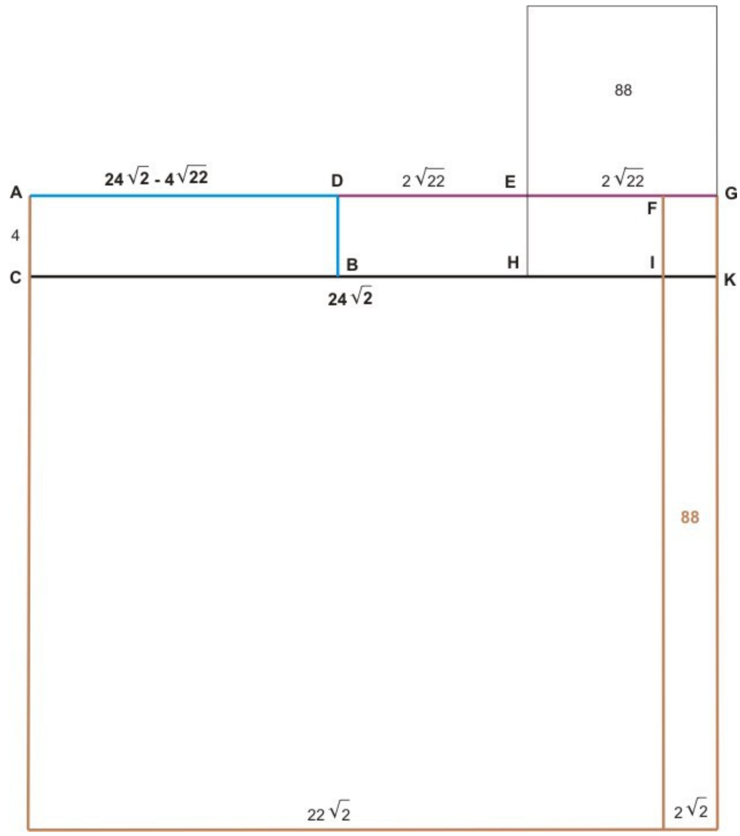
X.94. **[X.93]**

Das von einer rationalen Strecke und einer quadriert apotomischen Strecke dritter Art eingeschlossene Rechteck ist gleich dem Quadrat über einer apotomisch sekundär irrationalen Strecke.

Wird ein Rechteck AB von einer rationalen Strecke AC und einer quadriert apotomischen Strecke dritter Art AD [wie X.88.] eingeschlossen, dann, sage ich, ist AB gleich einem Quadrat, dessen Seite apotomisch sekundär irrational ist [wie X.76.].

Denn da AD eine quadriert apotomische Strecke dritter Art ist, die durch DG ergänzt wird, sind AG, GD im Quadrat kommensurabel, ist keine der Strecken AG, GD zu AC der Länge nach kommensurabel und ist das Quadrat über AG um ein Quadrat, dessen Seite zu AG kommensurabel ist, größer als das Quadrat über GD.

Da das Quadrat über AG um ein Quadrat, dessen Seite zu AG kommensurabel ist, größer ist als das Quadrat über GD, wird durch Abteilen eines Quadrats über der anderen Seite des Rechteck auf AG, das verringert um das abgeteilte Quadrat einem Viertel des Quadrats über GD gleich ist, die geteilte Strecke in der Länge nach kommensurable Teile geteilt [wie X.18.].
Wird also DG im Punkt E in zwei gleiche Teile geteilt und auf AG ein Rechteck errichtet, das verringert um das Quadrat über AF dem Quadrat über EG gleich ist, dann sind die Seiten des Rechtecks AF mit FG zueinander der Länge nach kommensurabel.



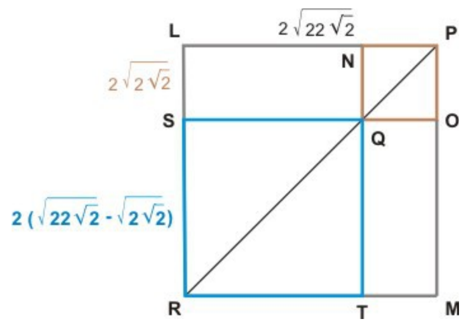
Von den Punkten E, F, G sind dann die zu AC parallelen EH, FI, GK zu ziehen.

Da AF, FG kommensurabel sind, sind auch AI, FK kommensurabel. Da AF, FG der Länge nach kommensurabel sind, ist AG sowohl zu AF wie zu FG der Länge nach kommensurabel. AG ist quadriert rational und zu AC der Länge nach inkommensurabel, damit sind ebenso AF, FG zu AC der Länge nach inkommensurabel. Also ist AI wie FK quadriert rational.

Da DE, EG der Länge nach kommensurabel sind, ist DG sowohl zu DE wie EG der Länge nach kommensurabel. DG ist quadriert rational und zu AC der Länge nach inkommensurabel. Somit sind sowohl DE wie EG zu AC der Länge nach inkommensurabel.
Damit sind DH, EK quadriert rational.
AG ist zu GD im Quadrat kommensurabel, der Länge nach aber inkommensurabel. Da AG zu AF und da DG zu EG der Länge nach kommensurabel sind, sind somit AF, EG der Länge nach inkommensurabel. Es verhält sich AF zu EG wie AI zu EK, also sind AI, EK inkommensurabel.

Es ist das Quadrat LM, das AI gleich ist, zu errichten und das dem Rechteck FK gleiche Quadrat NO im Winkel LPM abzuteilen. Die Quadrate LM, NO liegen dann auf der Diagonalen RP [wie VI.27.].

Da das Rechteck aus AF mit FG gleich dem Quadrat über EG ist, verhält sich AF zu EG wie EG zu FG.



Da sich AF zu EG verhält wie AI zu EK und da sich EG zu FG verhält wie EK zu FK, verhält sich AI zu EK wie EK zu FK. EK verhält sich deshalb zu AI, FK wie das mittlere Glied in fortlaufend gleicher Proportion.

Es verhält sich MN zu LM, NO wie das mittlere Glied in fortlaufend gleicher Proportion.
Da AI gleich LM ist und FK gleich NO ist, ist EK gleich MN.
Da MN gleich LO und da EK gleich DH ist, ist DK gleich dem Gnomon LPMQ und NO zusammen. Damit ist AK gleich LM und NO zusammen.
Das ergänzende ST ist gleich AB, somit ist das Quadrat über LN gleich AB.

Ich sage, LN ist apotomisch sekundär irrational.
Denn, wie gezeigt, sind AI, FK quadriert rational und, da AI gleich dem Quadrat über LP und da FK gleich dem Quadrat über PN ist, sind die Quadrate über LP, PN quadriert rational. Somit sind LP, PN biquadriert rational.

Da AI, FK kommensurabel sind, sind die Quadrate über LP, PN kommensurabel.
Wie gezeigt, sind AI, EK inkommensurabel, womit LM, MN, das ist das Quadrat über LP und das Rechteck aus LP mit PN, inkommensurabel sind.
Da LP, PN der Länge nach inkommensurabel sind, sind also LP, PN biquadriert rational und im Quadrat kommensurabel.

Ich sage sodann, dass LP, PN ein quadriert rationales Rechteck ergeben.
Denn da, wie gezeigt, EK quadriert rational und gleich dem Rechteck aus LP mit PN ist, ist auch das Rechteck aus LP mit PN quadriert rational. Damit sind LP, PN biquadriert rational, im Quadrat kommensurabel und ergeben ein quadriert rationales Rechteck.
Also ist LN eine apotomisch sekundär irrationale Strecke und gleich dem Quadrat über AB.

Deshalb ist das von einer rationalen Strecke und einer quadriert apotomischen Strecke dritter Art eingeschlossene Rechteck AB gleich dem Quadrat über einer apotomisch sekundär irrationalen Strecke, was zu zeigen war.

Beispiel: $r \cdot (24 \cdot 2^{½} - 4 \cdot 22^{½}) = r \cdot ((22 \cdot 2^{½})^{½} - (2 \cdot 2^{½})^{½})^2$, (im graphischen Beispiel ist $r = 4$).

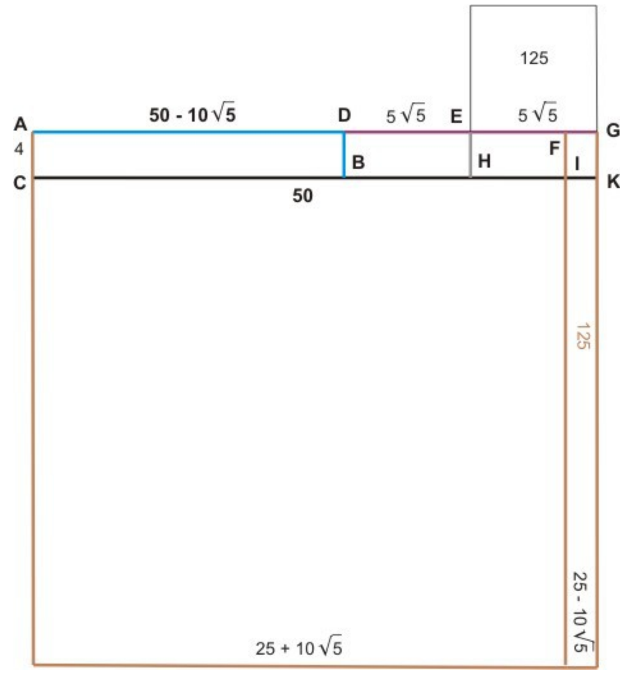
X.95. [X.94]

Das von einer rationalen Strecke und einer quadriert apotomischen Strecke vierter Art eingeschlossene Rechteck ist gleich dem Quadrat über einer konjugiert apotomischen Strecke.

Wird ein Rechteck AB von einer rationalen Strecke AC und einer quadriert apotomischen Strecke vierter Art AD [wie X.89.] eingeschlossen, dann, sage ich, ist AB gleich einem Quadrat, dessen Seite konjugiert apotomisch ist [wie X.77.].

Denn da AD eine quadriert apotomische Strecke vierter Art ist, die durch DG ergänzt wird, sind AG, GD im Quadrat kommensurabel, ist AG zu AC der Länge nach kommensurabel und ist das Quadrat über AG um ein Quadrat, dessen Seite zu AG inkommensurabel ist, größer als das Quadrat über GD.

Da das Quadrat über AG um ein Quadrat, dessen Seite zu AG inkommensurabel ist, größer ist als das Quadrat über GD, wird durch Abteilen eines Quadrats über der anderen Seite des Rechteck auf AG, das verringert um das abgeteilte Quadrat einem Viertel des Quadrats über GD gleich ist, die geteilte Strecke in der Länge nach inkommensurable Teile geteilt [wie X.19.].



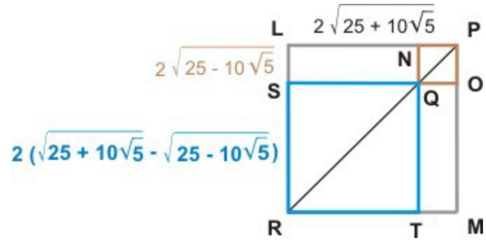
Wird also DG im Punkt E in zwei gleiche Teile geteilt und auf AG ein Rechteck errichtet, das verringert um das Quadrat über AF dem Quadrat über EG gleich ist, dann sind die Seiten des Rechtecks AF mit FG zueinander der Länge nach inkommensurabel.

Von den Punkten E, F, G sind dann die zu AC parallelen EH, FI, GK zu ziehen.
AG ist rational und zu AC der Länge nach kommensurabel, also ist AK rational.

DG ist zur rationalen AC der Länge nach inkommensurabel, damit ist DK quadriert rational.
AF, FG sind der Länge nach inkommensurabel, also sind AI, FK inkommensurabel.

Es ist das Quadrat LM, das AI gleich ist, zu errichten und das dem Rechteck FK gleiche Quadrat NO im Winkel LPM abzuteilen. Die Quadrate LM, NO liegen dann auf der Diagonalen RP [wie VI.27.].

Da das Rechteck aus AF mit FG gleich dem Quadrat über EG ist, verhält sich AF zu EG wie EG zu FG. Da sich AF zu EG verhält wie AI zu EK und da sich EG zu FG verhält wie EK zu FK, verhält sich AI zu EK wie EK zu FK. EK verhält sich deshalb zu AI, FK wie das mittlere Glied in fortlaufend gleicher Proportion.



Es verhält sich MN zu LM, NO wie das mittlere Glied in fortlaufend gleicher Proportion.
Da AI gleich LM ist und FK gleich NO ist, ist EK gleich MN.
Da DH gleich EK und da LO gleich MN ist, ist DK gleich dem Gnomon LPMQ und NO zusammen. Damit ist AK gleich LM und NO zusammen.
ST ist damit gleich AB, somit ist das Quadrat über LN gleich AB.

Ich sage, LN ist irrational und, wie benannt, konjugiert apotomisch.

Denn da AK rational und gleich der Summe der Quadrate über LP, PN ist, ist die Summe der Quadrate über LP, PN rational. Da DK quadriert rational und gleich dem doppelten Rechteck aus LP mit PN ist, ist das doppelte Rechteck aus LP mit PN quadriert rational.

AI ist zu FK, wie gezeigt, inkommensurabel, womit die Quadrate über LP, PN inkommensurabel sind.

Also sind LP, PN im Quadrat inkommensurabel, die Summe ihrer Quadrate ist rational und das doppelte Rechteck, das sie ergeben, ist quadriert rational.
Damit ist LN irrational, konjugiert apotomisch, wie benannt, und sein Quadrat ist gleich AB.

Deshalb ist das Rechteck AB gleich dem Quadrat über einer konjugiert apotomischen Strecke, was zu zeigen war.

Anmerkung: $(d - e)^{1/2} = (g + h)^{1/2} - (g - h)^{1/2}$ wenn $d = 2g$ und $e = 2 \cdot (g^2 - h^2)^{1/2}$.
wobei $(g + h)^{1/2}$, $(g - h)^{1/2}$ konjugierte Terme sind.

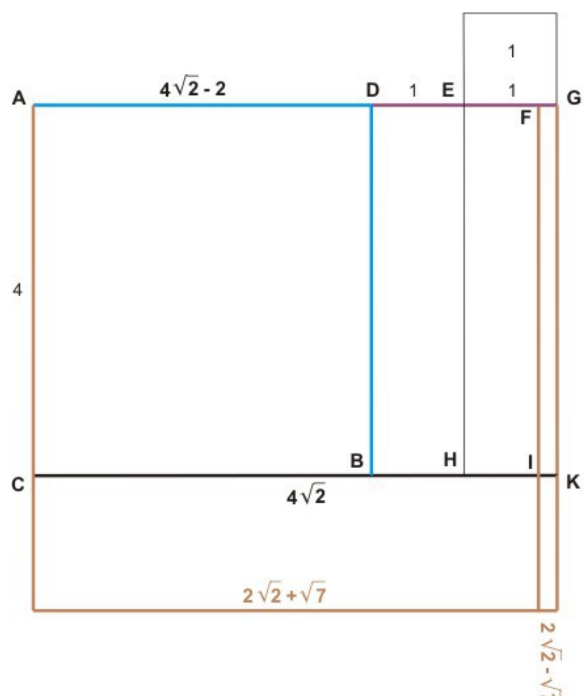
Beispiel: $r \cdot (50 - 10 \cdot 5^{1/2}) = ((r \cdot 25 + r \cdot 10 \cdot 5^{1/2})^{1/2} - (r \cdot 25 - r \cdot 10 \cdot 5^{1/2})^{1/2})^2$,
(im graphischen Beispiel ist $r = 4$).

X.96. [X.95]

Das von einer rationalen Strecke und einer quadriert apotomischen Strecke fünfter Art eingeschlossene Rechteck ist gleich dem Quadrat über einer konjugiert apotomisch primär irrationalen Strecke.

Wird ein Rechteck AB von einer rationalen Strecke AC und einer quadriert apotomischen Strecke fünfter Art AD [wie X.90.] eingeschlossen, dann, sage ich, ist AB gleich einem Quadrat, dessen Seite konjugiert apotomisch primär irrational ist [wie X.78.].

Denn da AD eine quadriert apotomische Strecke fünfter Art ist, die durch DG ergänzt wird, sind AG, GD im Quadrat kommensurabel, ist die ergänzende GD zu AC der Länge nach kommensurabel und ist das Quadrat über der ganzen AG um ein Quadrat, dessen Seite zu AG inkommensurabel ist, größer als das Quadrat über GD.



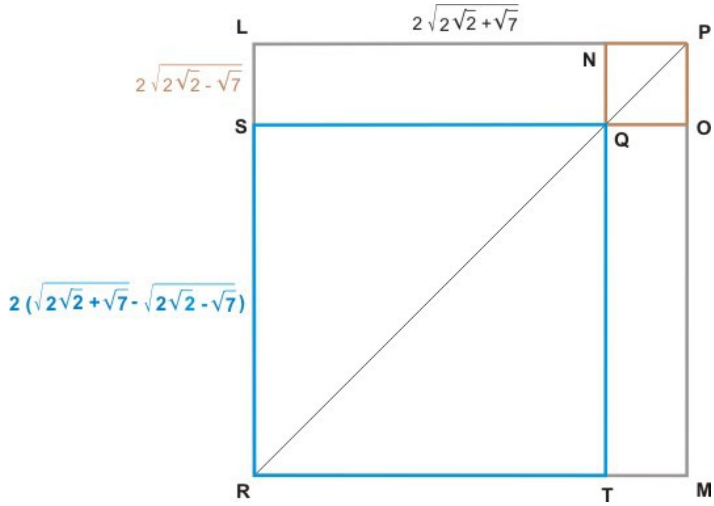
Wird auf AG ein Rechteck errichtet, das nach Abteilen des Quadrats über seiner anderen Seite gleich einem Viertel des Quadrats über DG ist, dann ist AG dadurch in inkommensurable Teile geteilt [wie X.19.].

Wird also DG im Punkt E in zwei gleiche Teile geteilt und auf AG ein Rechteck errichtet, das verringert um das Quadrat über AF dem Quadrat über EG gleich ist, dann sind die Seiten des Rechtecks AF mit FG zueinander der Länge nach inkommensurabel.

Da AG zu CA der Länge nach inkommensurabel und quadriert rational ist, ist AK quadriert rational.

Da DG rational und zu AC der Länge nach kommensurabel ist, ist DK rational.

Es ist das Quadrat LM, das AI gleich ist, zu errichten und das dem Rechteck FK gleiche Quadrat NO im Winkel LPM abzuteilen. Die Quadrate LM, NO liegen dann auf der Diagonalen RP [wie VI.26.]. Auf gleiche Weise wie vorher ist zu zeigen, dass das Quadrat über LN gleich AB ist.



Ich sage, LN ist eine konjugiert apotomisch primär irrationale Strecke.

Denn da, wie gezeigt, AK quadriert rational und gleich den Quadraten über LP, PN zusammen ist, sind die Quadrate über LP, PN zusammen quadriert rational. Da DK rational und gleich dem doppelten Rechteck aus LP mit PN ist, ist auch dieses rational.

AI ist zu FK inkommensurabel, somit ist das Quadrat über LP zum Quadrat über PN inkommensurabel.
Damit sind LP, PN im Quadrat inkommensurabel, sind ihre Quadrate zusammen quadriert rational und ist das doppelte Rechteck, das sie ergeben, rational.

Also ist LN konjugiert apotomisch primär irrational und ihr Quadrat ist gleich AB.

Deshalb ist das Rechteck AB gleich dem Quadrat über einer konjugiert apotomisch primär irrationalen Strecke, was zu zeigen war.

Beispiel: $r \cdot (4 \cdot 2^{1/2} - 2) = ((r \cdot 2 \cdot 2^{1/2} + r \cdot 7^{1/2})^{1/2} - (r \cdot 2 \cdot 2^{1/2} - r \cdot 7^{1/2})^{1/2})^2$,
wobei im graphischen Beispiel $r = 4$.

X.97. [X.96]

Das von einer rationalen Strecke und einer quadriert apotomischen Strecke sechster Art eingeschlossene Rechteck ist gleich dem Quadrat über einer konjugiert apotomisch sekundär irrationalen Strecke.

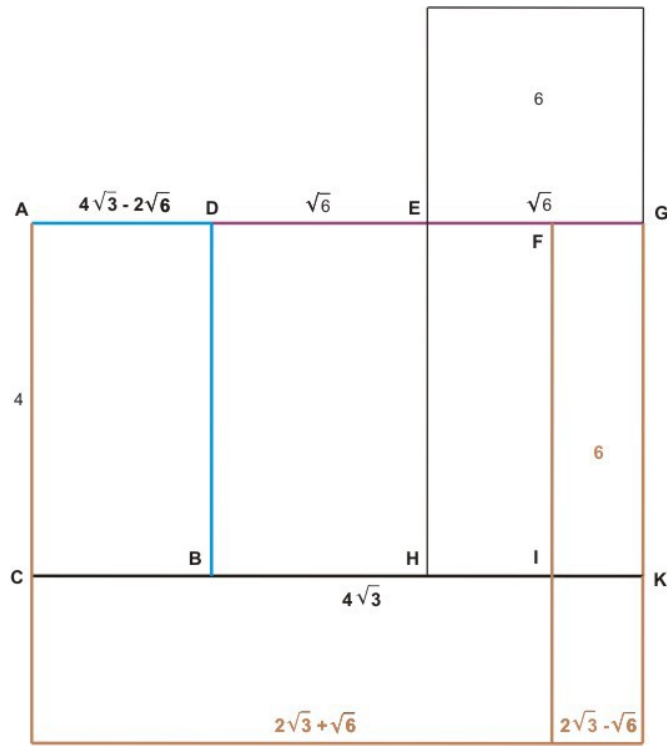
Wird ein Rechteck AB von einer rationalen Strecke AC und einer quadriert apotomischen Strecke sechster Art AD [wie X.91.] eingeschlossen, dann, sage ich, ist AB gleich einem Quadrat, dessen Seite konjugiert apotomisch sekundär irrational ist [wie X.79.].

Denn da AD eine quadriert apotomische Strecke sechster Art ist, die durch DG ergänzt wird, sind AG, GD im Quadrat kommensurabel, ist keine der Strecken AG, GD zu AC der Länge nach kommensurabel und ist das Quadrat über AG um ein Quadrat, dessen Seite zu AG inkommensurabel ist, größer als das Quadrat über GD.

Wird auf AG ein Rechteck errichtet, das nach Abteilen des Quadrat über seiner anderen Seite gleich einem Viertel des Quadrats über DG ist, dann ist AG dadurch in inkommensurable Teile geteilt [wie X.19.]. Wird also DG im Punkt E in zwei gleiche Teile geteilt und auf AG ein Rechteck errichtet, das verringert um das Quadrat über AF dem Quadrat über EG gleich ist, dann sind die Seiten des Rechtecks AF mit FG zueinander der Länge nach inkommensurabel und da sich AF zu FG verhält wie AI zu FK, sind auch AI, FK inkommensurabel.

Da AG, AC quadriert rational und im Quadrat kommensurabel sind, ist AK quadriert rational. Da auch AC, DG quadriert rational und im Quadrat kommensurabel sind, ist auch DK quadriert rational.

AG, GD sind im Quadrat kommensurabel, jedoch der Länge nach inkommensurabel.
Es verhält sich AG zu GD wie AK zu KD, somit sind AK, KD inkommensurabel.



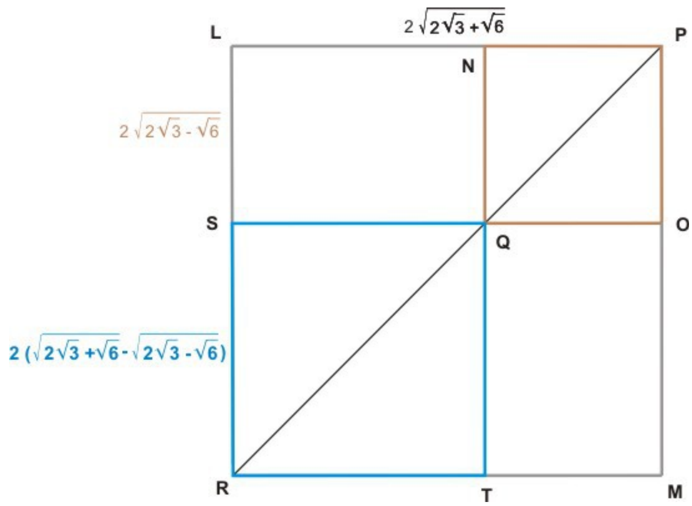
Es ist das Quadrat LM, das AI gleich ist, zu errichten und das dem Rechteck FK gleiche Quadrat NO im gleichen Winkel abzuteilen. Die Quadrate LM, NO liegen dann auf der Diagonalen RP [wie VI.26.].

Auf gleiche Weise wie vorher ist zu zeigen, dass das Quadrat über LN gleich AB ist.

Ich sage, LN ist eine konjugiert apotomisch sekundär irrationale Strecke.

Denn da, wie gezeigt, AK quadriert rational und gleich den Quadraten über LP, PN zusammen ist, sind die Quadrate über LP, PN zusammen quadriert rational.
Da, wie ebenfalls gezeigt, DK quadriert rational und gleich dem doppelten Rechteck aus LP mit PN ist, ist das doppelte Rechteck aus LP mit PN quadriert rational.

Es wurde auch gezeigt, dass AK zu DK inkommensurabel sind, damit ist die Summe der Quadrate über LP, PN zum doppelten Rechteck aus LP mit PN inkommensurabel. Da AI, FK inkommensurabel sind, sind auch die Quadrate über LP, PN inkommensurabel.
Somit sind LP, PN im Quadrat inkommensurabel, ihre Quadrate zusammen sind quadriert rational und das doppelte Rechteck, das sie ergeben, ist quadriert rational und zur Summe der Quadrate inkommensurabel.



Also ist LN konjugiert apotomisch sekundär irrational und das Quadrat über LN ist gleich AB.

Deshalb ist das Rechteck AB gleich dem Quadrat über einer konjugiert apotomisch sekundär irrationalen Strecke, was zu zeigen war.

Beispiel: $r \cdot (4 \cdot 3^{1/2} - 2 \cdot 6^{1/2}) = ((r \cdot 2 \cdot 3^{1/2} + r \cdot 6^{1/2})^{1/2} - (r \cdot 2 \cdot 3^{1/2} - r \cdot 6^{1/2})^{1/2})^2$,
(im graphischen Beispiel ist $r = 4$).

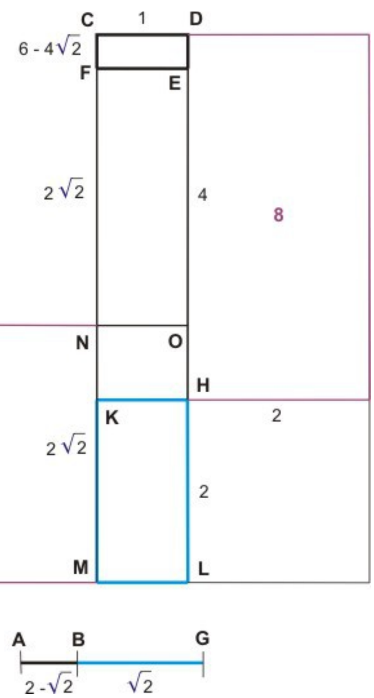
X.98. **[X.97]**
Wird auf einer rationalen Strecke ein Rechteck errichtet, das dem Quadrat über einer apotomischen Strecke gleich ist, ist seine andere Seite eine quadriert apotomische Strecke erster Art.

Wenn AB apotomisch, CD rational und ein dem Quadrat über AB gleiches Rechteck CE auf CD mit CF errichtet ist, dann, sage ich, ist CF eine quadriert apotomische Strecke erster Art.

Denn wenn BG die apotomische Strecke AB ergänzt, sind AG, GB im Quadrat kommensurabel [wie X.74.].
Wird auf CD das dem Quadrat über AG gleiche Rechteck CH und daran das dem Quadrat über BG gleiche Rechteck KL errichtet, ist das ganze Rechteck CL gleich der Summe der Quadrate über AG, GB. Dabei ist CE gleich dem Quadrat über AB und das restliche FL gleich dem doppelten Rechteck aus AG mit GB.

Es ist FM im Punkt N in zwei gleiche Teile zu teilen und die zu CD parallele NO zu ziehen. Somit ist dann FO gleich LN und gleich dem Rechteck aus AG mit GB. Da die Summe der Quadrate über AG, GB rational ist und gleich DM ist, ist DM rational. Da DM auf der rationalen Strecke CD errichtet ist, ist CM rational und zu CD der Länge nach kommensurabel.

Das doppelte Rechteck aus AG mit GB ist quadriert rational und gleich FL, somit ist FL quadriert rational. Da FL auf der rationalen Strecke CD errichtet ist, ist FM quadriert rational und zu CD der Länge nach inkommensurabel.



Die Summe der Quadrate über AG, GB ist rational, das doppelte Rechteck aus AG mit GB aber quadriert rational, damit ist die Summe der Quadrate über AG, GB zum doppelten Rechteck aus AG mit GB inkommensurabel.
Da CL gleich der Summe der Quadrate über AG, GB und da FL gleich dem doppelten Rechteck aus AG mit GB ist, sind DM, FL inkommensurabel.
DM verhält sich zu FL wie CM zu FM, womit CM, FM der Länge nach inkommensurabel, jedoch im Quadrat kommensurabel sind.

Damit ist CF apotomisch und, sage ich, eine quadriert apotomische Strecke erster Art.

Denn da sich das Rechteck aus AG mit GB zu den Quadraten über AG, GB verhält wie das mittlere Glied in fortlaufend gleicher Proportion.
Da CH gleich dem Quadrat über AG, da KL gleich dem Quadrat über BG und da NL gleich dem Rechteck aus AG mit GB ist, verhält sich NL zu CH, KL wie das mittlere Glied in fortlaufend gleicher Proportion.
Somit verhält sich CH zu NL wie NL zu KL.

Da sich CH zu NL verhält wie CK zu NM und da sich NL zu KL verhält wie NM zu KM, verhält sich CK zu NM wie NM zu KM und ist das Rechteck aus CK mit KM gleich dem Quadrat über MN [wie VI.17.], das ein Viertel des Quadrates über FM ist.

Die Quadrate über AG, GB sind kommensurabel, womit CH, KL kommensurabel sind.
Da sich CH zu KL verhält wie CK zu KM, sind CK, KM kommensurabel.

Das Viertel des Quadrates über MF teilt vom Rechteck aus CM mit KM das ihm gleiche Rechteck aus CK mit KM ab. CM, MF sind somit zwei ungleiche Strecken, wobei das Viertel des Quadrats über der kleineren MF gleich dem Rechteck aus CK mit KM ist, das zusammen mit dem Quadrat über KM gleich dem Rechteck aus CM mit KM ist.

Also ist das Quadrat über CM um ein Quadrat, dessen Seite zu CM kommensurabel ist, größer als das Quadrat über MF [wie X.18.].
CM ist zur rationalen CD kommensurabel und rational.
Damit ist CF eine quadriert apotomische Strecke erster Art.

Deshalb hat ein Rechteck, das auf einer rationalen Strecke errichtet und dem Quadrat über einer apotomischen Strecke gleich ist, eine quadriert apotomische Seite erster Art, was zu zeigen war.

Beispiel: $(r \cdot 2 - r \cdot 2^{1/2})^2 = r^2 \cdot (6 - 4 \cdot 2^{1/2})$, wobei im graphischen Beispiel $r = 1$.

X.99. **[X.98]**
Wird auf einer rationalen Strecke ein Rechteck errichtet, das dem Quadrat über einer apotomisch primär irrationalen Strecke gleich ist, ist seine andere Seite eine quadriert apotomische Strecke zweiter Art.

Wenn AB apotomisch primär irrational, CD rational und ein dem Quadrat über AB gleiches Rechteck CE auf CD mit CF errichtet ist, dann, sage ich, ist CF eine quadriert apotomische Strecke zweiter Art.

Denn wenn BG die apotomisch primär irrationale Strecke AB ergänzt, sind AG, GB im Quadrat kommensurabel und ergeben ein rationales Rechteck [wie X.75.].

Wird auf CD das dem Quadrat über AG gleiche Rechteck CH mit der Seite CK und daran das dem Quadrat über BG gleiche Rechteck KL mit der Seite KM errichtet, ist das ganze Rechteck CL gleich der Summe der Quadrate über AG, GB.

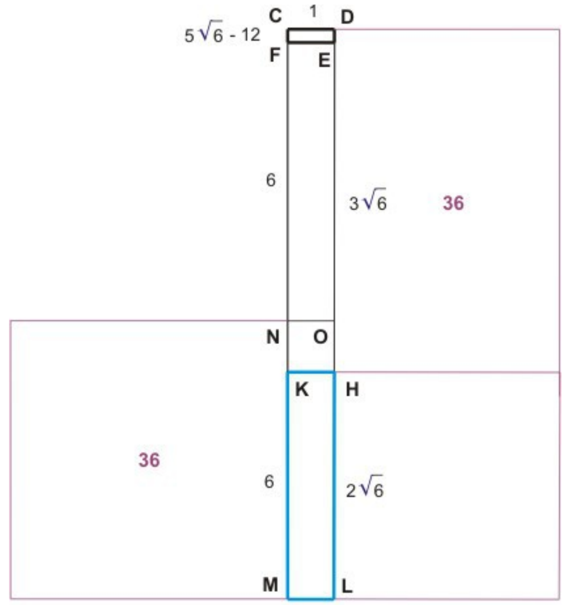
Da CL quadriert rational und auf der rationalen CD errichtet ist, ist CM quadriert rational und zu CD der Länge nach inkommensurabel. Dabei ist CE gleich dem Quadrat über AB und das restliche FL gleich dem doppelten Rechteck aus AG mit GB.
Da das doppelte Rechteck aus AG mit GB rational ist, ist FL rational. FL ist an der rationalen Strecke FE errichtet, somit ist seine Seite FM rational und zu CD der Länge nach kommensurabel.

Die Summe der Quadrate über AG, GB, die gleich CL ist, ist quadriert rational, das doppelte Rechteck aus AG mit GB, das gleich FL ist, rational, womit CL, FL inkommensurabel sind.
Es verhält sich CL zu FL wie CM zu FM, somit sind CM, FM der Länge nach inkommensurabel, jedoch im Quadrat kommensurabel.

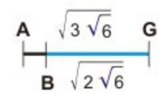
Also ist CF apotomisch und, sage ich, eine quadriert apotomische Strecke zweiter Art.
Denn wird FM in N in zwei gleich Teile geteilt und von N die zu CD parallele Strecke NO gezogen, ist FO gleich NL und gleich dem Rechteck aus AG mit GB.

Das Rechteck aus AG mit GB verhält sich zu den Quadraten über AG, GB wie das mittlere Glied in fortlaufend gleicher Proportion. Das Quadrat über AG ist gleich CH, das Rechteck aus AG mit GB ist gleich NL und das Quadrat über GB ist gleich KL.

Somit verhält sich NL zu CH, KL wie das mittlere Glied in fortlaufend gleicher Proportion und damit verhält sich CH zu NL wie NL zu KL.
Da sich CH zu NL verhält wie CK zu NM und da sich NL zu KL verhält wie NM zu KM, verhält sich CK zu NM wie NM zu KM und ist das Rechteck aus CK mit KM gleich dem Quadrat über MN [wie VI.17.], das ein Viertel des Quadrates über FM ist.



CM, MF sind somit zwei ungleiche Strecken, wobei das Viertel des Quadrats über der kleineren MF gleich dem Rechteck aus CK mit KM ist, das zusammen mit dem Quadrat über KM gleich dem Rechteck aus CM mit KM ist. Dadurch wird CM in die kommensurablen Strecken CK, KM geteilt.
Also ist das Quadrat über CM um ein Quadrat, dessen Seite zu CM kommensurabel ist, größer als das Quadrat über MF [wie X.18.].
Die ergänzende Strecke FM ist zur rationalen CD kommensurabel und rational.
Damit ist CF eine quadriert apotomische Strecke zweiter Art.



Deshalb hat ein Rechteck, das auf einer rationalen Strecke errichtet und dem Quadrat über einer apotomisch primär irrationalen Strecke gleich ist, eine quadriert apotomische Seite zweiter Art, was zu zeigen war.

Beispiel: $((r \cdot 3 \cdot 6^{½})^{½} - (r \cdot 2 \cdot 6^{½})^{½})^2 = r \cdot (5 \cdot 6^{½} - 12)$, wobei im graphischen Beispiel $r = 1$.

X.100. [X.99]

Wird auf einer rationalen Strecke ein Rechteck errichtet, das dem Quadrat über einer apotomisch sekundär irrationalen Strecke gleich ist, ist seine andere Seite eine quadriert apotomische Strecke dritter Art.

Wenn AB apotomisch sekundär irrational, CD rational und ein dem Quadrat über AB gleiches Rechteck CE auf CD mit CF errichtet ist, dann, sage ich, ist CF eine quadriert apotomische Strecke dritter Art.

Denn wenn BG die apotomisch sekundär irrationale Strecke AB ergänzt, sind AG, GB im Quadrat kommensurabel und ergeben ein quadriert rationales Rechteck [wie X.76.].

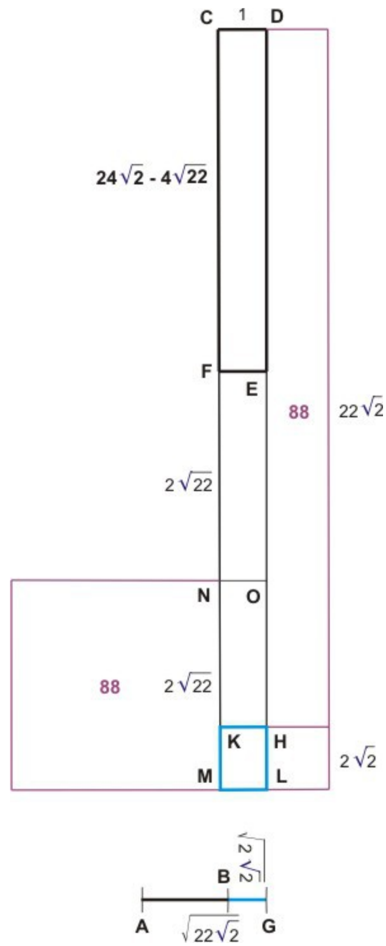
Wird auf CD das dem Quadrat über AG gleiche Rechteck CH mit der Seite CK und daran das dem Quadrat über BG gleiche Rechteck KL mit der Seite KM errichtet, ist das ganze Rechteck CL gleich der Summe der Quadrate über AG, GB.

Da die Summe der Quadrate über AG, GB quadriert rational und gleich CL ist, ist CL quadriert rational. CL ist auf der rationalen Strecke CD mit der Seite CM errichtet, somit ist CM quadriert rational und zu CD der Länge nach inkommensurabel.
Die Summe der Quadrate über AG, GB ist gleich CL, das Quadrat über AB ist gleich CE, damit ist das verbleibende LF gleich dem doppelten Rechteck aus AG mit GB.

Es ist FM im Punkt N in zwei gleiche Teile zu teilen und die zu CD parallele NO zu ziehen.

Somit ist dann FO gleich LN und gleich dem Rechteck aus AG mit GB.
Da das Rechteck aus AG mit GB quadriert rational ist, ist FL quadriert rational.
FL ist auf der rationalen Strecke EF mit der Seite FM errichtet, womit FM quadriert rational und zu CD der Länge nach inkommensurabel ist.

Da AG, GB im Quadrat kommensurabel, der Länge nach aber inkommensurabel sind, ist das Quadrat über AG zum Rechteck aus AG mit GB inkommensurabel.
Das Quadrat über AG ist zur Summe der Quadrate über AG, GB und das Rechteck aus AG mit GB ist zu seinem doppelten kommensurabel, also ist die Summe der Quadrate über AG, GB zum doppelten Rechteck aus AG, GB inkommensurabel.
Da die Summe der Quadrate über AG, GB gleich CL und da das doppelte Rechteck aus AG mit GB gleich FL ist, sind CL, FL inkommensurabel.
Es verhält sich CL zu FL wie CM zu FM, womit CM, FM der Länge nach inkommensurabel, jedoch im Quadrat kommensurabel sind.



Damit ist CF apotomisch und, sage ich, eine quadriert apotomische Strecke dritter Art.
Denn da die Quadrate über AG, GB kommensurabel sind, sind CH, KL kommensurabel und sind damit auch CK, KM kommensurabel.

Da sich das Rechteck aus AG mit GB zu den Quadraten über AG, GB verhält wie das mittlere Glied in fortlaufend gleicher Proportion, da CH gleich dem Quadrat über AG, da KL gleich dem Quadrat über GB und da NL gleich dem Rechteck aus AG mit GB ist, verhält sich NL zu CH, KL wie das mittlere Glied in fortlaufend gleicher Proportion.
Es verhält sich damit CH zu NL wie NL zu KL.

Da sich CH zu NL verhält wie CK zu NM und da sich NL zu KL verhält wie NM zu KM, verhält sich CK zu NM wie NM zu KM und ist das Rechteck aus CK mit KM gleich dem Quadrat über MN [wie VI.17.], das ein Viertel des Quadrates über FM ist.

CM, MF sind somit zwei ungleiche Strecken, wobei das Viertel des Quadrats über der kleineren MF gleich dem Rechteck aus CK mit KM ist, das zusammen mit dem Quadrat über KM gleich dem Rechteck aus CM mit KM ist. Also ist das Quadrat über CM um ein Quadrat, dessen Seite zu CM kommensurabel ist, größer als das Quadrat über MF [wie X.18.].
Keine der Strecken CM, MF ist zur rationalen Strecke CD der Länge nach kommensurabel und rational. Also ist CF eine quadriert apotomische Strecke dritter Art.

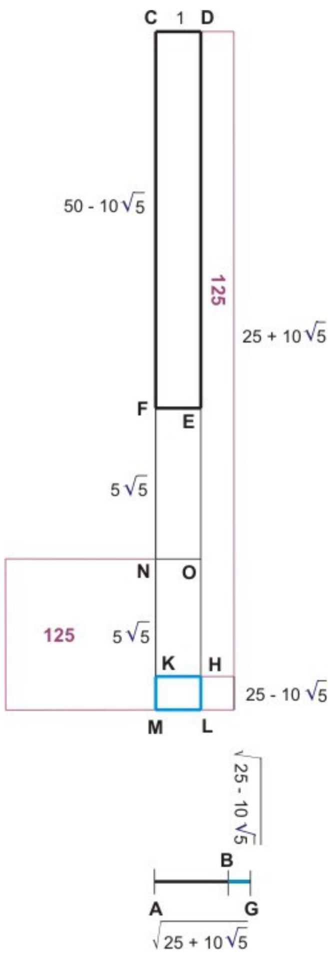
Deshalb hat ein Rechteck, das auf einer rationalen Strecke errichtet und dem Quadrat über einer apotomisch sekundär irrationalen Strecke gleich ist, eine quadriert apotomische Seite dritter Art, was zu zeigen war.

Beispiel: $((r \cdot 22 \cdot 2^{1/2})^{1/2} - (r \cdot 2 \cdot 2^{1/2})^{1/2})^2 = r \cdot (24 \cdot 2^{1/2} - 4 \cdot 22^{1/2})$, wobei im graphischen Beispiel $r = 1$.

X.101. [X.100]

Wird auf einer rationalen Strecke ein Rechteck errichtet, das dem Quadrat über einer konjugiert apotomischen Strecke gleich ist, ist seine andere Seite eine quadriert apotomische Strecke vierter Art.

Wenn AB konjugiert apotomisch, CD rational und ein dem Quadrat über AB gleiches Rechteck CE auf CD mit CF errichtet ist, dann, sage ich, ist CF eine quadriert apotomische Strecke vierter Art.



Denn wenn BG die konjugiert apotomische Strecke AB ergänzt, sind AG, GB im Quadrat inkommensurabel, die Summe ihrer Quadrate ist rational und das doppelte Rechteck, das sie ergeben, ist quadriert rational [wie X.77.].

Wird auf CD das dem Quadrat über AG gleiche Rechteck CH mit der Seite CK und daran das dem Quadrat über BG gleiche Rechteck KL mit der Seite KM errichtet, ist das ganze Rechteck CL gleich der Summe der Quadrate über AG, GB. Da die Summe der Quadrate über AG, GB rational ist, ist CL rational. CL ist an der rationalen CD mit der Seite CM errichtet, womit CM rational ist und zu CD der Länge nach kommensurabel.

Das ganze Rechteck CL ist gleich der Summe der Quadrate über AG, GB, davon ist CE gleich dem Quadrat über AB, somit ist FL gleich dem doppelten Rechteck aus AG mit GB [wie II.7.].

Es ist FM im Punkt N in zwei gleiche Teile zu teilen und die zu CD parallele NO zu ziehen. Somit ist dann FO gleich LN und gleich dem Rechteck aus AG mit GB.

Da das doppelte Rechteck aus AG mit GB quadriert rational und gleich FL ist, ist FL quadriert rational. FL ist an der rationalen Strecke FE mit der Seite FM errichtet, womit FM quadriert rational und zu CD der Länge nach inkommensurabel ist.

Die Summe der Quadrate über AG, GB ist rational, das doppelte Rechteck aus AG mit GB jedoch quadriert rational, somit ist die Summe der Quadrate über AG, GB zum doppelten Rechteck aus AG mit GB inkommensurabel. Die Summe der Quadrate über AG, GB ist gleich CL und das doppelte Rechteck aus AG mit GB ist gleich FL, weshalb CL, FL inkommensurabel sind. Es verhält sich CL zu FL wie CM zu MF, also sind CM, MF der Länge nach inkommensurabel, jedoch im Quadrat kommensurabel.

Deshalb ist CF apotomisch und, sage ich, eine quadriert apotomische Strecke vierter Art.

Denn da AG, GB im Quadrat inkommensurabel sind, sind die Quadrate über AG, GB inkommensurabel. Das Quadrat über AG ist gleich CH und das Quadrat über GB ist gleich KL, somit sind CH, KL inkommensurabel. Es verhält sich CH zu KL wie CK zu KM, also sind CK, KM der Länge nach inkommensurabel.

Das Rechteck aus AG mit GB verhält sich zu den Quadraten über AG, GB wie das mittlere Glied in fortlaufend gleicher Proportion. Das Quadrat über AG ist gleich CH, das Quadrat über GB ist gleich KL und das Rechteck aus AG mit GB ist gleich NL, somit verhält sich NL zu CH, KL wie das mittlere Glied in fortlaufend gleicher Proportion.
Damit verhält sich CH zu NL wie NL zu KL.

Da sich CH zu NL verhält wie CK zu NM und da sich NL zu KL verhält wie NM zu KM, verhält sich CK zu NM wie NM zu KM und ist das Rechteck aus CK mit KM gleich dem Quadrat über MN [wie VI.17.], das ein Viertel des Quadrates über FM ist.

CM, MF sind somit zwei ungleiche Strecken, wobei das Viertel des Quadrats über der kleineren MF gleich dem Rechteck aus CK mit KM ist, das zusammen mit dem Quadrat über KM gleich dem Rechteck aus CM mit KM ist. Also ist das Quadrat über CM um ein Quadrat, dessen Seite zu CM inkommensurabel ist, größer als das Quadrat über MF [wie X.19.].
Die ganze Strecke CM ist der Länge kommensurabel zur rationalen CD und damit rational.

Also ist CF eine quadriert apotomische Strecke vierter Art.

Deshalb hat ein Rechteck, das auf einer rationalen Strecke errichtet und dem Quadrat über einer konjugiert apotomischen Strecke gleich ist, eine Seite wie verlangt, was zu zeigen war.

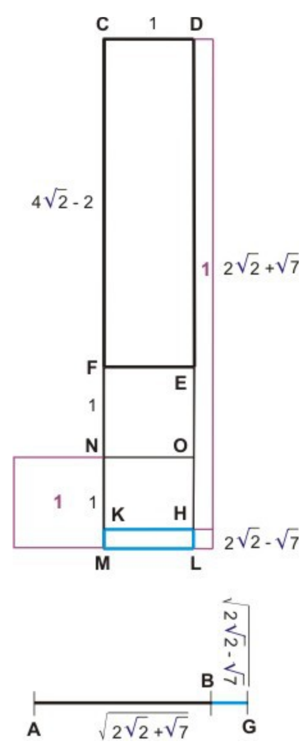
Beispiel: $((r \cdot 25 + r \cdot 10 \cdot 5^{1/2})^{1/2} - (r \cdot 25 - r \cdot 10 \cdot 5^{1/2})^{1/2})^2 = r \cdot (50 - 10 \cdot 5^{1/2})$,
(im graphischen Beispiel ist $r = 1$).

X.102. [X.101]

Wird auf einer rationalen Strecke ein Rechteck errichtet, das dem Quadrat über einer konjugiert apotomisch primär irrationalen Strecke gleich ist, ist seine andere Seite eine quadriert apotomische Strecke fünfter Art.

Wenn AB konjugiert apotomisch primär irrational, CD rational und ein dem Quadrat über AB gleiches Rechteck CE auf CD mit CF errichtet ist, dann, sage ich, ist CF eine quadriert apotomische Strecke fünfter Art.

Denn wenn BG die konjugiert apotomisch primär irrationale Strecke AB ergänzt, sind AG, GB im Quadrat inkommensurabel, die Summe ihrer Quadrate ist quadriert rational und das doppelte Rechteck, das sie ergeben, ist rational [wie X.78.].



Wird auf CD das dem Quadrat über AG gleiche Rechteck CH und daran das dem Quadrat über BG gleiche Rechteck KL errichtet, ist das ganze Rechteck CL gleich der Summe der Quadrate über AG, GB.

Da die Summe der Quadrate über AG, GB quadriert rational ist, ist CL quadriert rational. CL ist an der rationalen CD mit der Seite CM errichtet, womit CM quadriert rational ist und zu CD der Länge nach inkommensurabel.

Das ganze Rechteck CL ist gleich der Summe der Quadrate über AG, GB, davon ist CE gleich dem Quadrat über AB, somit ist FL gleich dem doppelten Rechteck aus AG mit GB [wie II.7.].

Es ist FM im Punkt N in zwei gleiche Teile zu teilen und die zu CD parallele NO zu ziehen. Somit ist dann FO gleich LN und gleich dem Rechteck aus AG mit GB.

Da das doppelte Rechteck aus AG mit GB rational und gleich FL ist, ist FL rational. FL ist an der rationalen Strecke FE mit der Seite FM errichtet, womit FM rational und zu CD der Länge nach kommensurabel ist.

CL ist quadriert rational, FL aber rational, somit sind CL, FL inkommensurabel. Es verhält sich CL zu FL wie CM zu MF, womit CM, MF der Länge nach inkommensurabel, jedoch im Quadrat kommensurabel sind.

Damit ist CF apotomisch und, sage ich, eine quadriert apotomische Strecke fünfter Art.

Wie vorher gezeigt, ist das Rechteck aus CK mit KM gleich dem Quadrat über MN, das ein Viertel des Quadrates über FM ist. Das Quadrat über AG ist gleich CH, das Quadrat über GB ist gleich KL und es verhält sich CH zu KL wie CK zu KM, womit CK, KM der Länge nach inkommensurabel sind.

CM, MF sind somit zwei ungleiche Strecken, wobei das Viertel des Quadrats über der kleineren MF gleich dem Rechteck aus CK mit KM ist, das zusammen mit dem Quadrat über KM gleich dem Rechteck aus CM mit KM ist. Dadurch wird CM in die inkommensurablen Strecken CK, KM geteilt. Also ist das Quadrat über CM um ein Quadrat, dessen Seite zu CM inkommensurabel ist, größer als das Quadrat über MF [wie X.19.].
Die ergänzende FM ist kommensurabel zur rationalen CD und rational.

Deshalb ist CF eine quadriert apotomische Strecke fünfter Art, was zu zeigen war.

Beispiel: $((r \cdot 2 \cdot 2^{1/2} + r \cdot 7^{1/2})^{1/2} - (r \cdot 2 \cdot 2^{1/2} - r \cdot 7^{1/2})^{1/2})^2 = r \cdot (4 \cdot 2^{1/2} - 2)$,
(im graphischen Beispiel ist $r = 1$).

X.103. [X.102]

Wird auf einer rationalen Strecke ein Rechteck errichtet, das dem Quadrat über einer konjugiert apotomisch sekundär irrationalen Strecke gleich ist, ist seine andere Seite eine quadriert apotomische Strecke sechster Art.

Wenn AB konjugiert apotomisch sekundär irrational, CD rational und ein dem Quadrat über AB gleiches Rechteck CE auf CD mit CF errichtet ist, dann, sage ich, ist CF eine quadriert apotomische Strecke sechster Art.

Denn wenn BG die konjugiert apotomisch primär irrationale Strecke AB ergänzt, sind AG, GB im Quadrat inkommensurabel, die Summe ihrer Quadrate ist quadriert rational und das doppelte Rechteck, das sie ergeben, ist quadriert rational und zur Summe der Quadrate inkommensurabel [wie X.79.].

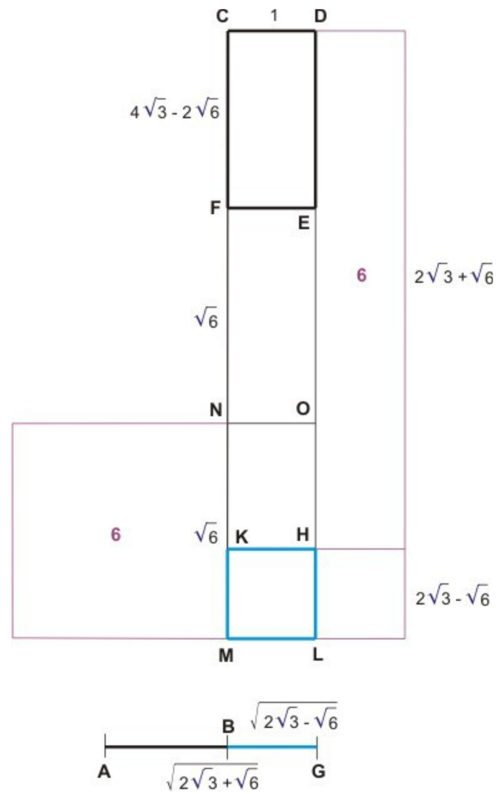
Wird auf CD das dem Quadrat über AG gleiche Rechteck CH mit der Seite CK und daran das dem Quadrat über BG gleiche Rechteck KL mit der Seite KM errichtet, ist das ganze Rechteck CL gleich der Summe der Quadrate über AG, GB. Da CL quadriert rational und an der rationalen CD mit der Seite CM errichtet ist, ist CM quadriert rational und zu CD der Länge nach inkommensurabel. Die Summe der Quadrate über AG, GB ist gleich CL, das Quadrat über AB ist gleich CE, womit das verbleibende FL gleich dem doppelten Rechteck aus AG mit GB ist [wie II.7.].

Da das doppelte Rechteck aus AG mit GB quadriert rational ist, ist FL quadriert rational.
FL ist an der rationalen FE mit der Seite FM errichtet, damit ist FM quadriert rational und zu CD der Länge nach inkommensurabel.

Die Summe der Quadrate über AG, GB ist gleich CL und zum doppelten Rechteck aus AG mit GB, das gleich FL ist, inkommensurabel. Somit sind CL, FL inkommensurabel. Es verhält sich CL zu FL wie CM zu MF, womit CM, MF der Länge nach inkommensurabel sind, jedoch im Quadrat kommensurabel.

Also ist CF apotomisch und, sage ich, eine quadriert apotomische Strecke sechster Art.

Denn da FL gleich dem doppelten Rechteck aus AG mit GB ist, ist dann, nachdem FM in N in zwei gleiche Teile geteilt und von N die zu CD parallele NO gezogen ist, FO gleich NL und gleich dem Rechteck aus AG mit GB.



Da AG, GB im Quadrat inkommensurabel sind, sind die Quadrate über AG, GB inkommensurabel. Das Quadrat über AG ist gleich CH, das Quadrat über GB ist gleich KL, somit sind CH, KL inkommensurabel. CH verhält sich zu KL wie CK zu KM, womit CK, KM inkommensurabel sind.

Da sich das Rechteck aus AG mit GB zu den Quadraten über AG, GB verhält wie das mittlere Glied in fortlaufend gleicher Proportion, da CH gleich dem Quadrat über AG, da KL gleich dem Quadrat über GB und da NL gleich dem Rechteck aus AG mit GB ist, verhält sich NL zu CH, KL wie das mittlere Glied in fortlaufend gleicher Proportion. Es verhält sich damit CH zu NL wie NL zu KL.

Aus den gleichen Gründen wie vorher ist das Quadrat über CM um ein Quadrat, dessen Seite zu CM inkommensurabel ist, größer als das Quadrat über MF [wie X.19.]. Keine der Strecken CM, FM ist zur rationalen CD kommensurabel und rational.

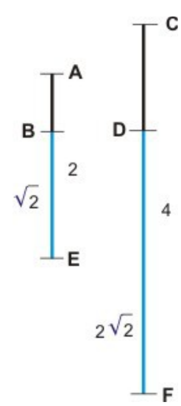
Deshalb ist CF eine quadriert apotomische Strecke sechster Art, was zu zeigen war.

Beispiel: $((r \cdot 2 \cdot 3^{1/2} + r \cdot 6^{1/2})^{1/2} - (r \cdot 2 \cdot 3^{1/2} - r \cdot 6^{1/2})^{1/2})^2 = r \cdot (4 \cdot 3^{1/2} - 2 \cdot 6^{1/2})$,
(im graphischen Beispiel ist $r = 1$).

X.104. [X.103]

Eine Strecke, die zu einer apotomischen Strecke der Länge nach kommensurabel ist, ist eine quadriert apotomische Strecke gleicher Art.

Wenn AB eine apotomische Strecke ist, zu der CD kommensurabel ist, dann, sage ich, ist CD eine quadriert apotomische Strecke gleicher Art wie AB.



Denn wenn AB eine apotomische Strecke ist, die von BE ergänzt wird, sind AE, EB im Quadrat kommensurabel [wie X.74.].

Verhält sich BE zu DF wie AB zu CD, dann verhält sich AE zu CF wie AB zu CD, denn wenn mehrere Größen in Proportion stehen, dann verhalten sich die Vorderglieder zusammen zu den Hintergliedern zusammen wie eines der Vorderglieder zum Hinterglied [wie V.12.].

Da AB, CD der Länge nach kommensurabel sind, ist AE zu CF und ist BE zu DF kommensurabel [wie X.10.]. AE, EB sind im Quadrat kommensurabel, somit sind CF, FD im Quadrat kommensurabel [wie X.14.].

Da sich AE zu CF verhält wie BE zu DF, verhält sich nach Umordnung AE zu EB wie CF zu FD [wie V.16.].

Das Quadrat über AE ist um ein Quadrat, dessen Seite zu AE entweder kommensurabel oder inkommensurabel ist, größer als das Quadrat über EB.

Ist das Quadrat über AE um ein Quadrat, dessen Seite zu AE kommensurabel ist, größer als das Quadrat über EB, dann ist das Quadrat über CF um ein Quadrat, dessen Seite zu CF kommensurabel ist, größer als das Quadrat über FD [wie X.15.].
Ist dabei AE rational, dann auch CF und ist BE rational, dann auch DF, wenn aber keine von AE, EB, dann auch keine von CF, FD.

Ist das Quadrat über AE um ein Quadrat, dessen Seite zu AE inkommensurabel ist, größer als das Quadrat über EB, dann ist das Quadrat über CF um ein Quadrat, dessen Seite zu CF inkommensurabel ist, größer als das Quadrat über FD [wie X.15.].
Ist dabei AE rational, dann auch CF und ist BE rational, dann auch DF, wenn aber keine von AE, EB, dann auch keine von CF, FD.

Deshalb ist CD eine quadriert apotomische Strecke gleicher Art wie AB, was zu zeigen war.

Beispiel: $2 - 2^{½} = ((1 + ½ \cdot 2^{½})^{½} - (1 - ½ \cdot 2^{½})^{½})^2$

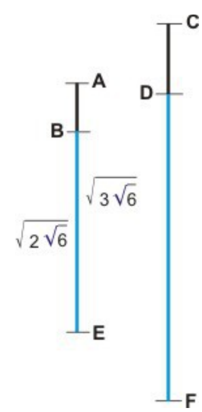
ist eine quadriert apotomische Größe vierter Art; ebenso $r \cdot (2 - 2^{½})$, wobei r rational.

X.105. [X.104]

Eine Strecke, die entweder zu einer apotomisch primär oder zu einer apotomisch sekundär irrationalen Strecke kommensurabel ist, ist ebenfalls entweder apotomisch primär oder apotomisch sekundär irrational.

Wenn AB entweder eine apotomisch primär oder eine sekundär irrationale Strecke ist, zu der CD kommensurabel ist, dann, sage ich, ist CD ebenfalls entweder apotomisch primär oder sekundär irrational.

Denn wenn AB eine apotomisch primär oder sekundär irrationale Strecke und durch EB ergänzt wird, dann sind AE, EB biquadriert rational und im Quadrat kommensurabel [wie X.75, X.76.].
Verhält sich AB zu CD wie BE zu DF, dann ist AE zu CF und ist BE zu DF kommensurabel.
Da AE, EB biquadriert rational und im Quadrat kommensurabel sind, sind CF, FD biquadriert rational und im Quadrat kommensurabel.



Damit ist CD eine apotomische Strecke und, sage ich, ebenfalls entweder apotomisch primär oder sekundär irrational.

Da sich AE zu EB verhält wie CF zu FD, verhält sich das Quadrat über AE zum Rechteck aus AE mit EB wie das Quadrat über CF zum Rechteck aus CF mit FD. Da die Quadrate über AE, CF kommensurabel sind, ist das Rechteck aus AE mit EB kommensurabel zum Rechteck aus CF mit FD.

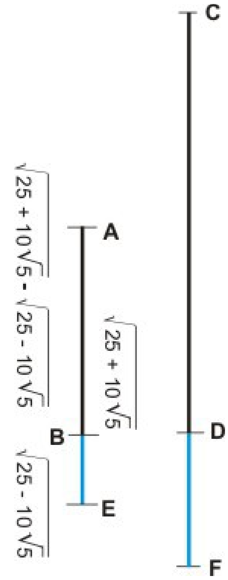
Wenn das Rechteck aus AE mit EB rational ist, dann auch das Rechteck aus CF mit FD, wenn das Rechteck aus AE mit EB quadriert rational ist, dann auch das Rechteck aus CF mit FD.

Deshalb ist CD wie AB apotomisch primär oder sekundär irrational, was zu zeigen war.

X.106. [X.105]

Eine Strecke, die zu einer konjugiert apotomischen Strecke kommensurabel ist, ist konjugiert apotomisch.

Wenn AB eine konjugiert apotomische Strecke ist, zu der CD kommensurabel ist, dann, sage ich, ist CD konjugiert apotomisch.



Denn sind AB, CD so gegeben, dann sind AE, EB im Quadrat inkommensurabel [wie X.77.]. Damit sind auch CF, FD im Quadrat inkommensurabel.Da sich AE zu EB verhält wie CF zu FD, verhält sich das Quadrat über AE zum Quadrat über EB wie das Quadrat über CF zum Quadrat über FD [wie VI.22.] und verhält sich in den vergrößerten Verhältnissen [wie V.18.] die Summe der Quadrate über AE, EB zum Quadrat über EB wie die Summe der Quadrate über CF, FD zum Quadrat über FD.
Da die Quadrate über BE, DF kommensurabel sind, ist die Summe der Quadrate über AE, BE zur Summe der Quadrate über CF, FD kommensurabel. Die Summe der Quadrate über AE, BE ist rational, somit ist die Summe der Quadrate über CF, FD rational.

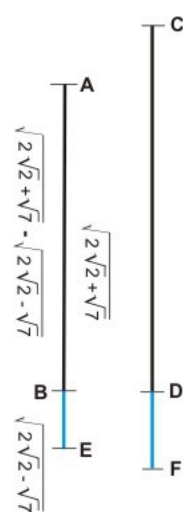
Da das Quadrat über AE sich zum Rechteck aus AE mit EB verhält wie das Quadrat über CF zum Rechteck aus CF mit FD und da die Quadrate über AE, CF kommensurabel sind, ist das Rechteck aus AE mit EB kommensurabel zum Rechteck aus CF mit FD.
Das Rechteck aus AE mit EB ist quadriert rational, somit ist das Rechteck aus CF mit FD quadriert rational. Damit sind CF, FD im Quadrat inkommensurabel, die Summe ihrer Quadrate ist rational und sie ergeben ein quadriert rationales Rechteck.

Deshalb ist CD konjugiert apotomisch, was zu zeigen war.

X.107. [X.106]

Eine Strecke, die zu einer konjugiert apotomisch primär irrationalen Strecke kommensurabel ist, ist konjugiert apotomisch primär irrational.

Wenn AB eine konjugiert apotomisch primär irrationale Strecke und CD zu ihr kommensurabel ist, dann, sage ich, ist auch CD eine konjugiert apotomisch primär irrationale Strecke.



Denn, ergänzt BE die Strecke AB, sind AE, EB im Quadrat inkommensurabel, ist die Summe ihrer Quadrate quadriert rational und das Rechteck, das sie ergeben, rational [wie X.78.]. Die Strecken sind wie vorher zu vergleichen. Es verhält sich CF zu FD wie AE zu EB, womit die Summe der Quadrate über AE, EB zur Summe der Quadrate über CF, FD kommensurabel und auch das Rechteck aus AE mit EB zum Rechteck aus CF mit FD kommensurabel ist.

Somit sind CF, FD im Quadrat inkommensurabel, die Summe ihrer Quadrate ist quadriert rational und das Rechteck, das sie ergeben, ist rational.

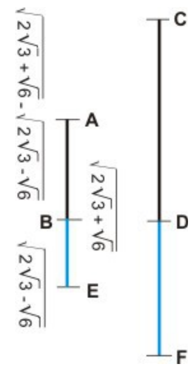
Deshalb ist CD eine konjugiert apotomisch primär irrationale Strecke, was zu zeigen war.

X.108. [X.107]

Eine Strecke, die zu einer konjugiert apotomisch sekundär irrationalen Strecke kommensurabel ist, ist konjugiert apotomisch sekundär irrational.

Wenn AB eine konjugiert apotomisch sekundär irrationale Strecke und CD zu ihr kommensurabel ist, dann, sage ich, ist auch CD eine konjugiert apotomisch sekundär irrationale Strecke.

Ist BE die Strecke, die AB ergänzt, dann sind, wie in den Vergleichen vorher, AE, EB im Quadrat inkommensurabel, ist die Summe ihrer Quadrate quadriert rational und ist das Rechteck, das sie ergeben, quadriert rational und zur Summe der Quadrate inkommensurabel [wie X.79.].



Es ist dann, wie vorher gezeigt, AE zu CF kommensurabel und BE, FD kommensurabel. Ebenso ist die Summe der Quadrate über AE, EB zur Summe der Quadrate über CF, FD kommensurabel und ist das Rechteck aus AE mit EB zum Rechteck aus CF mit FD kommensurabel.

Damit sind CF, FD im Quadrat inkommensurabel, die Summe ihrer Quadrate ist quadriert rational und sie ergeben ein quadriert rationales Rechteck, das zur Summe der Quadrate inkommensurabel ist.

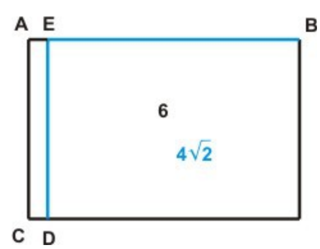
Deshalb ist CD eine konjugiert apotomisch sekundär irrationale Strecke, was zu zeigen war.

X.109. [X.108]

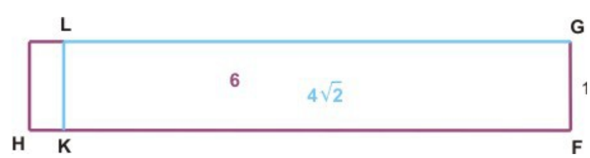
Wird von einem rationalen Rechteck ein quadriert rationales Rechteck weggenommen, ist das restliche Rechteck irrational und gleich dem Quadrat entweder über einer apotomischen oder über einer konjugiert apotomischen Strecke.

Wenn vom rationalen Rechteck BC das quadriert rationale BD weggenommen wird, dann, sage ich, ist das restliche Rechteck EC gleich dem Quadrat entweder über einer apotomischen [wie X.74.] oder über einer konjugiert apotomischen Strecke [wie X.77.].

Wird auf der rationalen Strecke FG das dem Rechteck BC gleiche Rechteck GH mit der Seite FH errichtet und von diesem das dem Rechteck DB gleiche Rechteck GK abgeteilt, ist das verbleibende Rechteck EC gleich LH.



Da BC rational, BD aber quadriert rational ist, da BC gleich GH und BD gleich GK ist, ist das an der rationalen FG errichtete Rechteck GH rational, jedoch GK quadriert rational.



Damit ist FH rational und zu FG der Länge nach kommensurabel, jedoch FK quadriert rational und zu FG der Länge nach inkommensurabel. Somit sind FH, FK der Länge nach inkommensurabel, jedoch im Quadrat kommensurabel.

Also ist KH eine apotomische Strecke, die durch KF ergänzt wird, wobei das Quadrat über HF um ein Quadrat, dessen Seite zu HF kommensurabel oder inkommensurabel ist, größer als das Quadrat über FK ist.

Ist diese Seite kommensurabel zu KH, dann ist, da HF zu FG der Länge nach kommensurabel und rational ist, KH eine quadriert apotomische Strecke erster Art. Da das von einer rationalen Strecke und einer quadriert apotomischen Strecke erster Art eingeschlossene Rechteck gleich dem Quadrat über einer apotomischen Strecke ist [wie X.92.], ist das Rechteck LH, das gleich EC ist, gleich dem Quadrat über einer apotomischen Strecke.

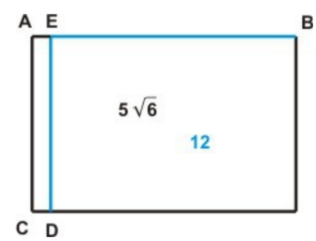
Ist das Quadrat über KH um ein Quadrat, dessen Seite zu HK inkommensurabel ist, größer als das Quadrat über FK, dann ist, da FH zu FG der Länge nach kommensurabel und rational ist, KH eine quadriert apotomische Strecke vierter Art. Da das von einer rationalen Strecke und einer quadriert apotomischen Strecke vierter Art eingeschlossene Rechteck gleich dem Quadrat über einer konjugiert apotomischen Strecke ist [wie X.95.], ist dann LH, das gleich EC ist, gleich dem Quadrat über einer konjugiert apotomischen Strecke. Was zu zeigen war.

Beispiele: $6 - 4 \cdot 2^{1/2} = (2 - 2^{1/2})^2$, $5 - 2 \cdot 6^{1/2} = (3^{1/2} - 2^{1/2})^2$;
$50 - 10 \cdot 5^{1/2} = ((25 + 10 \cdot 5^{1/2})^{1/2} - (25 - 10 \cdot 5^{1/2})^{1/2})^2$.

X.110. [X.109]

Wird von einem quadriert rationalen Rechteck ein rationales Rechteck weggenommen, dann ist das restliche Rechteck irrational und gleich dem Quadrat entweder über einer apotomisch primär irrationalen oder über einer konjugiert apotomisch primär irrationalen Strecke.

Wenn vom quadriert rationalen Rechteck BC das rationale Rechteck BD weggenommen wird, dann, sage ich, ist das restliche Rechteck EC gleich dem Quadrat entweder über einer apotomisch primär irrationalen [wie X.75.] oder über einer konjugiert apotomisch primär irrationalen Strecke [wie X.78.].



Es sind auf der rationalen Strecke FG die Rechtecke wie vorher zu errichten. Auf gleiche Weise ist dann zu zeigen, dass FH, da quadriert rational, zu FG der Länge nach inkommensurabel, KF jedoch rational und zu FG der Länge nach kommensurabel ist. FH, FK sind somit der Länge nach inkommensurabel, jedoch im Quadrat kommensurabel.

KH ist damit eine apotomische Strecke, die durch FK ergänzt wird, wobei das Quadrat über HF um ein Quadrat, dessen Seite zu HF kommensurabel oder inkommensurabel ist, größer als das Quadrat über FK ist.

Ist das Quadrat über HF um ein Quadrat, dessen Seite zu HF kommensurabel ist, größer als das Quadrat über FK, dann ist, da die ergänzende FK rational ist, KH eine quadriert apotomische Strecke zweiter Art. Also ist LH, das gleich EC ist, gleich dem Quadrat über einer apotomisch primär irrationalen Strecke [wie X.93.].

Ist das Quadrat über HF um ein Quadrat, dessen Seite zu HF inkommensurabel ist, größer als das Quadrat über FK, dann ist, da die ergänzende FK irrational ist, KH eine quadriert apotomische Strecke fünfter Art. Damit ist das Rechteck EC gleich dem Quadrat über einer konjugiert apotomisch primär irrationalen Strecke [wie X.96.]. Was zu zeigen war.

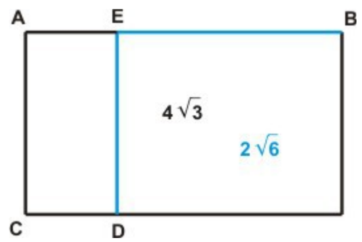
Beispiele: $5 \cdot 6^{1/2} - 12 = ((3 \cdot 6^{1/2})^{1/2} - (2 \cdot 6^{1/2})^{1/2})^2$;
$4 \cdot 2^{1/2} - 2 = ((2 \cdot 2^{1/2} + 7^{1/2})^{1/2} - (2 \cdot 2^{1/2} - 7^{1/2})^{1/2})^2$.

X.111. **[X.110]**

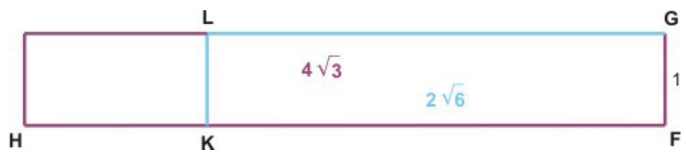
Wird von einem quadriert rationalen Rechteck ein dazu inkommensurables, quadriert rationales Rechteck weggenommen, dann ist das restliche Rechteck irrational und gleich dem Quadrat entweder über einer apotomisch sekundär irrationalen oder über einer konjugiert apotomisch sekundär irrationalen Strecke.

Wenn die Rechtecke wie vorher angelegt und vom quadriert rationalen BC das dazu inkommensurable, quadriert rationale Rechteck BD weggenommen wird, dann, sage ich, ist EC gleich dem Quadrat entweder über einer apotomisch sekundär irrationalen [wie X.76.] oder über einer konjugiert apotomisch sekundär irrationalen Strecke [wie X.79.].

Dann, da sowohl BC wie BD quadriert rational und inkommensurabel sind, sind beide zu FG der Länge nach inkommensurabel.
Da BC, BD, die GH, GK gleich sind, inkommensurabel sind, sind GH, GK inkommensurabel.
Somit sind FH, FK der Länge nach inkommensurabel, jedoch im Quadrat kommensurabel.
KH ist damit eine apotomische Strecke.



Ist das Quadrat über FH um ein Quadrat, dessen Seite zu FH kommensurabel ist, größer als das Quadrat über FK, dann ist, da weder FH noch FK rational ist, KH eine quadriert apotomische Strecke dritter Art.



Da KL rational ist und das von einer rationalen Strecke und einer quadriert apotomischen Strecke dritter Art eingeschlossene Rechteck gleich dem Quadrat über einer, so benannten, apotomisch sekundär irrationalen Strecke ist, ist LH, das gleich EC ist, gleich dem Quadrat über einer apotomisch sekundär irrationalen Strecke [wie X.94.].

Ist das Quadrat über FH um ein Quadrat, dessen Seite zu FH inkommensurabel ist, größer als das Quadrat über FK, dann ist, da weder FH noch FK rational ist, KH eine quadriert apotomische Strecke sechster Art.

Da KL rational ist und das von einer rationalen Strecke und einer quadriert apotomischen Strecke sechster Art eingeschlossene Rechteck gleich dem Quadrat über einer, so benannten, konjugiert apotomisch sekundär irrationalen Strecke ist, ist LH, das gleich EC ist, gleich dem Quadrat über einer konjugiert apotomisch sekundär irrationalen Strecke [wie X.97.].

Was zu zeigen war.

Beispiele: $24 \cdot 2^{1/2} - 4 \cdot 22^{1/2} = ((22 \cdot 2^{1/2})^{1/2} - (2 \cdot 2^{1/2})^{1/2})^2;$

$4 \cdot 3^{1/2} - 2 \cdot 6^{1/2} = ((2 \cdot 3^{1/2} + 6^{1/2})^{1/2} - (2 \cdot 3^{1/2} - 6^{1/2})^{1/2})^2.$

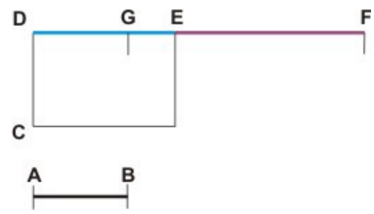
X.112. [X.111]

Eine apotomische Strecke ist keiner binomischen Strecke gleich.

Wenn AB eine apotomische Strecke ist, dann, sage ich, ist AB keiner binomischen Strecke gleich.

Denn wenn doch, werde an der rationalen Strecke DC das dem Quadrat über AB gleiche Rechteck CE mit der Seite DE errichtet. Da AB apotomisch ist, ist DE eine quadriert apotomische Strecke erster Art [X.98.].

Wird DE durch EF ergänzt, sind DF, FE im Quadrat kommensurabel, das Quadrat über DF ist um ein Quadrat, dessen Seite zu DF kommensurabel ist, größer als das Quadrat über FE, wobei DF rational ist.



Ist nun AB auch eine binomische Strecke, dann ist DE eine quadriert binomische Strecke erster Art [wie X.61.], die in G so zu teilen ist, dass DG, GE im Quadrat kommensurabel sind, wobei DG die größere Strecke ist.

Das Quadrat über DG ist dann um ein Quadrat, dessen Seite zu DG kommensurabel ist, größer als das Quadrat über GE, wobei DG der Länge nach zu DC kommensurabel und rational ist.

Damit ist dann DF zu DG der Länge nach kommensurabel und somit GF zu DF der Länge nach kommensurabel. DF, EF sind dann der Länge nach inkommensurabel, wobei FG, EF der Länge nach inkommensurabel, jedoch im Quadrat kommensurabel sind.
Damit ist dann EG eine apotomische Strecke, was nicht möglich ist, denn EG ist rational.

Deshalb ist eine apotomische Strecke keiner binomischen Strecke gleich, was zu zeigen war.

Corollar:

Keine der benannten apotomischen und irrationalen Strecken kann eine Strecke der anderen Benennungen sein.

Denn das dem Quadrat über einer biquadriert rationalen Strecke gleiche Rechteck rationaler Länge hat eine, zu ihr inkommensurable, quadriert rationale Breite [wie X.23.];

das dem Quadrat über einer apotomischen Strecke gleiche Rechteck rationaler Länge hat eine quadriert apotomische Breite erster Art [wie X.98.];

das dem Quadrat über einer apotomisch primär irrationalen Strecke gleiche Rechteck rationaler Länge hat eine quadriert apotomische Breite zweiter Art [wie X.99.];

das dem Quadrat über einer apotomisch sekundär irrationalen Strecke gleiche Rechteck rationaler Länge hat eine quadriert apotomische Breite dritter Art [wie X.100.];

das dem Quadrat über einer konjugiert apotomischen Strecke gleiche Rechteck rationaler Länge hat eine quadriert apotomische Breite vierter Art [wie X.101.];

das dem Quadrat über einer konjugiert apotomisch primär irrationalen Strecke gleiche Rechteck rationaler Länge hat eine quadriert apotomische Breite fünfter Art [wie X.102.];

das dem Quadrat über einer konjugiert apotomisch sekundär irrationalen Strecke gleiche Rechteck rationaler Länge hat eine quadriert apotomische Breite sechster Art [wie X.103.].

Da sich die aufgeführten quadriert apotomischen Breiten von einer quadriert rationalen Größe und unter sich der Art nach unterscheiden, kann offensichtlich keine der benannten apotomischen und irrationalen Strecken eine Strecke der anderen Benennungen sein.

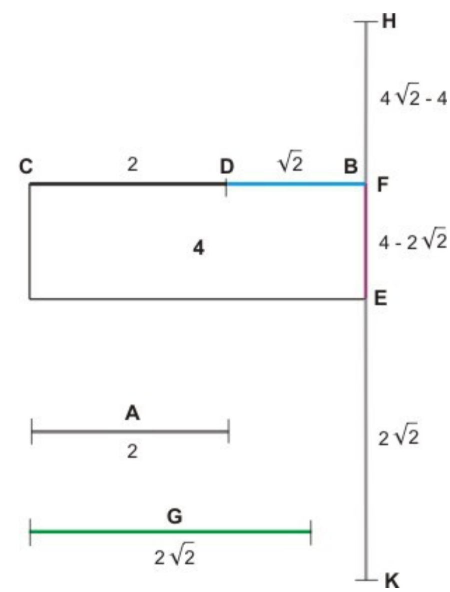
Wie gezeigt, ist eine apotomische Strecke keiner binomischen Strecke gleich [wie X.112.].
Die Quadrate der verschiedenen apotomischen Strecken sind Rechtecken aus rationalen Seiten mit den quadriert apotomischen Strecken der verschiedenen Arten gleich, wie die Quadrate der verschiedenen binomischen Strecken den Rechtecken aus rationalen Seiten mit den quadriert binomischen Strecken der verschiedenen Arten gleich sind, deshalb kann keine der unter den apotomischen und keine der unter den binomischen benannten irrationalen Strecken eine Strecke der anderen Benennungen sein.

X.113. [X.112]

Ist die eine Seite eines rationales Rechtecks eine binomische Strecke, dann ist die andere Seite eine apotomische Strecke, die als quadriert apotomische Strecke von der gleichen Art ist wie die andere als quadriert binomische Strecke, wobei ihre Teilstrecken zueinander kommensurabel sind und im gleichen Verhältnis stehen.

Wenn BC eine binomische Strecke, deren größere Teilstrecke DC [wie X.43.] und das Rechteck aus BC mit EF gleich dem rationalen Quadrat über A ist, dann, sage ich, ist EF eine apotomische Strecke [wie X.80.], wobei die Teilstrecke CD zu KF und die Teilstrecke DB zu EK kommensurabel sind und BC als quadriert binomische [wie X.67.] und EF als quadriert apotomische Strecken [wie X.104.] von gleicher Art sind.

Ist das Quadrat über A gleich dem Rechteck aus BD mit G, dann, da das Rechteck aus BC mit EF gleich dem Rechteck aus BD mit G ist, verhält sich CB zu BD wie G zu EF [wie VI.16.].



Da CB größer als BD ist, ist G größer als EF.

Ist G gleich EH, dann, da sich CB zu BD verhält wie HE zu EF, verhält sich im verkleinerten Verhältnis [wie V.17.] CD zu BD wie HF zu FE.

Verhält sich HF zu FE wie FK zu KE, dann verhält sich HK zu KF wie FK zu KE, denn wenn mehrere Größen in Proportion stehen, dann verhalten sich die Vorderglieder zusammen zu den Hintergliedern zusammen wie eines der Vorderglieder zum Hinterglied [wie V.12.]. Da sich somit FK zu KE verhält wie CD zu DB, verhält sich HK zu KF wie CD zu DB.

Da die Quadrate über CD, DB kommensurabel sind, sind auch die Quadrate über HK, KF kommensurabel. Da sich das Quadrat über HK zum Quadrat über KF verhält wie HK zu KE und da HK, KF, KE in fortlaufend gleicher Proportion stehen [wie V. Erklärung 9.], sind HK, KE der Länge nach kommensurabel [wie X.10.] und damit sind HE, EK der Länge nach kommensurabel.
Das Quadrat über A ist gleich dem Rechteck aus EH mit BD und ist rational, somit ist das Rechteck aus EH mit BD rational und, da auf der quadriert rationalen Strecke BD errichtet, ist EH quadriert rational und zu BD der Länge nach kommensurabel.

Somit ist auch EK, die zu EH kommensurabel ist, quadriert rational und zu BD der Länge nach kommensurabel.

Da sich CD zu DB verhält wie FK zu KE und CD, DB im Quadrat kommensurabel sind, sind FK, KE im Quadrat kommensurabel. KE ist quadriert rational, somit ist FK quadriert rational. Also ist EF eine apotomische Strecke [wie X.74.].

Das Quadrat über CD ist um ein Quadrat, dessen Seite zu CD entweder kommensurabel oder inkommensurabel ist, größer als das Quadrat über DB.

Ist das Quadrat über CD um ein Quadrat, dessen Seite zu CD kommensurabel ist, größer als das Quadrat über DB, dann ist auch das Quadrat über FK um ein Quadrat, dessen Seite zu FK kommensurabel ist, größer als das Quadrat über KE. Ist dann CD rational, dann auch FK, ist BD rational, dann auch KE, wenn aber keine der CD, BD, dann auch keine der FK, KE.

Ist das Quadrat über CD um ein Quadrat, dessen Seite zu CD inkommensurabel ist, größer als das Quadrat über DB, dann ist auch das Quadrat über FK um ein Quadrat, dessen Seite zu FK inkommensurabel ist, größer als das Quadrat über KE. Ist dann CD rational, dann auch FK, ist BD rational, dann auch KE, wenn aber keine der CD, BD, dann auch keine der FK, KE.

Also ist FE eine apotomische Strecke, deren Teilstrecken FK, KE zu den Teilstrecken CD, DB der binomischen Strecke BC kommensurabel sind und im gleichen Verhältnis stehen, wobei FE als quadriert apotomische Strecke von gleicher Art ist wie BC als quadriert binomische Strecke, was zu zeigen war.

X.114. [X.113]

Ist die eine Seite eines rationales Rechtecks eine apotomische Strecke, dann ist die andere Seite eine binomische Strecke, die als quadriert binomische Strecke von der gleichen Art ist wie die andere als quadriert apotomische Strecke, wobei ihre Teilstrecken zueinander kommensurabel sind und im gleichen Verhältnis stehen.

Wenn BD eine apotomische Strecke und das Rechteck aus BD mit KH gleich dem rationalen Quadrat über A ist, dann, sage ich, ist KH eine binomische Strecke deren Teilstrecken [wie X.43.] denen der BD [wie X.80.] kommensurabel sind und im gleichen Verhältnis stehen.

Denn wenn DC die apotomische Strecke BD ergänzt, dann sind BC, CD im Quadrat kommensurabel [wie X.74.].

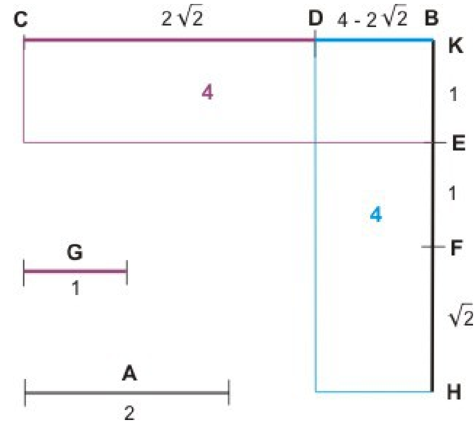
Ist das Quadrat über A gleich dem Rechteck aus BC mit G, dann, da A rational ist, ist das Rechteck aus BC mit G rational und ist auf der rationalen BC errichtet. Somit ist G rational und zu BC der Länge nach kommensurabel.

Da das Rechteck aus BC mit G gleich dem Rechteck aus BD mit KH ist, verhält sich CB zu BD wie KH zu G.
BC ist größer als BD und damit ist KH größer als G.

Ist KE gleich G, dann sind KE, BC der Länge nach kommensurabel.

Da sich CB zu BD verhält wie HK zu KE, verhält sich BC zu CD wie KH zu HE.
Verhält sich KH zu HE wie HF zu FE, dann verhält sich KF zu FH wie KH zu HE und wie BC zu CD. Da BC, CD im Quadrat kommensurabel sind, sind KF, FH im Quadrat kommensurabel.

Es verhält sich KH zu HE wie KF zu FH und es verhält sich KH zu HE wie HF zu FE, somit verhält sich KF zu FH wie HF zu FE.
Da sich in fortlaufend gleicher Proportion die erste Größe zur dritten verhält wie das Quadrat über der ersten zum Quadrat über der zweiten [wie VI.19. Zusatz], verhält sich KF zu FE wie das Quadrat über KF zum Quadrat über FH. Da die Quadrate über KF, FH kommensurabel sind, sind KF, FH im Quadrat kommensurabel.
KF, FE sind der Länge nach kommensurabel, somit sind KF, KE der Länge nach kommensurabel. KE ist rational und zu BC der Länge nach kommensurabel, damit ist KF rational und zu BC der Länge nach kommensurabel



Es verhält sich BC zu CD wie KF zu FH und, nach Umordnung, BC zu KF wie DC zu FH [wie V.16.]. Da BC, KF kommensurabel sind, sind FH, DC kommensurabel.
BC, CD sind quadriert rational und im Quadrat kommensurabel, womit KF, FH quadriert rational und im Quadrat kommensurabel sind.
Damit ist KH eine binomische Strecke [wie X.74.].

Ist das Quadrat über BC um ein Quadrat, dessen Seite zu BC kommensurabel ist, größer als das Quadrat über CD, dann ist auch das Quadrat über KF um ein Quadrat, dessen Seite zu KF kommensurabel ist, größer als das Quadrat über FH.
Ist dann BC rational, dann auch KF. Ist aber CD rational, dann auch FH.
Ist jedoch keine der BC, CD rational, dann auch keine der KF, FH.

Ist das Quadrat über BC um ein Quadrat, dessen Seite zu BC inkommensurabel ist, größer als das Quadrat über CD, dann ist auch das Quadrat über KF um ein Quadrat, dessen Seite zu KF inkommensurabel ist, größer als das Quadrat über FH.
Ist dann BC rational, dann auch KF. Ist aber CD rational, dann auch FH.
Ist jedoch keine der BC, CD rational, dann auch keine der KF, FH.

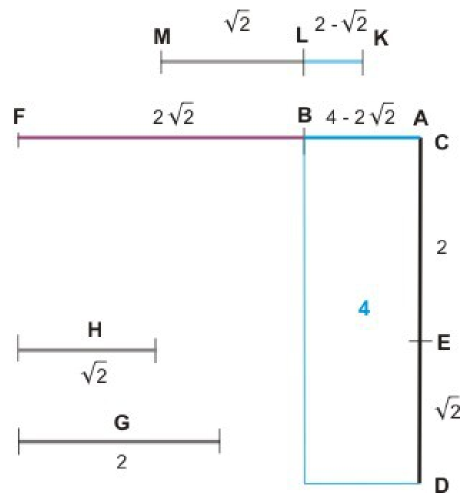
Ist die eine Seite eines rationales Rechtecks eine apotomische Strecke, dann ist deshalb die andere Seite eine binomische Strecke, die als quadriert binomische Strecke von der gleichen Art ist wie die andere als quadriert apotomische Strecke ist, wobei ihre Teilstrecken zueinander kommensurabel sind und im gleichen Verhältnis stehen, was zu zeigen war.

Beispiel: $(r \cdot 2 - r \cdot 2^{1/2}) \cdot (2 + 2^{1/2}) = r \cdot 2$, wobei im graphischen Beispiel $r = 2$.

X.115. **[X.114]**
Ein Rechteck aus einer apotomischen Strecke mit einer binomischen Strecke, deren eine Teilstrecken kommensurabel zu den Teilstrecken der anderen sind und in gleichen Verhältnissen stehen, ist rational.

Wenn von den Seiten des Rechtecks aus AB mit CD die Strecke AB apotomisch und die Strecke CD binomisch ist, wobei CE die größere Teilstrecke ist und die Teilstrecken CE, ED der binomischen zu den Strecken AF, FB der apotomischen Strecke kommensurabel sind und im gleichen Verhältnis stehen, dann, sage ich, ist das Rechteck aus AB mit CD rational.

Denn wenn auf der Strecke CD das dem rationalen Quadrat über H gleiche Rechteck errichtet wird, ist seine andere Seite KL eine apotomische Strecke.
Das Quadrat über G sei gleich dem Rechteck aus AB mit CD.
Die Teilstrecken KM, ML von KL [wie X.80.] sind dann zu CE, ED kommensurabel und stehen im gleichen Verhältnis.



Da CE, ED zu den Teilstrecken AF, FB kommensurabel sind und im gleichen Verhältnis stehen, verhält sich AF zu FB wie KM zu ML und, nach Umordnung [wie V.16.], AF zu KM wie BF zu LM und verhält sich AB zu KL wie AF zu KM [wie V.19.].
Da AF, KM kommensurabel sind, sind AB, KL kommensurabel.

Es verhält sich AB zu KL wie das Rechteck aus CD mit AB zum Rechteck aus CD mit KL.
Da das Rechteck aus CD mit AB zum Rechteck aus CD mit KL kommensurabel und da das Rechteck aus CD mit KL gleich dem Quadrat über H ist, ist das Rechteck aus CD mit KL zum Quadrat über H kommensurabel.
Das Rechteck aus CD mit AB ist gleich dem Quadrat über G, womit die Quadrate über G, H kommensurabel sind.
Damit ist das Rechteck aus CD mit AB, das gleich dem Quadrat über G ist, rational.

Deshalb ist ein Rechteck aus einer apotomischen Strecke mit einer binomischen Strecke, deren eine Teilstrecken kommensurabel zu den Teilstrecken der anderen sind und in gleichen Verhältnissen stehen, rational, was zu zeigen war.

Zusatz:

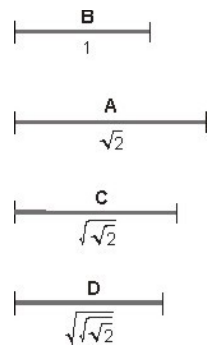
Nach dem, das ausgeführt wurde, kann offensichtlich ein Rechteck mit irrationalen Seiten rational sein.

X.116. [X.115]

Von einer quadriert rationalen Strecke ausgehend können unbegrenzt viele irrationale Strecken gebildet werden, die ihr und einander nicht gleichen.

Wenn A eine quadriert rationale Strecke ist, dann, sage ich, können von A ausgehend unbegrenzt viele irrationale Strecken gebildet werden, die ihr und einander nicht gleichen.

Denn wenn B eine rationale Strecke ist, die zu A nur im Quadrat kommensurabel ist, und das Rechteck aus B mit A gleich dem Quadrat über C ist, dann ist C irrational [wie X.22.] und inkommensurabel zu A, denn das Quadrat, das dem Rechteck aus einer rationalen mit einer irrationalen Strecke gleich ist, ist irrational und ein Rechteck, das diesem Quadrat gleich ist, kann aus der Seite dieses Quadrats mit einer rationalen Strecke nicht gebildet werden.



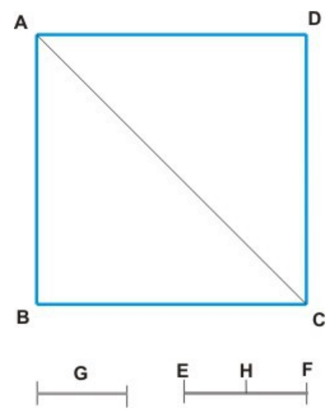
Ist dann das Rechteck aus B mit C gleich dem Quadrat über D, dann ist D irrational und keiner der vorausgehenden irrationalen Strecken gleich, denn ein Rechteck, das einem der genannten Quadrate gleich ist, kann aus D mit einer rationalen Strecke nicht gebildet werden.

Da diese Vorgehensweise offensichtlich unbegrenzt fortgesetzt werden kann, können unbegrenzt viele irrationale Strecken gebildet werden, die einander nicht gleichen, was zu zeigen war.

X.117. [Heiberg Appendix 27]

Die Diagonale eines Quadrats ist zur Seite der Länge nach inkommensurabel.

Im Quadrat ABCD mit der Diagonalen AC, sage ich, ist AC der Länge nach inkommensurabel zur Seite AB.



Denn wenn nicht und sie kommensurabel sind, dann ist, da sich kommensurable Größen verhalten wie Zahlen [wie X.5.], das doppelte Quadrat über AB, das gleich dem Quadrat über AC ist [wie I.47.], kommensurabel zum Quadrat über AB. Es ist dann auch AC kommensurabel zu AB und sie stehen in einem Verhältnis wie Zahlen [wie X.9.].

Wenn die Zahlen EF, G im gleichen Verhältnis wie AC, AB stehen und die kleinsten der Zahlen sind, die in diesem Verhältnis stehen, dann sind sie teilerfremd [wie VII.24.].

Da das Quadrat über AC gleich dem doppelten Quadrat über AB ist, ist die Quadratzahl aus EF gleich der doppelten Quadratzahl aus G. Die Quadratzahl aus EF ist dann gerade. Also ist dann auch EF gerade und kann in H in zwei gleiche Teile geteilt werden. Damit ist die doppelte Quadratzahl aus G gleich der vierfachen Quadratzahl aus EH. Da somit die Quadratzahl aus G gleich der doppelten Quadratzahl aus EH ist, ist dann auch G gerade, was nicht möglich ist, denn EF, G sind teilerfremd. Also sind AB, AC, da sie nicht im Verhältnis wie Zahlen stehen, inkommensurabel.

Deshalb ist im Quadrat die Diagonale zur Seite der Länge nach inkommensurabel, was zu zeigen war.