Euklid Stoicheia. Buch XI.

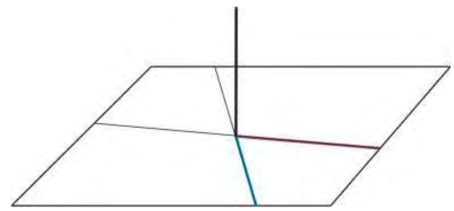
Über eingefügte Hypertextverknüpfungen kann der griechische Text in der Fassung von I. L. Heiberg aufgerufen werden.

Erklärungen.

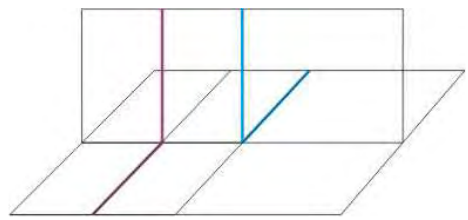
1. Ein Körper hat Länge, Breite und Höhe.

2. An den Grenzen eines Körpers liegen Flächen.

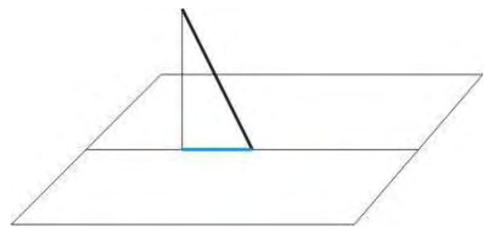
3. Eine zu einer ebenen Fläche senkrecht stehende Gerade bildet mit allen Geraden der Ebene durch ihren Schnittpunkt rechte Winkel.



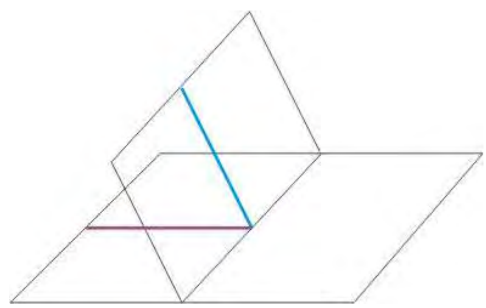
4. Eine zu einer Ebene senkrecht stehende Ebene bildet mit alle Senkrechten zur Schnittgeraden in der einen Ebene mit denen in der anderen Ebene durch den gleichen Schnittpunkt rechte Winkel.



5. Der Winkel einer Geraden mit einer Ebene ist der, den sie mit der Geraden von ihrem Schnittpunkt mit der Ebene zum Schnittpunkt der Senkrechten bildet, die von einem Punkt der Geraden auf der Ebene zu errichten ist.



6. Der Winkel einer Ebene mit einer Ebene ist der, den die Senkrechten auf der Schnittgeraden in der einen Ebene mit denen in der anderen Ebene bilden, die im gleichen Schnittpunkt errichtet sind.



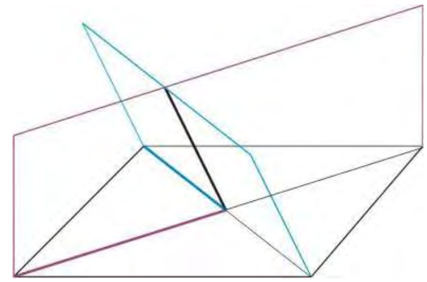
7. Sind zwei Ebenen gleich zu einer Ebene geneigt, dann sind ihre Neigungswinkel zu ihr gleich.

8. Parallele Gerade einer Ebene treffen sich nicht.

9. Ein Körper ist einem anderen ähnlich, wenn er von gleich vielen ähnlichen Flächen begrenzt wird.

10. Ein Körper ist einem anderen ähnlich und gleich, wenn er von ähnlichen Flächen begrenzt wird, die dem des anderen nach Größe und Anzahl gleich sind.

11. Ein Raumwinkel wird von mehr als zwei sich in einem Punkt schneidenden Linien gebildet, die nicht alle in der gleichen Ebene liegen und die an einem Punkt ebene Winkel bilden, die nicht in den gleichen Ebenen liegen.



12. Eine Pyramide wird von ebenen Flächen zwischen den Begrenzungen einer Fläche und einem Punkt begrenzt.

13. Ein Prisma wird von zwei gegenüberliegenden ähnlichen und gleichen Dreiecken und drei Parallelogrammen begrenzt.

14. Eine Kugel wird von einem Halbkreises erzeugt, der um seinen festgehaltenen Durchmesser einmal bis zur Ausgangslage gedreht wird,

15. sein Durchmesser ist die Achse der Kugel,

16. und der Mittelpunkt des Halbkreises ist auch der Mittelpunkt der Kugel.

17. Der Durchmesser einer Kugel ist eine Strecke durch ihren Mittelpunkt, die durch die Schnittpunkte mit der Oberfläche der Kugel begrenzt wird.

18. Ein Kegel wird von einem rechtwinkligen Dreieck erzeugt, das um eine, der den rechten Winkel bildenden, festgehaltene Seite einmal bis zur Ausgangslage gedreht wird.

Ist die festgehaltene Seite gleich der anderen, mit der sie den rechten Winkel bildet, dann ist der Kegel rechtwinklig, ist sie kleiner, dann ist der Kegel stumpfwinklig, ist sie größer, dann ist der Kegel spitzwinklig.

19. Die Achse des Kegels ist die bei der Drehung festgehaltene Seite des Dreiecks;

20. seine Grundfläche ist der Kreis, der von der herumgedrehten Seite erzeugt wird.

21. Ein Zylinder wird von einem Rechteck erzeugt, das um eine festgehaltene Seite bis zur Ausgangslage gedreht wird;

22. seine Achse ist die bei der Drehung festgehaltene Seite,

23. seine Grundflächen sind die Kreise, die von den beiden, an der festgehaltenen Seite liegenden, herumgedrehten Seiten erzeugt werden.

24. Kegel und Zylinder sind ähnlich, wenn ihre Achsen und die Durchmesser ihrer Grundseiten in Proportion stehen.

25. Ein Würfel wird von sechs gleichen Quadraten begrenzt.

26. Ein Tetraeder wird von vier gleichen gleichseitigen Dreiecken begrenzt.

27. Ein Oktaeder wird von acht gleichen gleichseitigen Dreiecken begrenzt.

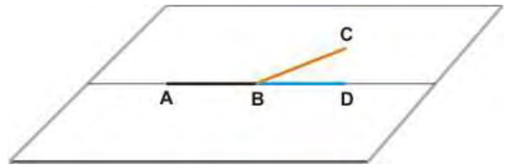
28. Ein Ikosaeder wird von zwanzig gleichen gleichseitigen Dreiecken begrenzt.

29. Ein Dodekaeder wird von zwölf gleichen, gleichseitigen und gleichwinkligen Fünfecken begrenzt.

[XI.1.]

Eine Gerade liegt in einer Ebene und nicht zum Teil nicht in ihr.

Denn wenn doch, liege der Teil AB der Geraden ABC in einer Ebene und der Teil BC nicht in ihr.



Wird AB um BD verlängert, dann gibt es zwei Gerade ABC, ABD, die den Teil AB gemeinsam haben, was nicht möglich ist, denn unterschiedliche Gerade können sich nicht in mehr als einem Punkt treffen.

Deshalb liegt eine Gerade in einer Ebene und nicht zum Teil nicht in ihr, was zu zeigen war.

[XI.2.]

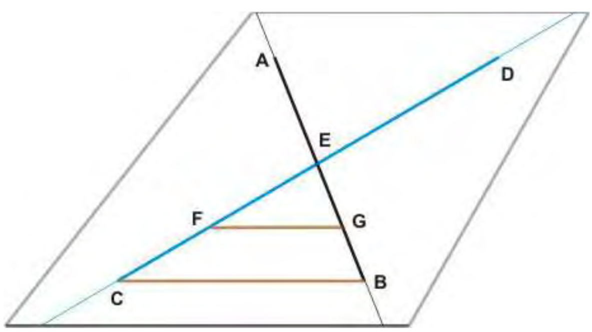
Zwei Gerade, deren eine die andere schneidet, liegen in einer Ebene und es liegen alle Dreiecke jeweils in einer Ebene.

Wenn sich zwei Gerade AB, CD im Punkt E schneiden, dann, sage ich, liegen AB, CD in ein und derselben Ebene und es liegen alle Dreiecke jeweils in einer Ebene.

Es ist CB und vom Punkt F auf EC zum Punkt G auf EB die Strecke FG zu ziehen.

Ich sage, das ganze Dreieck ECB liegt in ein und derselben Ebene.

Denn wenn vom Dreieck ECB das Dreieck EFG in der Ebene liegt, das übrigen FCBG aber nicht in ihr, oder umgekehrt, dann liegen auch Teile der Geraden EC, EB nicht in der Ebene und die übrigen in ihr, was nicht möglich ist [wie XI.1.].
Also liegt das Dreieck ECB in derselben Ebene, in der auch EC, EB und damit auch AB, CD liegen.



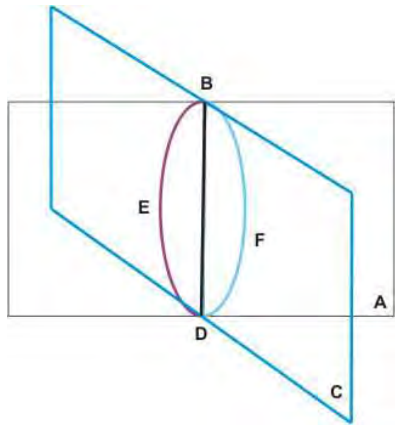
Deshalb liegen die Geraden AB, CD in einer Ebene und liegen alle Dreiecke jeweils in einer Ebene, was zu zeigen war.

XI.3.

Zwei Ebenen, deren eine die andere schneidet, schneiden sich in einer Geraden, die beiden gemeinsam ist.

Wenn sich die Ebenen AB, BC entlang der Linie DB schneiden, dann, sage ich, ist DB eine Gerade.

Denn wenn nicht, sei durch D und B in der Ebene AB die Gerade DEB und in der Ebene BC die Gerade DFB gezogen.



Da die beiden geraden Strecken DEB, DFB durch dieselben Punkte begrenzt werden, schließen sie dann eine Fläche ein, was nicht möglich ist.
Also sind DEB, DFB keine geraden Strecken.
Ebenso ist zu zeigen, dass von durch D und B gezogenen Linien keine andere als DB gerade ist, wobei sich die Ebenen AB, BC in DB schneiden.

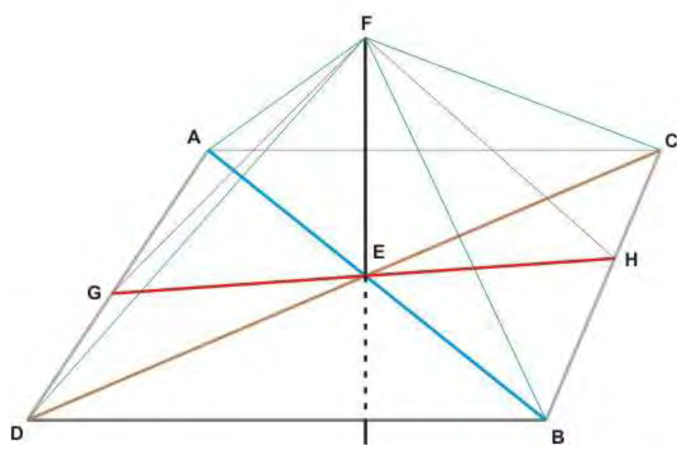
Deshalb schneiden sich zwei Ebenen in einer Geraden, die beiden gemeinsam ist, was zu zeigen war.

XI.4.

Bildet eine Gerade mit zwei Geraden in ihrem Schnittpunkt rechte Winkel, dann steht sie senkrecht zur Ebene, in der die Geraden liegen.

Wenn die Gerade EF senkrecht zu den Geraden AB, CD in ihren Schnittpunkt E ist, dann, sage ich, steht EF senkrecht zur Ebene, in der AB, CD liegen.

Es seien gleiche Strecken AE, EB, CE, ED abgetragen.
Es ist durch E eine Gerade GEH, die in der Ebene der AB, CD liegt, zu legen.
Es sind dann die Strecken AD, CB, die GEH in G und H schneiden, und die Strecken FA, FG, FD, FC, FH, FB zu ziehen.



Da die beiden Strecken AE, ED den Strecken CE, EB gleich sind und den gleichen Winkel bilden, sind die Grundseiten AD, CB und die Dreiecke AED, CEB gleich und damit auch die Winkel DAE und EBC.

Es sind die Winkel AEG und BEH gleich und da somit in den beiden Dreiecken AGE, BEH zwei Winkel und eine Seite gleich sind, denn AE ist gleich EB, sind auch alle übrigen Seiten jeweils gleich.

Damit ist GE gleich EH und ist AG gleich BH.
Da AE gleich EB ist und EF senkrecht dazu, ist FA gleich FB.

Aus den gleichen Gründen ist FC gleich FD.

Es ist AD gleich CB und ist FA gleich FB, womit die beiden Strecken FA, AD den beiden Strecken FB, BC gleich sind.

Wie gezeigt, ist FD gleich FC und somit sind auch die Winkel FAD, FBC gleich.
Da auch, wie gezeigt, AG gleich BH und FA gleich FB ist, wobei die beiden Strecken FA, AG den beiden Strecken FB, BH gleich sind, sind die Winkel FAG, FBH gleich.
Damit ist FG gleich FH.

Wie gezeigt, ist EG gleich EH, womit, wegen der gemeinsamen FE, die beiden Strecken GE, EF den beiden Strecken HE, EF gleich sind und, da FG gleich FH ist, ist der Winkel GEF gleich dem Winkel HEF.
Also sind die Winkel GEF, HEF rechte Winkel. Damit ist FE im Punkt E senkrecht zu GH.

Auf gleiche Weise ist zu zeigen, dass FE zu jeder Geraden, die FE in E schneidet und in der Ebene der AB, CD liegt, senkrecht ist; auch zu dieser Ebene ist FE senkrecht, denn eine Senkrechte zu einer Ebene bildet mit allen durch ihren Schnittpunkt gezogenen Geraden der Ebene rechte Winkel [wie XI. 3. Erklärung].

Deshalb steht eine Gerade, die mit zwei Geraden in ihrem Schnittpunkt rechte Winkel bildet, senkrecht zur Ebene, in der die Geraden liegen, was zu zeigen war.

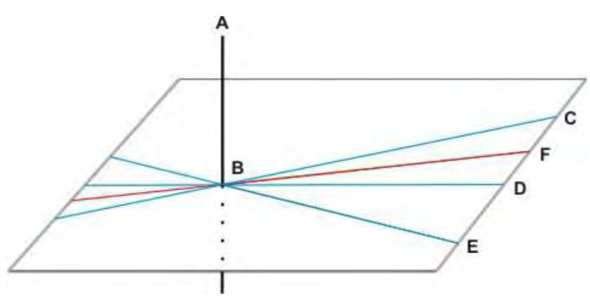
XI.5.

Drei Gerade, in deren gemeinsamen Schnittpunkt eine Senkrechte errichtet ist, liegen in derselben Ebene.

Wenn im Schnittpunkt B der drei Geraden BC, BD, BE die Senkrechte AB errichtet ist, dann, sage ich, liegen BC, BD, BE in derselben Ebene.

Denn wenn nicht, so liege BC nicht in der Ebene der BD, BE.
Die Ebene der AB, BC schneide dann die Ebene der BD, BE in der Geraden BF.
Damit liegen die drei Geraden AB, BC, BF in der Ebene der AB, BC.

Da AB zu BD, BE senkrecht ist, ist AB auch senkrecht zur Ebene der BD, BE.
Die senkrechte AB bildet mit allen Geraden dieser Ebene rechte Winkel und damit auch mit BF. Der Winkel ABF ist dann ein rechter Winkel.



Da auch ABC ein rechter Winkel ist, ist dann ABF gleich ABC.
Es liegt damit BC in der Ebene der BD, BE, was aber dann nicht möglich ist.
Also liegt BC in keiner anderen Ebene als in der Ebene der BC, BD.

Deshalb liegen drei Gerade, in deren Schnittpunkt eine Senkrechte errichtet ist, in derselben Ebene, was zu zeigen war.

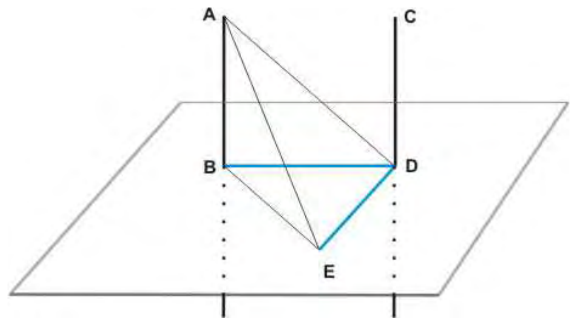
XI.6.

Zwei zur selben Ebene senkrechte Gerade sind parallel.

Wenn die Geraden AB, CD senkrecht zur selben Ebene sind, dann, sage ich, ist AB parallel zu CD.

Schneiden die Geraden die gegebene Ebene in den Punkten B, D, dann ist BD zu ziehen und die, in der Ebene liegende, zu BD senkrechte Strecke DE so zu errichten, dass DE gleich der mit dem Punkt A auf AB gegebenen Strecke AB ist. Es sind dann BE, AE, AD zu ziehen.

Da AB senkrecht zur gegebenen Ebene steht, bildet sie mit allen Geraden der Ebene durch ihren Schnittpunkt rechte Winkel.
BD, BE liegen in der Ebene und verlaufen durch den Schnittpunkt von AB mit der gegebenen Ebene, somit sind ABD, ABE rechte Winkel.
Aus den gleichen Gründen sind CDB, CDE rechte Winkel.



Die Strecken AB, DE sind gleich und schneiden BD, damit sind die beiden Strecken AB, BD gleich den beiden Strecken ED, DB.
Da sie jeweils einen gleichen rechten Winkel bilden ist AD gleich BE.
Die Strecken AB, DE und die Strecken AD, BE sind gleich und schneiden AE, womit die Winkel ABE und EDA gleich sind. Da ABE ein rechter Winkel ist, ist auch EDA ein rechter Winkel. Damit ist ED senkrecht zu DA, aber auch senkrecht zu BD, DC.

Da ED senkrecht zu den drei Geraden BD, DA, DC in ihrem Schnittpunkt D errichtet ist, liegen BD, DA, DC in einer Ebene [wie XI.5.].
In der Ebene der DB, DA liegt auch AB. Da alle Dreiecke in einer Ebene liegen, liegen AB, BD, DC in einer Ebene. Die Winkel ABD, BDC sind rechte Winkel, also ist AB parallel zu CD.

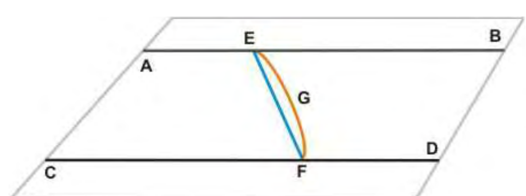
Deshalb sind zwei zur selben Ebene senkrechte Gerade parallel, was zu zeigen war.

XI.7.

Die Gerade durch zwei beliebige Punkte auf Parallelen liegt in der Ebene der Parallelen.

Wenn auf den parallelen Geraden AB, CD beliebige Punkte E, F liegen, dann, sage ich, liegt die Gerade durch E, F in der Ebene der Parallelen.

Denn wenn nun EGF nicht in der Ebene der Parallelen liegt, dann liegt EGF in einer Ebene, die die Ebene der Parallelen in EF schneidet.
Es schließen dann die beiden Geraden EGF und EF eine Fläche ein, was nicht möglich ist.
Also liegt die Gerade durch E, F in der Ebene der parallelen AB, CD.



Deshalb liegt die Gerade durch zwei beliebige Punkte auf Parallelen in der Ebene der Parallelen, was zu zeigen war.

XI.8.

Steht eine von zwei Parallelen senkrecht zu einer Ebene, dann steht auch die andere senkrecht zu derselben Ebene.

Wenn die Geraden AB, CD parallel sind und AB senkrecht zu einer Ebene steht, dann, sage ich, steht auch CD senkrecht zu derselben Ebene.

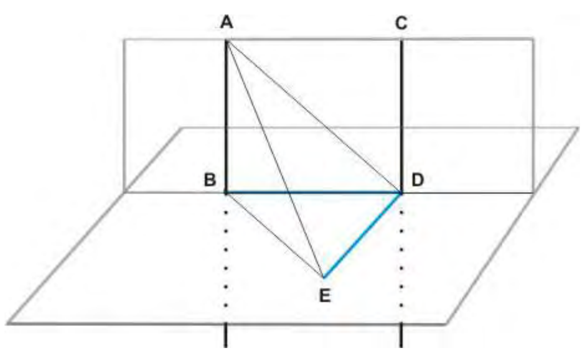
Denn wenn AB, CD die Ebene in den Punkten B, D schneiden und BD gezogen ist, dann liegen AB, CD, BD in einer Ebene.

Es ist dann die zu BD senkrechte, in der Ebene liegende, DE so zu errichten, dass DE gleich der mit dem Punkt A auf AB gegebenen Strecke AB ist. Es sind dann BE, AE, AD zu ziehen.

Da AB senkrecht auf der gegebenen Ebene steht, bildet sie mit allen Geraden der Ebene durch ihren Schnittpunkt rechte Winkel. Somit sind ABD, ABE rechte Winkel.

Die parallelen AB, CD schneiden BD, also sind die Winkel ABD, CDB zusammen gleich zwei rechten Winkeln. Da ABD ein rechter Winkel ist, ist auch CDB ein rechter Winkel, womit CD senkrecht auf BD steht.

Es sind die Strecken AB, DE gleich und liegen an der Strecke BD. Damit sind die beiden Strecken AB, BD den beiden Strecken ED, DB gleich. Da die Winkel ABD, EDB gleich sind, denn beide sind rechte Winkel, ist AD gleich BE.



Es ist nun AB gleich DE und ist BE gleich AD, womit die beiden Strecken AB, BE gleich den beiden Strecken ED, DA sind, wobei sie jeweils mit AE ein Dreieck bilden. Somit sind die Winkel ABE, EDA gleich. Da ABE ein rechter Winkel ist, ist auch EDA ein rechter Winkel, womit ED auf AD senkrecht steht.

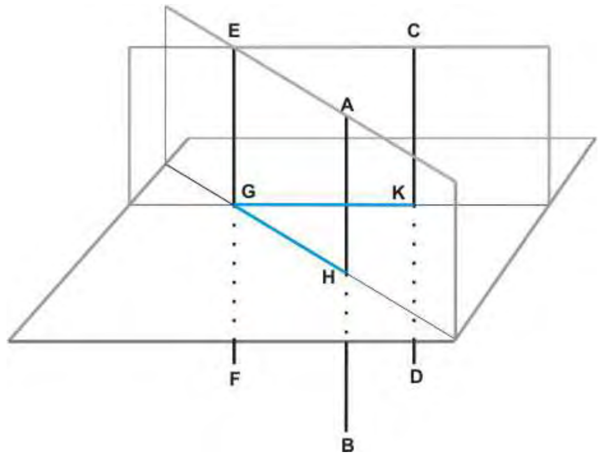
Da ED auch auf DB senkrecht steht, ist ED senkrecht zur Ebene der BD, DA und bildet mit allen Geraden dieser Ebene durch ihren Schnittpunkt rechte Winkel.
In der Ebene der BD, DA liegt auch CD, das somit senkrecht zu ED ist.
CD steht auch senkrecht auf BD und ist damit senkrecht im Schnittpunkt D der Geraden DE, DB errichtet, womit CD senkrecht zu der Ebene der DE, DB steht.
Also steht CD senkrecht zu der gegebenen Ebene.

Deshalb ist eine Gerade, deren Parallele senkrecht zu einer Ebene steht, ebenfalls senkrecht zu derselben Ebene, was zu zeigen war.

XI.9.

Gerade sind parallel, die einer anderen parallel sind, auch wenn sie nicht mit ihr in derselben Ebene liegen.

Wenn die Geraden AB, CD der EF parallel sind, jedoch nicht mit ihr in derselben Ebene liegen, dann, sage ich, sind AB, CD parallel.



Es ist auf EF in einem beliebigen Punkt G die in der Ebene der EF, AB liegende Senkrechte GH und die in der Ebene der EF, CD liegende Senkrechte GK zu errichten.

Da dann EF zu jeder der GH, GK senkrecht ist, steht EF zu der Ebene der GH, GK senkrecht.

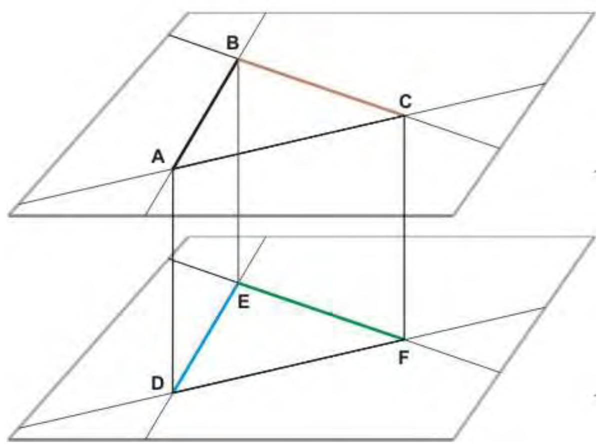
EF ist zu AB parallel, somit steht auch AB zu der Ebene der GH, GK senkrecht.
Aus den gleichen Gründen steht auch CD zu der Ebene der GH, GK senkrecht.
Damit steht jede der AB, CD zu der Ebene der GH, GK senkrecht.
Zwei zu derselben Ebene senkrecht stehende Gerade sind parallel [wie XI.6.].

Deshalb sind AB, CD parallel, was zu zeigen war.

XI.10.

Zwei sich schneidende Gerade, die schneidenden Geraden einer anderen Ebene parallel sind, bilden gleiche Winkel.

Wenn die sich schneidenden Geraden AB, BC den sich schneidenden Geraden DE, EF parallel sind, dann, sage ich, ist der Winkel ABC gleich dem Winkel DEF.



Es sind gleiche Strecken BA, BC, ED, EF abzutragen und es sind AD, CF, BE, AC, DF zu ziehen.

Da dann BA der Strecke ED gleich und parallel ist, ist auch AD der BE gleich und parallel [wie I.33.].
Aus den gleichen Gründen ist auch CF der BE gleich und parallel. Damit ist sowohl AD wie CF der Strecke BE gleich und parallel.
Da Gerade parallel sind, die einer anderen Geraden parallel sind, auch wenn sie nicht in der gleichen Ebene liegen, ist AD der Strecke CF gleich und parallel.

Auch die verbindenden Strecken der Endpunkte AC, DF sind damit gleich und parallel.
Da die beiden Strecken AB, BC den beiden Strecken DE, EF gleich sind und auch AC gleich DF ist, sind die Winkel ABC, DEF gleich [wie I.8.].

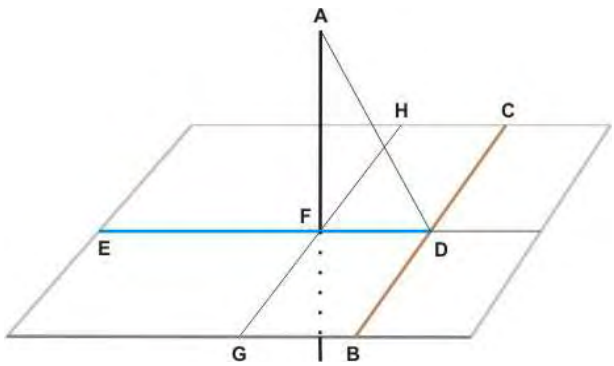
Deshalb bilden zwei sich schneidende Gerade, die schneidenden Geraden einer anderen Ebene parallel sind, gleiche Winkel, was zu zeigen war.

XI.11.

Auf einer Ebene die Senkrechte durch einen nicht in ihr liegenden Punkt errichten.

Es sei ein Punkt A und eine Ebene gegeben, in der der Punkt nicht liegt. Zur gegebenen Ebene soll die Senkrechte errichtet werden, die durch den Punkt A geht.

Es ist in der gegebenen Ebene eine beliebige Gerade BC zu ziehen und auf BC zum Punkt A die zu ihr Senkrechte AD zu errichten [wie I.12.].



Steht AD senkrecht auf der Ebene, ist das Aufgegebene ausgeführt.
Wenn nicht, ist vom Punkt D in der Ebene die zu BC senkrechte DE zu ziehen [wie I.11.], und die zu DE senkrechte AF durch den Punkt A zu errichten [wie I.12.].
Durch den Punkt F ist die zu BC parallele GH zu ziehen [wie I.31.].

Da BC sowohl zu DA wie DE senkrecht ist, steht BC senkrecht zur Ebene der DA, DE. Es ist GH parallel zu BC.

Steht eine von zwei Parallelen senkrecht auf einer Ebene, dann steht auch die andere senkrecht auf derselben Ebene [wie XI.8.]. Somit ist GH senkrecht zur Ebene der ED, DA.
Da eine Senkrechte mit allen Geraden der Ebene rechte Winkel bildet und GH senkrecht auf der Ebene ED, DA steht, in der auch AF liegt, ist GH senkrecht zu AF.

AF ist sowohl zu GH wie zu DE senkrecht.
Da die Senkrechte zu zwei Geraden in ihrem Schnittpunkt senkrecht zur Ebene ist, in der die Geraden liegen [wie XI.4.], steht AF senkrecht zur Ebene der ED, GH.
Die Ebene der ED, GH ist die gegebene Ebene und zu ihr steht AF senkrecht.

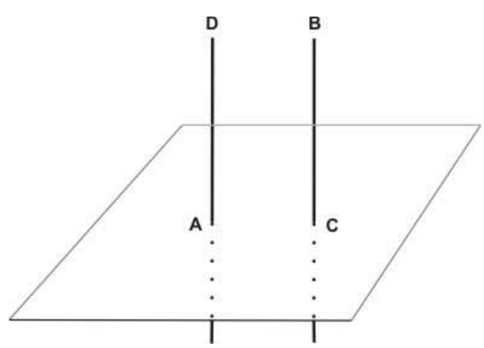
Damit ist zur gegebenen Ebene die Senkrechte AF durch den Punkt A errichtet, was auszuführen war.

XI.12.

An einem Punkt einer Ebene die Senkrechte errichten.

Es sei eine Ebene gegeben und ein Punkt A in ihr. Es soll in A die Senkrechte errichtet werden.

Es ist auf der Ebene durch einen beliebigen Punkt B, der nicht in ihr liegt, die Senkrechte BC zu errichten [wie XI.11.] und durch A die zu BC parallele AD zu ziehen.



Da AD, CB parallel sind und dann, wenn eine von zwei Parallelen senkrecht auf einer Ebene steht, auch die andere senkrecht auf derselben Ebene steht [wie XI.8.] und mit ihr rechte Winkel bildet, schließt AD mit der gegebenen Ebene rechte Winkel ein.

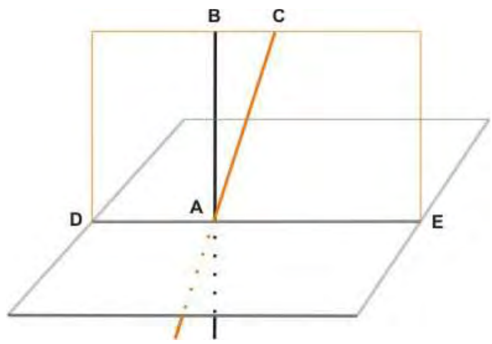
Damit ist auf der gegebenen Ebene im gegebenen Punkt A die Senkrechte AD errichtet, was auszuführen war.

XI.13.

Durch denselben Punkt einer Ebene können nicht zwei Senkrechte gezogen werden.

Wenn aber möglich, dann seien im Punkt A einer gegebenen Ebene die beiden Senkrechten AB, AC errichtet.

Die Geraden BA, AC liegen dann in einer Ebene, die die gegebene Ebene in einer Geraden DAE schneidet [wie XI.3.].
Somit liegen dann AB, AC, DAE in einer Ebene.



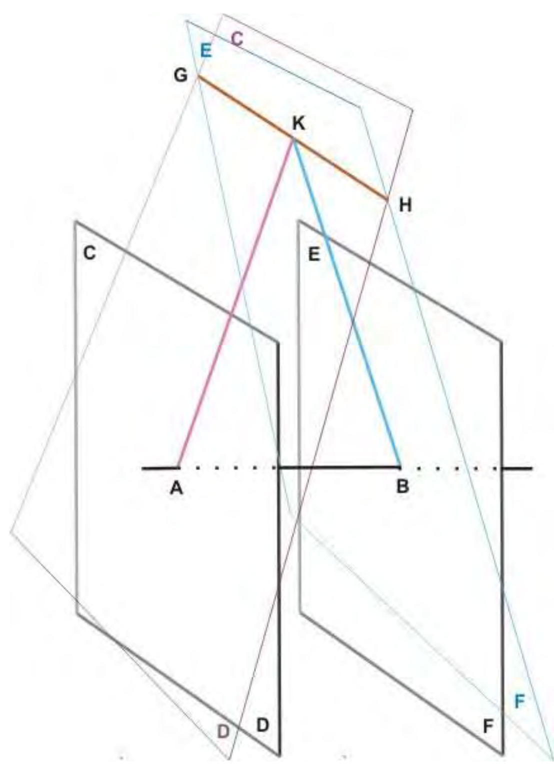
Da CA senkrecht auf der gegebenen Ebene steht, bildet CA mit allen Geraden dieser Ebene durch ihren Schnittpunkt rechte Winkel, damit auch mit DAE.
Damit ist dann CAE ein rechter Winkel.
Aus den gleichen Gründen ist auch BAE ein rechter Winkel.
Es sind dann die in derselben Ebene liegenden Winkel CAE, BAE gleich, was aber nicht möglich ist.

Deshalb können in einem Punkt einer Ebene keine zwei Senkrechte errichtet werden, was zu zeigen war.

XI.14.

Ebenen, zu denen dieselbe Gerade senkrecht steht, sind parallel.

Wenn die Gerade AB zu den Ebenen CD, EF senkrecht steht, dann, sage ich, sind diese Ebenen parallel.



Denn wenn nicht, werden sie sich, genügend verlängert, in einer Geraden schneiden.
Diese Gerade sei GH.
Von einem beliebigen Punkt K auf GH sind die Geraden AK, BK zu ziehen.

Da AB auf der Ebene EF senkrecht steht und die Gerade BK in der Ebene EF liegt, ist EF senkrecht zu AB.
Damit ist dann der Winkel ABK ein rechter Winkel.

Aus den gleichen Gründen ist dann auch BAK ein rechter Winkel.

Im Dreieck ABK sind dann die beiden Winkel ABK und BAK zusammen gleich zwei rechten Winkeln, was nicht möglich ist [wie I.17.].
Also werden sich die Ebenen CD, EF nicht schneiden und sind somit parallel.

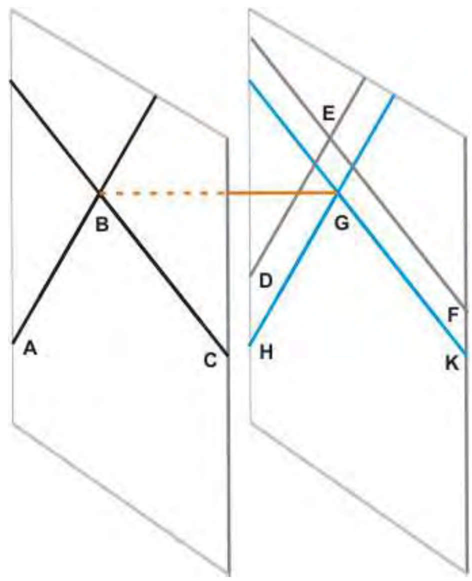
Deshalb sind Ebenen parallel, zu denen dieselbe Gerade senkrecht steht, was zu zeigen war.

XI.15.

Sind zwei sich schneidende Gerade einer Ebene den Geraden einer anderen Ebene parallel, dann sind die Ebenen parallel.

Wenn die Geraden AB, BC sich schneiden und den Geraden DE, EF, die in einer anderen Ebene liegen, parallel sind, dann, sage ich, ist die Ebene der AB, BC der Ebene der DE, EF parallel.

Es ist auf der Ebene der DE, EF die Senkrechte BG durch den Punkt B zu errichten und durch G die zu ED parallele GH und die zu EF parallele GK zu ziehen.



Da BG auf der Ebene der DE, EF senkrecht steht, bildet BG mit allen Geraden durch ihren Schnittpunkt in der Ebene der DE, EF rechte Winkel. Dieser Schnittpunkt liegt auf den Geraden GH, GK in der Ebene der DE, EF.
Somit sind BGH, BGK rechte Winkel.

Da BA der Geraden GH parallel ist, sind die Winkel GBA und BGH zusammen gleich zwei rechten Winkeln.
BGH ist ein rechter Winkel, also ist auch GBA ein rechter Winkel. Damit steht GB senkrecht auf BA.
Aus den gleichen Gründen steht GB senkrecht auf BC.

Da GB senkrecht zu BA, BC in ihrem Schnittpunkt errichtet ist, steht GB senkrecht auf der Ebene der BA, BC. Da Ebenen, auf denen dieselbe Gerade senkrecht steht, parallel sind, ist die Ebene der AB, BC der Ebene der DE, EF parallel.

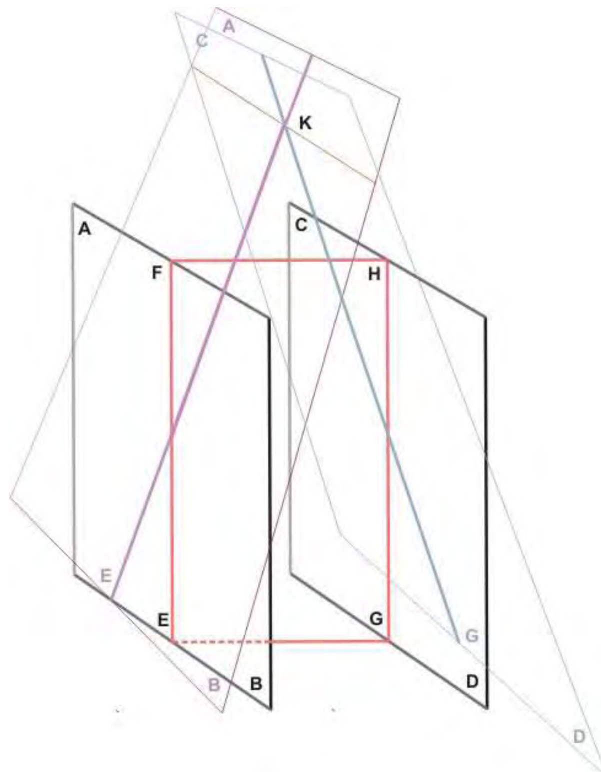
Deshalb sind dann, wenn zwei sich schneidende Gerade einer Ebene den Geraden einer anderen Ebene parallel sind, die Ebenen parallel, was zu zeigen war.

XI.16.

Die Schnittgeraden in parallelen Ebenen, die von einer Ebene geschnitten werden, sind parallel.

Wenn die parallelen Ebenen AB, CD von der Ebene EFGH in den Schnittgeraden EF, GH geschnitten werden, dann, sage ich, sind EF, GH parallel.

Denn wenn nicht, schneiden sich EF, GH bei genügender Verlängerung über die Punkte F, H hinaus im Punkt K.
Da dann EFK in der Ebene AB liegt, liegen alle Punkte der Geraden EFK in der Ebene AB, also auch der Punkt K.
Aus den gleichen Gründen liegt dann K auch in der Ebene CD.
Damit schneiden sich dann die Ebenen AB, CD bei genügender Verlängerung in einer Geraden, auf der K liegt, was nicht möglich ist, denn AB, CD sind parallel.



Also schneiden sich EF, GH, wie auch immer über F, H hinaus verlängert, nicht.

Auf gleiche Weise ist zu zeigen, dass sich EF, GH nicht schneiden, wenn sie über E, G hinaus, wie auch immer, verlängert werden.

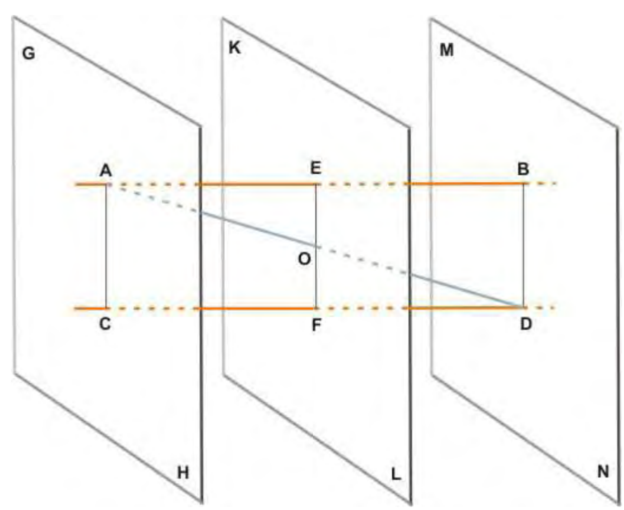
Da sich EF, GH in keinem Punkt schneiden, sind sie parallel.

Deshalb sind die Schnittgeraden parallel, wenn parallele Ebenen von einer Ebene geschnitten werden, was zu zeigen war.

XI.17.

Die Abschnitte der Geraden, die von parallelen Ebenen geschnitten werden, stehen im gleichen Verhältnis.

Wenn die Geraden AB, CD von den parallelen Ebenen GH, KL, MN in den Punkten A, E, B und C, F, D geschnitten werden, dann, sage ich, verhält sich AE zu EB wie CF zu FD.



Es sind AC, BD, AD und, da AD die Ebene KL im Punkt O schneidet, EO, OF zu ziehen.
Da die parallelen Ebenen KL, MN von der Ebene EBDO geschnitten werden, sind die Schnittgeraden EO, BD parallel.

Aus den gleichen Gründen sind, da die parallelen Ebenen GH, KL von der Ebene AOFC geschnitten werden, die Schnittgeraden AC, OF parallel.

Im Dreieck ABD ist die Seite BD parallel zu EO, somit verhält sich AE zu EB wie AO zu OD [wie VI.2.].
Im Dreieck ADC ist die Seite AC parallel zu OF, womit sich AO zu OD verhält wie CF zu FD.
Damit verhält sich AE zu EB wie CF zu FD.

Deshalb stehen die Abschnitte der Geraden, die von parallelen Ebenen geschnitten werden, im gleichen Verhältnis, was zu zeigen war.

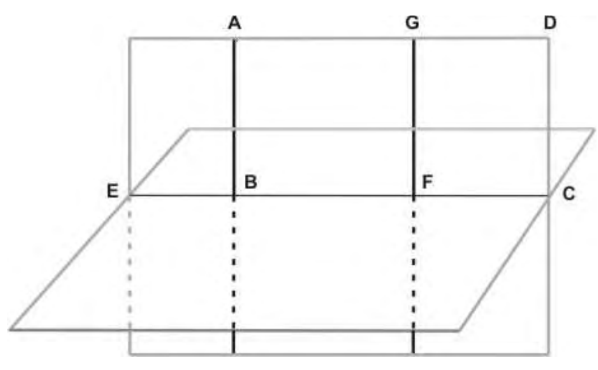
XI.18.

Die Ebenen, in denen eine Senkrechte zu einer Ebene liegt, stehen senkrecht zu dieser Ebene.

Wenn die Gerade AB senkrecht zu einer gegebenen Ebene steht, dann, sage ich, stehen alle Ebenen, in denen AB liegt, senkrecht zu dieser gegebenen Ebene.

Es liege AB in der Ebene DE, die die gegebene Ebene in der Geraden CE schneidet.
Es ist vom beliebigen Punkt F auf CE die Senkrechte FG zu errichten, die in DE liegt.

Da AB zur gegebenen Ebene senkrecht steht, steht AB senkrecht zu allen Geraden der gegebenen Ebene und damit senkrecht zu CE.
Damit ist der Winkel ABF ein rechter Winkel, ebenso ist der Winkel GFB ein rechter Winkel.
Also ist AB parallel zu FG.
Da AB senkrecht zur gegebenen Ebene steht, steht auch FG senkrecht zur gegebenen Ebene [wie XI.8.].



Eine zu einer Ebene senkrecht stehende Ebene bildet mit alle Senkrechten zur Schnittgeraden in der einen Ebene mit denen in der anderen Ebene durch den gleichen Schnittpunkt rechte Winkel, weshalb die Ebene DE, in der AB, FG liegen, mit allen Senkrechten zur Schnittgeraden CE in der gegebenen Ebene im jeweils gleichen Schnittpunkt rechte Winkel bildet.
Damit steht die Ebene DE senkrecht zur gegebenen Ebene.

Ebenso ist für jede andere Ebene, in der AB liegt, zu zeigen, dass sie senkrecht zur gegebenen Ebene steht.

Deshalb stehen die Ebenen, in denen eine Senkrechte zu einer Ebene liegt, senkrecht zu dieser Ebene, was zu zeigen war.

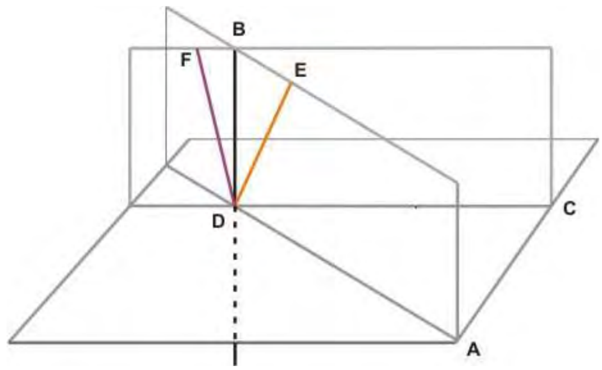
XI.19.

Die Schnittgerade von Ebenen, die senkrecht zu einer Ebene stehen, steht senkrecht zu dieser Ebene.

Wenn die beiden Ebenen AB, BC mit der Schnittgeraden BD zu einer gegebenen Ebene senkrecht stehen, dann, sage ich, ist BD senkrecht zur gegebenen Ebene.

Denn wenn nicht, ist vom Punkt D in der Ebene AB die zu AD senkrechte DE und von D in der Ebene BC die zu CD senkrechte DF zu errichten.

Da AB zur gegebenen Ebene senkrecht ist und auf deren Schnittgeraden AD in der Ebene AB die Senkrechte DE errichtet ist, steht dann DE senkrecht zur gegebenen Ebene.



Auf gleiche Weise ist zu zeigen, dass dann DF zur gegebenen Ebene senkrecht ist.
Damit sind dann im Punkt D auf der gegebenen Ebene zwei Senkrechte errichtet, was nicht möglich ist [wie XI.13.].

Also ist im Punkt D keine andere Senkrechte zu errichten als DB, die Schnittgerade der Ebenen AB, BC ist.

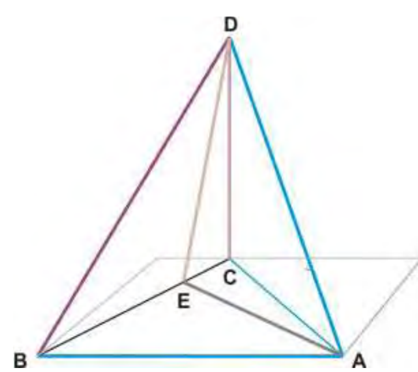
Deshalb steht die Schnittgerade von Ebenen, die senkrecht zu einer Ebene stehen, senkrecht zu dieser Ebene, was zu zeigen war.

XI.20.

Im Raumwinkel, der von drei ebenen Winkeln gebildet wird, sind je zwei Winkel zusammen größer als der dritte.

Wenn der Raumwinkel im Punkt A von den drei ebenen Winkeln BAC, CAD, DAB gebildet wird, dann, sage ich, sind je zwei der drei Winkel BAC, CAD, DAB zusammen größer als der dritte.

Denn wenn die drei Winkel BAC, CAD, DAB gleich sind, dann sind offensichtlich je zwei größer als der dritte.



Wenn aber nicht, dann sei BAC der größte.
Im Punkt A der Ebene der BA, AC ist dann der Winkel BAE, der gleich dem Winkel DAB ist, anzulegen, wobei AE gleich AD sei.
Durch den Punkt E ist dann BEC zu legen und es sind DB, DC zu ziehen. Da die gleichen DA, AE an AB liegen und mit ihr die gleichen Winkel DAB, BAE bilden, ist DB gleich BE [wie I.4.].

BD und DC zusammen sind größer als BC [wie I.20.] und da DB gleich BE ist, ist DC größer als EC.

Da die gleichen DA, AE an AC liegen und da DC größer als EC ist, ist der Winkel DAC größer als der Winkel EAC [wie I.25.].

Wie gezeigt, sind die Winkel DAB, BAE gleich und damit die Winkel DAB und DAC zusammen größer als BAC.

Auf gleiche Weise ist zu zeigen, dass von den übrigen Winkeln je zwei größer als der dritte sind.

Deshalb sind im Raumwinkel, der von drei ebenen Winkeln gebildet wird, je zwei Winkel zusammen größer als der dritte, was zu zeigen war.

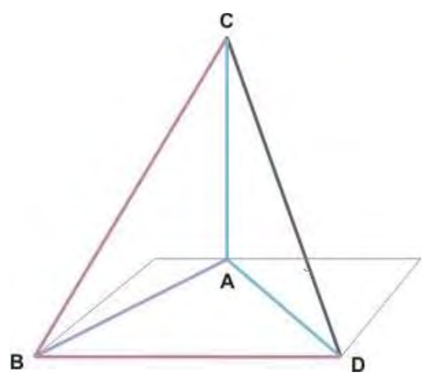
XI.21.

Die ebenen Winkel, die einen Raumwinkel bilden, sind zusammen kleiner als vier rechte Winkel.

Wenn der Raumwinkel im Punkt A von den ebenen Winkeln BAC, CAD, DAB gebildet wird, dann, sage ich, sind BAC, CAD, DAB zusammen kleiner als vier rechte Winkel.

Denn wenn auf den Geraden AB, AC, AD durch beliebige Punkte B, C, D die Geraden BC, CD, DB gezogen werden, sind von den ebenen Winkeln CBA, ABD, CBD, die den Raumwinkel im Punkt B bilden, je zwei zusammen größer als der dritte [wie XI.20.].
Somit sind die Winkel CBA, ABD zusammen größer als der Winkel CBD.

Aus den gleichen Gründen sind die Winkel BCA, ACD zusammen größer als der Winkel BCD und sind die Winkel CDA, ADB zusammen größer als der Winkel CDB.
Damit sind die Winkel CBA, ABD, BCA, ACD, CDA, ADB zusammen größer als die Winkel CBD, BCD, CDB zusammen.



Da die drei Winkel CBD, BDC, BCD zusammen gleich zwei rechten Winkeln sind, sind die sechs Winkel CBA, ABD, BCA, ACD, CDA, ADB zusammen größer als zwei rechte Winkel.

In jedem der Dreiecke ABC, ACD, ADB sind jeweils die drei Innenwinkel zusammen gleich zwei rechten Winkeln, also sind die neun Winkel CBA, ACB, BAC, ACD, CDA, CAD, ADB, DBA, BAD zusammen gleich sechs rechten Winkeln.
Davon sind die sechs Winkel CBA, DBA, ACB, ACD, CDA, ADB zusammen größer als zwei rechte Winkel, also sind die übrigen drei Winkel BAC, CAD, DAB, die den Raumwinkel im Punkt A bilden, zusammen kleiner als vier rechte Winkel.

Auf gleiche Weise ist zu zeigen, dass die ebenen Winkel, die den Raumwinkel bilden, zusammen kleiner als vier rechte Winkel sind, wenn der Raumwinkel von mehr als drei ebenen Winkeln gebildet wird.

Deshalb sind die ebenen Winkel, den einen Raumwinkel bilden, zusammen kleiner als vier rechte Winkel, was zu zeigen war.

XI.22.

Drei Strecken über denen ebene Winkel errichtet sind, von denen je zwei zusammen größer sind als der dritte und die jeweils von gleichen Strecken eingeschlossen werden, sind den Seiten eines Dreiecks gleich.

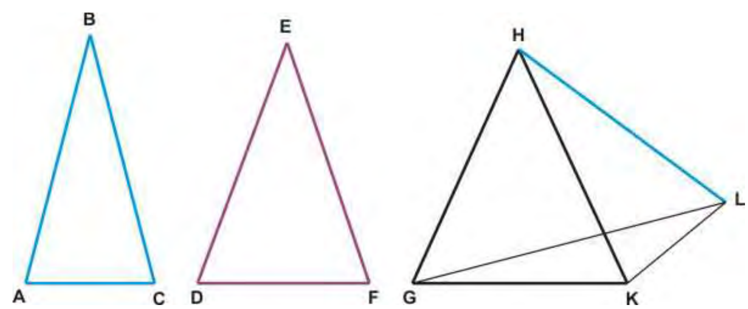
Wenn die drei ebenen Winkel ABC, DEF, GHK, von denen je zwei zusammen größer sind als der dritte, also ABC, DEF zusammen größer sind als GHK, auch DEF, GHK zusammen größer sind als ABC und auch GHK, ABC zusammen größer sind als DEF, von den gleichen Strecken AB, BC, DE, EF, GH, HK eingeschlossen werden und damit die Strecken AC, DF, GK gegeben sind, dann, sage ich, sind die Strecken, die AC, DF, GK gleich sind, gleich den Seiten eines Dreiecks, denn je zwei dieser Strecken sind größer als die dritte.

Denn wenn die Winkel ABC, DEF, GHK gleich sind, sind offensichtlich auch AC, DF, GK gleich und es kann aus ihnen ein gleichseitiges Dreieck errichtet werden.

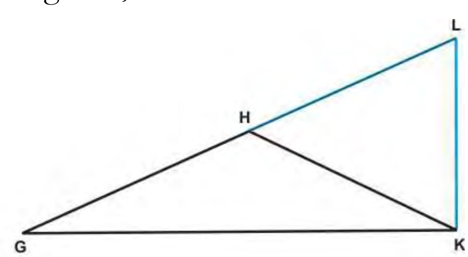
Sind ABC, DEF, GHK nicht gleich, ist an HK im Punkt H der dem Winkel ABC gleiche Winkel KHL anzulegen und ist die den Strecken AB, BC, DE, EF, GH, HK gleiche Strecke HL und sind die Strecken KL, GL zu ziehen.

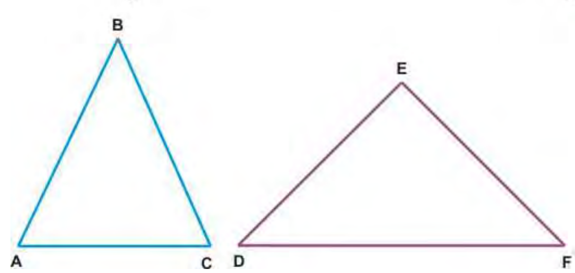
Da die beiden Strecken AB, BC den beiden Strecken KH, HL gleich sind und der Winkel im Punkt B dem Winkel KHL gleich ist, ist die Strecke AC gleich der Strecke KL.

Nun sind zwei der Winkel ABC, DEF, GHK zusammen entweder kleiner, gleich oder größer als zwei rechte Winkel [4].



Sind die Winkel ABC, GHK kleiner als zwei rechte Winkel, so sind die Winkel ABC, GHK zusammen größer als der Winkel DEF, wobei der Winkel ABC gleich KHL ist, somit ist der Winkel GHL größer als der Winkel DEF.
Die beiden Strecken GH, HL sind den beiden Strecken DE, EF gleich, der Winkel GHL ist größer als DEF, damit ist die Strecke GL größer als DF [wie I.24.].
Da die Strecken GK, KL zusammen größer als GL sind, sind GK, KL zusammen umso mehr größer als DF.
Die Strecke KL ist gleich AC, somit sind AC, GK zusammen größer als DF.





Sind die Winkel ABC, GHK zusammen gleich zwei rechten Winkeln, dann liegen GH, HL auf derselben Geraden.

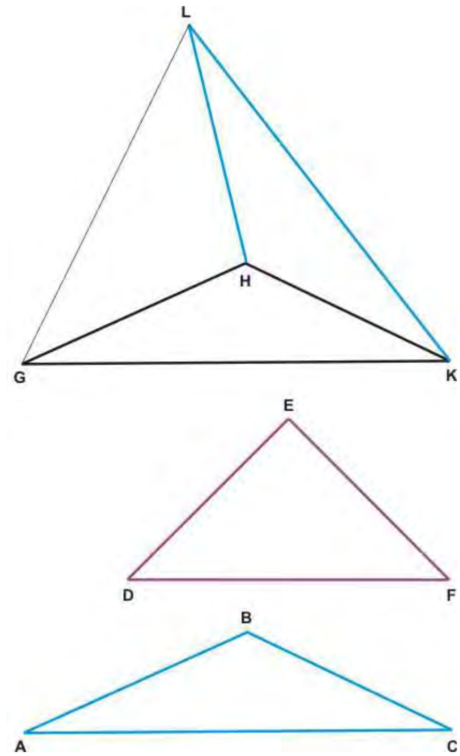
Es sind dann GK, KL zusammen größer als GL, das gleich DE, EF zusammen ist.
DE, EF sind zusammen größer als DF, somit sind GK, KL zusammen größer als DF.

---

[4] So bei Clavius und bei Ratdolt

Da KL gleich AC ist, sind AC, GK zusammen größer als DF.

Sind die Winkel ABC, GHK zusammen größer als zwei rechte Winkel, dann sind KG, KL zusammen größer als KH, HL zusammen, denn KG ist größer als KH und KL ist größer als HL.
Die Strecken KH, HL sind gleich den Strecken DE, EF, somit sind KG, KL zusammen größer als DE, EF zusammen.
DE, EF sind zusammen größer als DF, also sind KG, KL zusammen größer als DF.
Da KL gleich AC ist, sind AC, GK zusammen größer als DF.



Auf gleiche Weise ist zu zeigen, dass die Strecken AC, DF zusammen größer als GK und dass die Strecken DF, GK zusammen größer als AC sind.

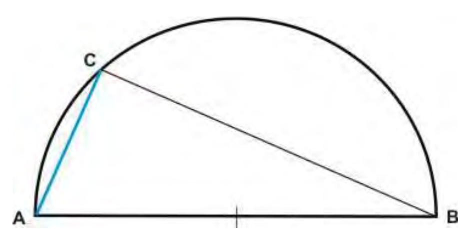
Deshalb sind die Strecken, die den Strecken AC, DF, GK gleich sind, gleich den Seiten eines Dreiecks, was zu zeigen war.

Lemma XI.23.

Zu zwei gegebenen Strecken diejenige finden, die um das Quadrat der einen kleiner ist als das Quadrat der anderen.

Es soll die Strecke OR gefunden werden, so dass das Quadrat über OR um das Quadrat über der gegebenen LO kleiner ist als das Quadrat über der gegebenen Strecke AB.
Von den Strecken AB, LO sei AB die größere.

Es ist über AB der Halbkreis ABC zu beschreiben, die Strecke AC, die gleich LO ist, einzutragen [wie IV.1.] und CB zu ziehen.



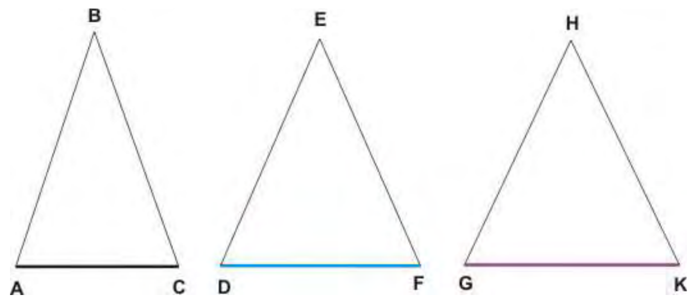
Da im Halbkreis ABC der Winkel ACB ein rechter Winkel ist, ist das Quadrat über AB gleich den Quadraten über AC, CB zusammen.
AC ist gleich LO, somit ist das Quadrat über AB um das Quadrat über CB größer als das Quadrat über LO.

Die Strecke OR, die gleich CB ist, ist damit die Strecke, die um das Quadrat über LO kleiner ist als das Quadrat über AB, was auszuführen war.

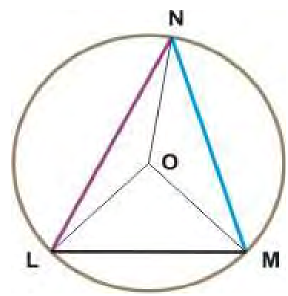
XI.23.

Aus drei ebenen Winkeln, die zusammen kleiner als vier rechte Winkel sind und von denen je zwei zusammen größer sind als der dritte, einen Raumwinkel bilden.

Aus den drei ebenen Winkeln ABC, DEF, GHK, die zusammen kleiner als vier rechte Winkel sind und von denen je zwei zusammen größer sind als der dritte, soll ein Raumwinkel gebildet werden.



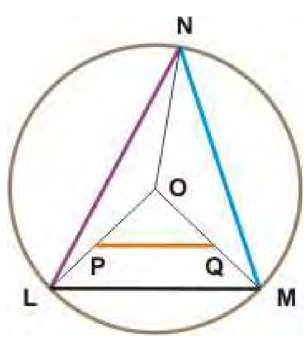
Zu gleichen Strecken AB, BC, DE, EF, GH, HK sind AC, DF, GK zu ziehen und aus Strecken, die AC, DF, GK gleich sind ist das Dreieck LMN zu errichten, wobei AC gleich LM, DF gleich MN und GK gleich NL sei.
Es ist dann um das Dreieck LMN der Kreis LMN mit Mittelpunkt O zu beschreiben [wie IV.5.] und sind LO, MO, NO zu ziehen.



Ich sage, die Strecke AB ist größer als die Strecke LO.
Denn wenn nicht, ist AB entweder gleich oder kleiner LO.

Ist AB gleich LO, dann, da AB gleich BC und da OL gleich OM ist, sind die beiden Seiten AB, BC den beiden Seiten LO, OM gleich. Da AC gleich LM ist, ist dann der Winkel ABC gleich dem Winkel LOM.

Aus gleichen Gründen ist dann der Winkel DEF gleich MON und ist der Winkel GHK gleich NOL.
Damit sind dann die Winkel ABC, DEF, GHK zusammen gleich den Winkeln LOM, MON, NOL zusammen.
Da die Winkel LOM, MON, NOL zusammen gleich vier rechten Winkeln sind, sind dann auch die Winkel ABC, DEF, GHK zusammen gleich vier rechten Winkeln, was, da sie nach Voraussetzung kleiner als vier rechte Winkel sind, nicht möglich ist.
Also ist AB nicht gleich LO.



Die Strecke AB ist aber auch nicht kleiner als LO.
Denn ist sie kleiner, dann ist OP gleich AB und ist OQ gleich BC einzutragen und PQ zu ziehen.

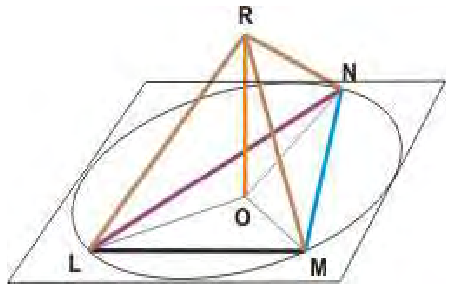
Da AB gleich BC ist, ist dann OP gleich OQ.
Da LP gleich QM ist, sind LM, PQ parallel.
In den Dreiecken LMO, PQO liegen somit gleiche Winkel und es verhält sich OL zu LM wie OP zu PQ [wie VI.4.], und, nach Umordnung, verhält sich LO zu OP wie LM zu OQ.

Da LO größer als OP ist, ist LM größer als PQ.
Damit sind die beiden Strecken AB, BC gleich den beiden Strecken PO, OQ und ist AC größer als PQ. Der Winkel ABC ist dann größer als POQ [wie I.25.].

Ebenso ist zu zeigen, dass dann der Winkel DEF größer als MON und dass der Winkel GHK größer als NOL ist.
Damit sind die Winkel ABC, DEF, GHK zusammen größer als die Winkel LOM, MON, NOL zusammen.

Da nach Voraussetzung die Winkel ABC, DEF, GHK zusammen kleiner als vier rechte Winkel sind, sind dann die Winkel LOM, MON, NOL zusammen noch kleiner als vier rechte Winkel; da sie aber gleich vier rechten Winkeln sind, ist dies nicht möglich.
Also ist AB nicht kleiner als LO.

Wie gezeigt, ist AB weder kleiner, noch gleich LO, sondern somit größer LO.



Es ist schließlich zur Ebene des Kreises LMN im Punkt O die Senkrechte OR zu errichten, wobei das Quadrat über OR um das Quadrat über LO kleiner sei, als das Quadrat über AB.
Es sind dann RL, RM, RN zu ziehen.

Da RO zur Ebene des Kreises LMN senkrecht steht und da LO gleich OM ist, wobei OR in ihrem Schnittpunkt zu ihnen senkrecht ist, ist RL gleich RM.
Aus den gleichen Gründen sind RN, RL, RM gleich.

Das Quadrat über AB ist nach Voraussetzung gleich den Quadraten über LO, OR zusammen.
Da LOR ein rechter Winkel ist, ist das Quadrat über LR gleich den Quadraten über LO, OR zusammen [wie I.47.].
Somit ist das Quadrat über AB gleich dem Quadrat über RL und ist AB gleich RL.
Da die Strecken AB, BC, DE, EF, GH, HK gleich sind, sind damit diesen auch die Strecken RL, RM, RN gleich.

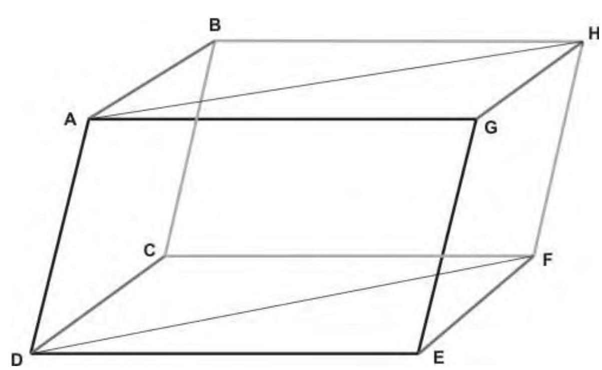
Die beiden Strecken LR, RM sind gleich den beiden Strecken AB, BC und, da LM gleich AC ist, sind die Winkel LRM, ABC gleich. Aus den gleichen Gründen sind die Winkel MRN, DEF und sind die Winkel LRN, GHK gleich.

Damit sind die drei ebenen Winkel LRM, MRN, LRN gleich den ebenen Winkeln ABC, DEF, GHK und bilden im Punkt R den Raumwinkel aus LRM, MRN, LRN, was auszuführen war.

XI.24.

Die gegenüberliegenden Flächen eines Körpers, der in Länge, Breite und Höhe zwischen parallelen Ebenen liegt, sind gleiche Parallelogramme.

Wenn der Körper CDHG zwischen den parallelen Ebenen AC, GF, AH, DF, BF, AE liegt, dann, sage ich, sind gegenüberliegende Flächen gleiche Parallelogramme.



Denn da die parallelen Ebenen BG, CE die Ebene AC schneiden, sind ihre Schnittgeraden parallel [wie XI.16.].
Somit sind die Strecken AB, DC parallel.

Da die parallelen Ebenen BF, AE die Ebene AC schneiden, sind BC, AD parallel.
Da, wie gezeigt, auch AB, DC parallel sind, ist AC ein Parallelogramm.
Ebenso ist zu zeigen, dass DF, FG, GB, BF, AE Parallelogramme sind.

Es ist dann AH, DF zu ziehen.
Da jeweils die Geraden AB, DC und die Geraden BH, CF parallel sind, schneiden die Geraden AB, BH die Geraden DC, CF in derselben Ebene.
Damit sind die Winkel, die sie bilden, gleich. Also ist der Winkel ABH gleich dem Winkel DCF.

Da die beiden Strecken AB, BH den beiden Strecken DC, CF gleich sind und da die Winkel ABH, DCF gleich sind, ist AH gleich DF und das Dreieck ABH gleich dem Dreieck DCF.

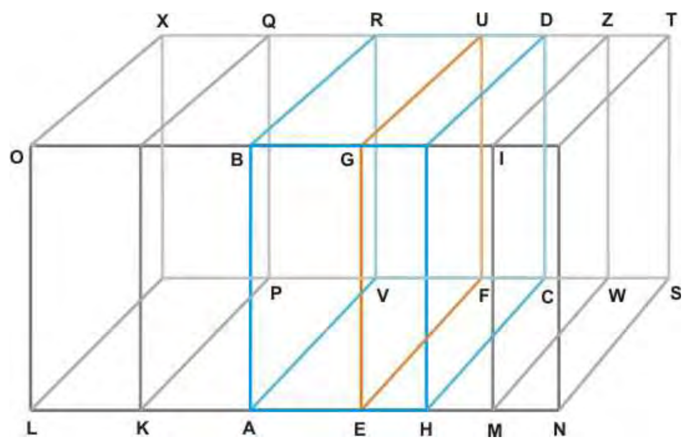
Das Parallelogramm BG ist das Doppelte des Dreiecks ABH und das Parallelogramm CE ist das Doppelte des Dreiecks DCF, somit ist BG gleich CE.
Ebenso ist zu zeigen, dass AC gleich GF und dass AE gleich BF ist.

Also sind die gegenüberliegenden Flächen eines Körpers, der in Länge, Breite und Höhe zwischen parallelen Ebenen liegt, gleiche Parallelogramme, was zu zeigen war.

XI.25.

Von den durch eine, zu einer der gegenüberliegenden Flächen eines parallelepipeden Körpers parallelen, schneidende Ebene abgeteilten Körpern verhält sich einer zum andern wie seine Grundfläche zur andern.

Wenn der parallelepipede Körper ABCD von einer zu RA parallelen Ebene FG geschnitten wird, dann, sage ich, steht die Grundfläche AEFV im gleichen Verhältnis zur Grundfläche EHCF wie der Körper ABFU zum Körper EGCD.



Denn wenn AH nach der einen Seite um AK und KL, die AE gleich sind, und nach der anderen Seite um HM und MN, die EH gleich sind, verlängert wird, sind die Parallelogramme LP, KV, HW, MS und sind die Körper LQ, KR, DM, MT zu vervollständigen.

Da LK gleich KA und gleich AE ist, ist LP gleich KV und gleich AF und ist KO gleich KB und gleich AG, somit ist LX gleich KQ und gleich AR, denn diese Flächen liegen sich gegenüber [wie XI.24.].

Aus den gleichen Gründen ist EC gleich HW und gleich MS, ist HG gleich HI und gleich IN und ist DH gleich MZ und gleich NT.

Damit sind jeweils drei gegenüberliegende Flächen jeder der Körper LQ, KR, AU gleich drei Flächen der jeweils anderen, also sind LQ, KR, AU gleich [wie XI.24.].
Aus den gleichen Gründen ist ED gleich HZ und gleich MT.

Die Grundfläche LZ ist das gleiche Vielfache der Grundfläche AF wie der Körper LU das Vielfache des Körpers AU ist.

Aus den gleichen Gründen ist die Grundfläche NF das gleiche Vielfache der Grundfläche HF wie der Körper NU das Vielfache des Körpers HU ist.

Ist LF gleich NF, dann ist LU gleich NU, ist jedoch LF größer als NF, ist auch LU größer als NU, ist aber LF kleiner als NF, dann ist auch LU kleiner als NU.

Da die vier Größen, nämlich die Grundflächen LF, FN und die Körper LU, NU, gleiche Vielfache der beiden Grundflächen AF, FH und der beiden Körper AU, UH sind, ist dann, wie gezeigt, LU größer als NU, wenn LF größer als FN ist, ist LU gleich NU, wenn LF gleich FN und ist LU kleiner als NU, wenn LF kleiner als FN ist.

Deshalb verhält sich AF zu FH wie AU zu UH [wie V. Erklärung 5.], was zu zeigen war.

XI.26.

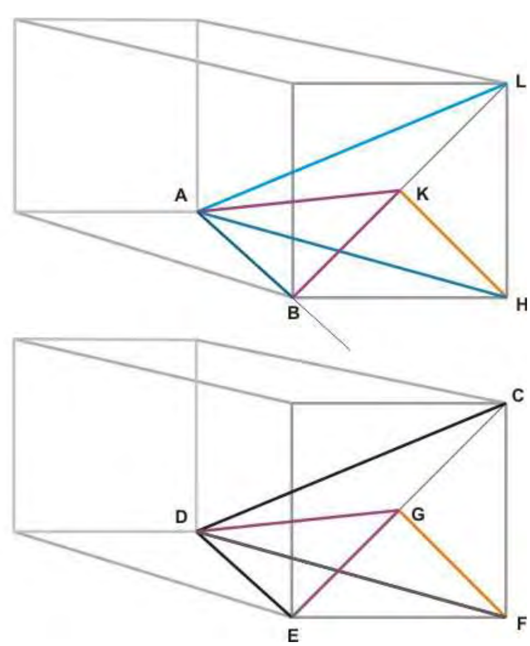
An einer Geraden in einem gegebenen Punkt einen Raumwinkel anlegen, der einem gegebenen gleich ist.

An der gegebenen Geraden AB soll im gegebenen Punkt A ein Raumwinkel angelegt werden, der dem Raumwinkel im Punkt D, der von den ebenen Winkeln EDC, EDF, FDC gebildet wird, gleich ist.

Es ist die Senkrechte FG auf der Ebene der ED, DC durch einen beliebigen Punkt F auf der Geraden DF zu errichten und DG zu ziehen.
Dann sind an der Geraden AB im Punkt A die Winkel BAL, der gleich EDC ist, und davon der Winkel BAK, der gleich EDG ist, abzuteilen und es ist die Strecke AK, die gleich DG ist, zu ziehen, es ist die Senkrechte KH, die gleich FG ist, auf der Ebene der BA, AL durch den Punkt K zu errichten und es ist HA zu ziehen.

Ich sage, der Raumwinkel im Punkt A, der von den Winkeln BAL, BAH, HAL gebildet wird, ist gleich dem Raumwinkel, der im Punkt D von den Winkeln EDC, EDF, FDC gebildet wird.

Denn wenn die Strecken AB, DE gleich sind und HB, KB, FE, GE gezogen werden, dann sind alle Winkel der FG, da sie auf der Ebene der DE, DC senkrecht steht, mit Geraden dieser Ebene durch ihren Schnittpunkt rechte Winkel. Also sind FGD, EGF rechte Winkel.
Aus den gleichen Gründen sind HKA, BKH rechte Winkel.



Da von den beiden Strecken KA, AB den beiden Strecken GD, DE eine der anderen gleich ist und die Winkel BAK, EDG, die sie einschließen, gleich sind, ist KB gleich GE.
Es ist HK gleich FG und ist KB gleich GE und es sind die Winkel, die sie einschließen, gleich, somit ist HB gleich FE.
Da die beiden Strecken AK, KH den beiden Strecken DG, GF gleich sind und die Winkel, die sie einschließen, gleich sind, sind die Strecken AH, DF gleich.

Es ist AB gleich DE, somit sind die beiden Strecken HA, AB den beiden Strecken FD, DE gleich und, da auch HB, FE gleich sind, ist der Winkel BAH gleich dem Winkel EDF [wie I.8.].

Aus den gleichen Gründen sind die Winkel HAL, FDC und sind die Winkel BAL, EDC gleich.

Damit ist an der Geraden AB im Punkt A der Raumwinkel angelegt, der dem im Punkt D gegebenen gleich ist, was auszuführen war.

XI.27.

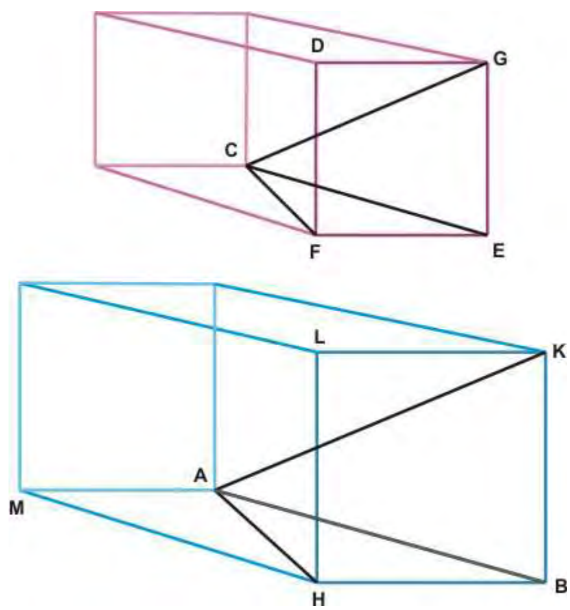
An einer Strecke ein Parallelepiped, das einem gegebenen ähnlich ist, gleich errichten.

An der gegebenen Strecke AB soll ein Parallelepiped gleich errichtet werden, das dem gegebenen Parallelepiped CD ähnlich ist.

Es ist an der Strecke AB im Punkt A ein Raumwinkel anzulegen, der dem in C gleich ist und von den Winkeln BAH, HAK, KAB gebildet wird.

Es ist dann der Winkel BAH gleich dem Winkel ECF, der Winkel BAK gleich dem Winkel ECG und der Winkel KAH gleich dem Winkel GCF.
Es verhält sich somit EC zu CG wie BA zu AK und verhält sich GC zu CF wie KA zu AH.
Damit verhält sich aufgrund Gleichheit EC zu CF wie BA zu AH [wie V.22.].

Es ist dann das Parallelogramm BM und das Parallelepiped AL zu vervollständigen.



Da sich EC zu CG verhält wie BA zu AK und da diese Seiten, die die gleichen Winkel ECG, BAK einschließen, im gleichen Verhältnis stehen, ist das Parallelogramm GF ähnlich dem Parallelogramm KH.

Aus den gleichen Gründen ist das Parallelogramm KA ähnlich dem Parallelogramm GC und ist das Parallelogramm FC ähnlich dem Parallelogramm HA.

Damit sind drei Parallelogramme des Körpers CD ähnlich den drei Parallelogrammen des Körpers AL.

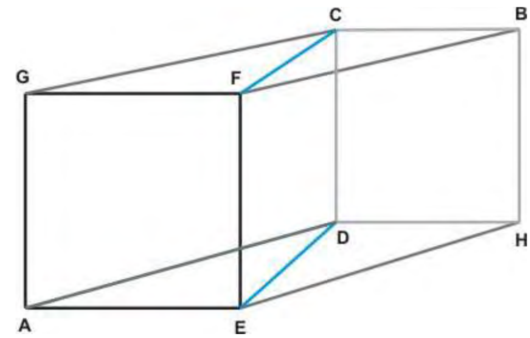
Da jeweils drei parallel gegenüberliegende Parallelogramme ähnlich zu drei parallel gegenüberliegenden Parallelogrammen gleich errichtet sind, ist das Parallelepiped AL ähnlich dem Parallelepiped CD.

Damit ist an der Strecke AB ein dem gegebenen Parallelepiped CD ähnliches Parallelepiped AL gleich errichtet, was auszuführen war.

XI.28.

Ein Parallelepiped, das von einer Ebene geschnitten wird, in der die Diagonalen zweier gegenüberliegender Flächen liegen, wird dadurch in zwei gleiche Teile geteilt.

Wenn das Parallelepiped AB von der Ebene CDEF, in der die Diagonalen CF, DE zweier gegenüberliegenden Flächen liegen, geschnitten wird, dann, sage ich, wird das Parallelepiped AB durch CDEF in zwei gleiche Teile geteilt.



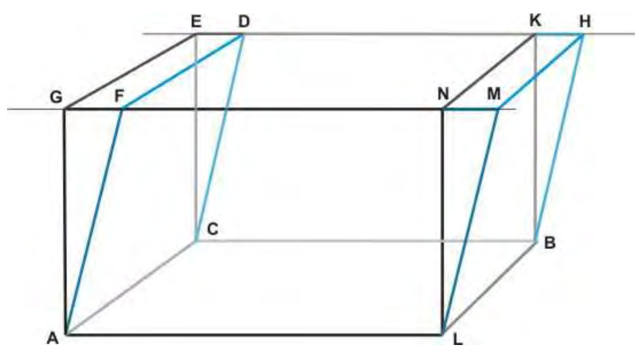
Da das Dreieck CGF dem Dreieck CFB gleich ist, da das Dreieck ADE dem Dreieck DEH gleich ist, da zudem das Parallelogramm GE dem Parallelogramm CH gleich ist, ist das Prisma mit den beiden Dreiecken CGF, ADE und den drei Parallelogrammen GE, AC, CE gleich dem Prisma mit den beiden Dreiecken CFB, DEH und den drei Parallelogrammen CH, BE, CE.

Da die Flächen des einen Prismas den Flächen des anderen Prismas an Größe und Anzahl gleich sind, wird der Körper AB durch CDEF in zwei gleiche Teile geteilt, was zu zeigen war.

XI.29.

Parallelepipede derselben Grundfläche und Höhe, deren Kanten dieselben Geraden schneiden, sind gleich.

Wenn die Parallelepipede CM, CN die gleiche Höhe und dieselbe Grundfläche AB haben und ihre Kanten AF, AG, LM, LN die Gerade FN und die Kanten CD, CE, BH, BK die Gerade DK schneiden, dann, sage ich, ist der Körper CM dem Körper CN gleich.



Denn da CH, CK Parallelogramme sind, ist CB sowohl gleich DH wie gleich EK, somit ist die Strecke DH gleich der Strecke EK und, da diese auf der gleichen Geraden liegen, ist DE gleich HK.

Da damit das Dreieck DCE gleich dem Dreieck HBK ist und da DG gleich HN ist, ist aus den gleichen Gründen das Dreieck AFG gleich dem Dreieck MLN. Das Parallelogramm CF ist gleich BM und das Parallelogramm CG gleich BN, wobei sie jeweils gegenüberliegen.

Damit ist das Prisma mit den beiden Dreiecken AFG, DCE und den drei Parallelogrammen AD, DG, CG gleich dem Prisma mit den beiden Dreiecken MLN, HBK und den drei Parallelogrammen BM, HN, BN.
Da sich die Parallelepipede zwischen der gemeinsamen Grundfläche AB und der Ebene GEHM durch diese Prismen unterscheiden, von denen eines hinzukommt und das andere weggenommen wird, ist der Körper CM gleich dem Körper CN.

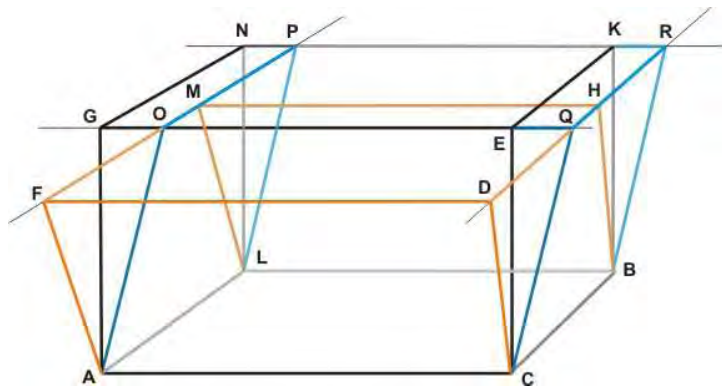
Deshalb sind Parallelepipede derselben Grundfläche und Höhe, deren Kanten dieselben Geraden schneiden, gleich, was zu zeigen war.

XI.30.

Parallelepipede derselben Grundfläche und Höhe, deren Kanten nicht dieselben Geraden schneiden, sind gleich.

Wenn die Parallelepipede CM, CN die gleiche Höhe und dieselbe Grundfläche AB haben und obwohl ihre Kanten AF, AG, LM, LN, CD, CE, BH, BK nicht dieselben Geraden schneiden, dann, sage ich, ist der Körper CM doch dem Körper CN gleich.

Denn die verlängerte Kante NK schneidet die verlängerten Kanten DH, FM in den Punkten R, P und die verlängerten Kanten FM, GE schneiden sich in den Punkten O, Q. Es ist dann AO, LP, CQ, BR zu ziehen.



Der Körper CM, dessen Grundfläche das Parallelogramm ACBL ist, das dem das Parallelogramm FDHM gegenüber liegt, ist gleich dem Körper CP ist, dessen Grundfläche ebenso das Parallelogramm ACBL ist, dem das Parallelogramm OQRP gegenüber liegt, denn sie haben dieselbe Grundfläche und die gleiche Höhe und ihre Kanten AF, AO, LM, LP, CD, CQ, BH, BR schneiden dieselben Geraden FP, DR [wie XI.29.].

Da der Körper CP, dessen Grundfläche das Parallelogramm ACBL ist, dem das Parallelogramm OQRP gegenüber liegt, auch gleich dem Körper CN ist, dessen Grundfläche das Parallelogramm ACBL ist, das dem Parallelogramm GEKN gegenüber liegt, denn diese Körper haben dieselbe Grundfläche ACBL und die gleiche Höhe und ihre Kanten AG, AO, CE, CQ, LN, LP, BK, BR schneiden dieselben Geraden GQ, NR, ist der Körper CM gleich dem Körper CN.

Deshalb sind Parallelepipede derselben Grundfläche und Höhe, deren Kanten nicht dieselben Geraden schneiden, gleich, was zu zeigen war.

XI.31.

Parallelepipede gleicher Grundfläche und Höhe sind gleich.

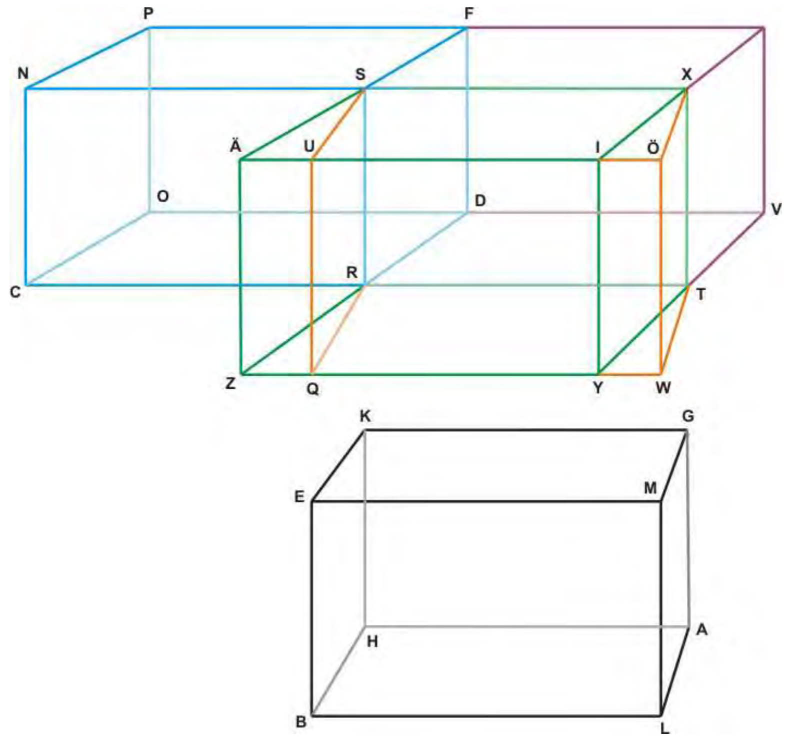
Wenn die Parallelepipede AE, CF auf den gleichen Grundflächen AB, CD errichtet sind und die gleiche Höhe haben, dann, sage ich, ist der Körper AE gleich dem Körper CF.

Wenn die Kanten HK, BE, AG, LM, OP, DF, CN, RS senkrecht auf den Grundflächen AB, CD stehen, ist der Winkel ALB ist entweder gleich oder ungleich dem Winkel CRD.

Wenn die Winkel ALB, CRD ungleich sind und die Kanten HK, BE, AG, LM, OP, DF, CN, RS stehen senkrecht auf den Grundflächen AB, CD, ist die Strecke CR um RT, die gleich AL ist, zu verlängern und im Punkt R der dem Winkel ALB gleiche Winkel TRQ anzulegen, wobei RQ gleich LB ist. Es sind dann die Grundfläche RW und der Körper QX zu vervollständigen.

Da dann die beiden Strecken TR, RQ den beiden Strecken AL, LB gleich sind und sie den gleichen Winkel einschließen, ist das Parallelogramm RW gleich und ähnlich dem Parallelogramm HL.

Da AL gleich RQ und da LM gleich RS ist, wobei sie jeweils rechte Winkel bilden, ist das Parallelogramm RU gleich und ähnlich dem Parallelogramm AM.



Aus den gleichen Gründen sind die Parallelogramme LE, WU ähnlich und gleich.

Damit sind drei Parallelogramme des Körpers AE gleich und ähnlich den drei Parallelogrammen des Körpers QX.

Da diese Parallelogramme jeweils gleichen und ähnlichen Parallelogrammen gegenüberliegen, ist das Parallelepiped AE gleich dem Parallelepiped QX.

Stehen die Kanten HK, BE, AG, LM, OP, DF, CN, RS senkrecht auf den Grundflächen AB, CD und ist aber der Winkel ALB gleich dem Winkel CRD, sind die Strecken DR, WQ bis zu ihrem Schnittpunkt Z zu verlängern, ist durch T die zu DZ parallele VTY zu ziehen und OD bis V zu verlängern.
Es sind dann die Körper ZX, VS zu vervollständigen.

Der Körper XZ, dessen Grundfläche das Parallelogramm ZT ist und SI gegenüberliegt, ist gleich dem Körper XQ ist, dessen Grundfläche RW ein Parallelogramm ist und UX gegenüberliegt, denn beide haben eine dem ZT gleiche Grundfläche und die gleiche Höhe und ihre Kanten RZ, RQ, TY, TW, SÄ, SU, XI, XÖ schneiden dieselben Geraden ZW, ÄÖ [wie XI.29.].
Da der Körper XQ gleich dem Körper AE ist, ist somit der Körper XZ gleich AE.

Da das Parallelogramm RQWT gleich ZT ist, denn sie sind auf derselben Strecke RT errichtet und liegen zwischen den Parallelen RT, ZW, und da das Parallelogramm RQWT gleich dem Parallelogramm CD ist, ist das Parallelogramm ZT gleich dem Parallelogramm CD.

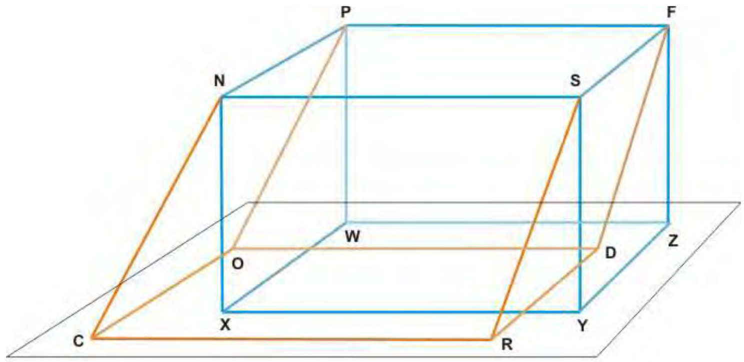
Die Parallelogramme ZT, CD liegen am Parallelogramm DT, also verhält sich CD zu DT wie ZT zu DT. Da die Grundflächen der Parallelepipede CF, DX von der Ebene CV abgeteilt sind, verhält sich damit CD zu DT wie CF zu DX [wie XI.25.].

Ebenso, da die Grundflächen der Parallelepipede ZX, DX von der gegenüberliegenden Ebene DY abgeteilt sind, verhält sich ZT zu TD wie ZX zu DX.
Da sich CD zu DT verhält wie ZT zu DT, verhält sich somit CF zu DX wie ZX zu DX.
Somit stehen CF, ZX im gleichen Verhältnis zu DX und es ist deshalb CF gleich ZX.

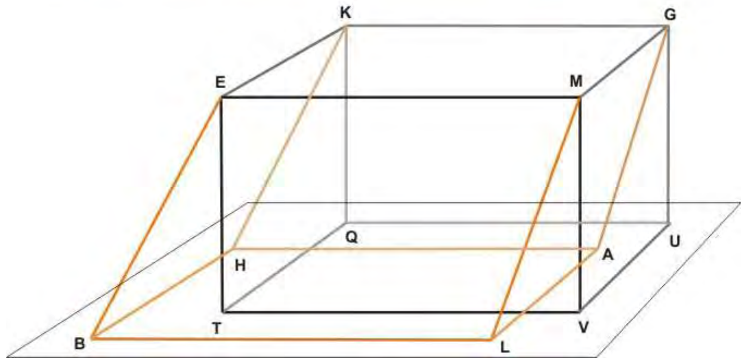
Wie gezeigt, ist der Körper XZ gleich dem Körper AE und damit der Körper AE gleich dem Körper CF.

Stehen die Kanten HK, BE, AG, LM, OP, DF, CN, RS nicht senkrecht auf den Grundflächen AB, CD, dann, sage ich, ist der Körper AE dennoch gleich dem Körper CF.

Denn werden durch die Punkte K, E, G, M, P, F, N, S die Senkrechten KQ, ET, GU, MV, PW, FZ, NX, SY auf der Ebene der Grundflächen errichtet, die die Ebene in den Punkten Q, T, U, V, W, Z, X, Y schneiden, sind TQ, QU, UV, VT, XW, WZ, ZY, YX zu ziehen.



Der Körper KV ist gleich dem Körper PY, denn diese sind auf den gleichen Grundflächen KM, PS errichtet und haben die gleiche Höhe, wobei ihre Kanten auf den Grundflächen senkrecht stehen.



Der Körper KV ist gleich dem Körper AE und der Körper PY gleich dem Körper CF, denn diese sind auf den gleichen Grundflächen errichtet und haben die gleiche Höhe, wenn auch ihre Kanten nicht dieselben Geraden schneiden [wie XI.30.].

Also ist das Parallelepiped AE gleich dem Parallelepiped CF.

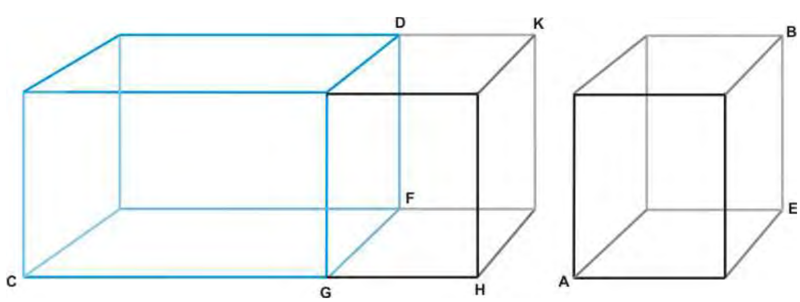
Deshalb sind Parallelepipede gleicher Grundfläche und Höhe gleich, was zu zeigen war.

XI.32.

Gleich hohe Parallelepipede stehen im gleichen Verhältnis wie ihre Grundflächen.

Wenn die Parallelepipede AB, CD die gleiche Höhe haben, dann, sage ich, stehen sie im gleichen Verhältnis wie ihre Grundflächen, es verhält sich also AE zu CF wie AB zu CD.

Denn wenn an die Strecke FG ein dem Parallelogramm AE gleiches Parallelogramm FH angelegt wird, ist über FH das Parallelepiped GK mit der Höhe des Parallelepipeds CD zu errichten.



Damit ist GK gleich AB, denn sie sind auf den gleichen Grundflächen AE, FH mit gleicher Höhe errichtet.
Da das Parallelepiped CK durch die Ebene DG geteilt wird, verhält sich CF zu FH wie CD zu DH [wie XI.25.].

Das Parallelogramm FH ist gleich dem Parallelogramm AE und das Parallelepiped GK ist gleich dem Parallelepiped AB. Also verhält sich AE zu CF wie AB zu CD.

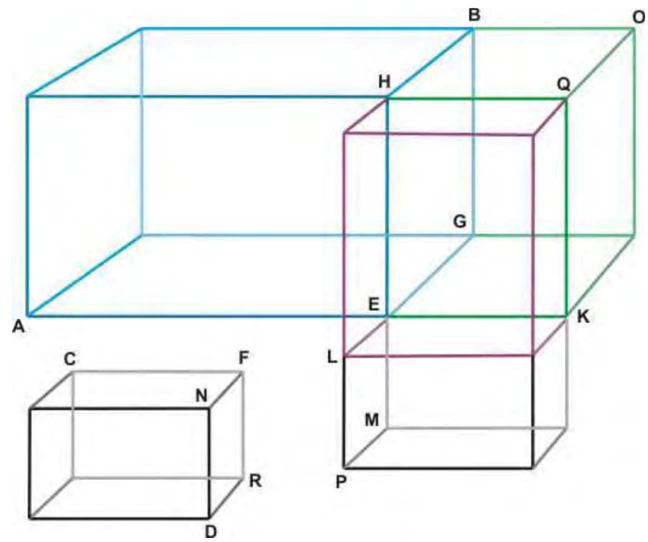
Deshalb stehen gleich hohe Parallelepipede im gleichen Verhältnis wie ihre Grundflächen, was zu zeigen war.

XI.33.

Ähnliche Parallelepipede stehen im gleichen Verhältnis wie die Kuben über entsprechenden Kanten.

Wenn das Parallelepiped AB dem Parallelepiped CD ähnlich ist und die Kante AE der Kante CF entspricht, dann, sage ich, verhält sich der Körper AB zum Körper CD wie der Kubus über der Kante AE zum Kubus über der Kante CF.

Es ist AE, GE, HE bis EK, EL, EM zu verlängern, wobei EK gleich CF, EL gleich FN und EM gleich FR ist, und das Parallelogramm KL und der Körper KP zu vervollständigen.



Da die beiden Kanten KE, EL den beiden Kanten CF, FN gleich sind, ist der Winkel KEL gleich dem Winkel CFN, denn die Körper AB, CD sind ähnlich, womit die Winkel AEG, CFN gleich sind.
Damit sind die Parallelogramme KL, CN gleich und ähnlich.

Aus den gleichen Gründen sind die Parallelogramme KM, CR gleich und ähnlich, ebenso auch die Parallelogramme EP, DF.
Also sind die drei Parallelogramme des Körpers KP den drei Parallelogrammen des Körpers CD gleich und ähnlich.

Da jeweils die drei der gegenüber liegenden Fläche bei jedem Körper gleiche und ähnliche Parallelogramme sind, ist der ganze Körper KP dem ganzen Körper CD gleich und ähnlich.

Es ist nun das Parallelogramm GK und es sind auf den Parallelogrammen GK, KL mit der Höhe, die der des AB gleich ist, die Körper EO, LQ zu vervollständigen.

Da die Körper AB, CD ähnlich sind, verhalten sich die Kanten AE zu CF wie EG zu FN und wie EH zu FR. Dabei ist CF gleich EK, FN gleich EL und FR gleich EM.
Somit verhalten sich die Kanten AE zu EK wie GE zu EL und wie HE zu EM.
Da sich die Kante AE zur Kante EK verhält wie das Parallelogramm AG zum Parallelogramm GK, da sich die Kante GE zur Kante EL verhält wie das Parallelogramm GK zum Parallelogramm KL und da sich die Kante HE zur Kante EM verhält wie das Parallelogramm QE zum Parallelogramm KM, verhalten sich die Parallelogramme AG zu GK wie GK zu KL und wie QE zu KM.

Es verhält sich das Parallelogramm AG zum Parallelogramm GK wie der Körper AB zum Körper EO, es verhält sich das Parallelogramm GK zum Parallelogramm KL wie der Körper OE zum Körper QL und es verhält sich das Parallelogramm QE zum Parallelogramm KM wie der Körper QL zum Körper KP, also verhalten sich die Körper AB zu EO wie EO zu QL und wie QL zu KP.

Stehen vier Größen in fortlaufend gleicher Proportion, dann steht die erste zur vierten in dem Verhältnis wie die erste dreimal als Faktor genommen zur zweiten dreimal als Faktor genommen [wie V. Erklärung 10.]. Also verhält sich der Körper AB zum Körper KP wie AB dreimal als Faktor genommen zu EO dreimal als Faktor genommen.

Es verhält sich der Körper AB zum Körper EO wie das Parallelogramm AG zum Parallelogramm GK und wie die Kante AE zur Kante EK.
Damit verhält sich der Körper AB zum Körper KP wie der Kubus über der Kante AE zum Kubus über der Kante EK.
Da KP gleich CD und da EK gleich CF ist, verhält sich der Körper AB zum Körper CD wie der Kubus über der Kante AE zum Kubus über der Kante CF.

Deshalb stehen ähnliche Parallelepipede im gleichen Verhältnis wie Kuben über entsprechenden ihrer Kanten, was zu zeigen war.

Zusatz:
Offensichtlich verhält sich bei vier Strecken in fortlaufend gleicher Proportion die erste zur vierten Strecke wie das über der ersten Strecke errichtete Parallelepiped zu dem über der zweiten Strecke ähnlichen und ähnlich errichteten Parallelepiped, denn es verhält sich die erste Strecke zur vierten wie der Kubus über der ersten Strecke zum Kubus über der zweiten.

XI.34.

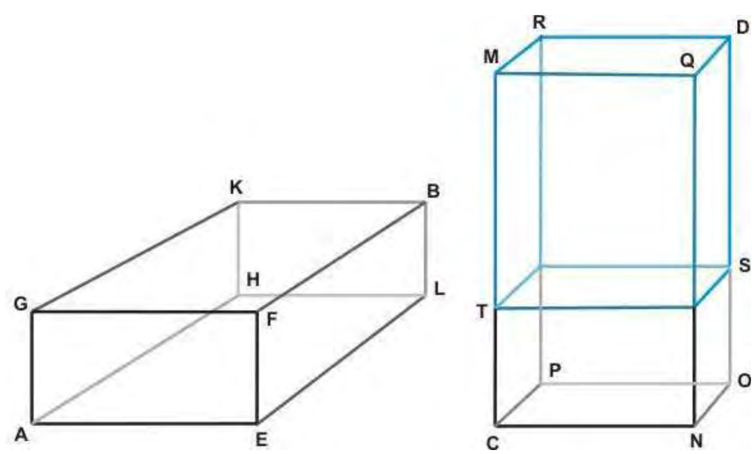
Die Grundflächen gleicher Parallelepipede stehen im umgekehrten Verhältnis ihrer Höhen und Parallelepipede, der Grundflächen im umgekehrten Verhältnis ihrer Höhen stehen, sind gleich.

Wenn die Parallelepipede AB, CD gleich sind, dann, sage ich, stehen die Grundflächen von AB, CD im umgekehrten Verhältnis ihrer Höhen; es verhält sich also die Grundfläche EH zur Grundfläche NP wie die Höhe des Körpers CD zur Höhe des Körpers AB.

Wenn nun die Kanten AG, EF, LB, HK, CM, NQ, OD, PR senkrecht auf den Grundflächen stehen, dann, sage ich, verhält sich die Grundfläche EH zur Grundfläche NP wie CM zu AG.

Denn wenn die Grundfläche EH gleich der Grundfläche NP ist, dann sind, da die Parallelepipede AB, CD gleich sind, die Kanten CM, AG gleich, denn Parallelepipede stehen im gleichen Verhältnis wie ihre Grundflächen [wie XI.32.].
Somit verhält sich dann EH zu NP wie CM zu AG und damit stehen die Parallelepipede AB, CD offenbar im umgekehrten Verhältnis ihrer Höhen.

Ist aber die die Grundfläche EH ungleich der Grundfläche NP, sei EH größer als NP.
Da die Körper AB, CD gleich sind, ist dann CM größer als AG.
Ist CT gleich AG, dann ist NP die Grundfläche des Parallelepipeds SC mit der Höhe CT.



Da AB gleich CD ist, ist dann der Körper CD größer als der Körper CS und es verhält sich AB zu CS wie der Körper CD zum Körper CS.

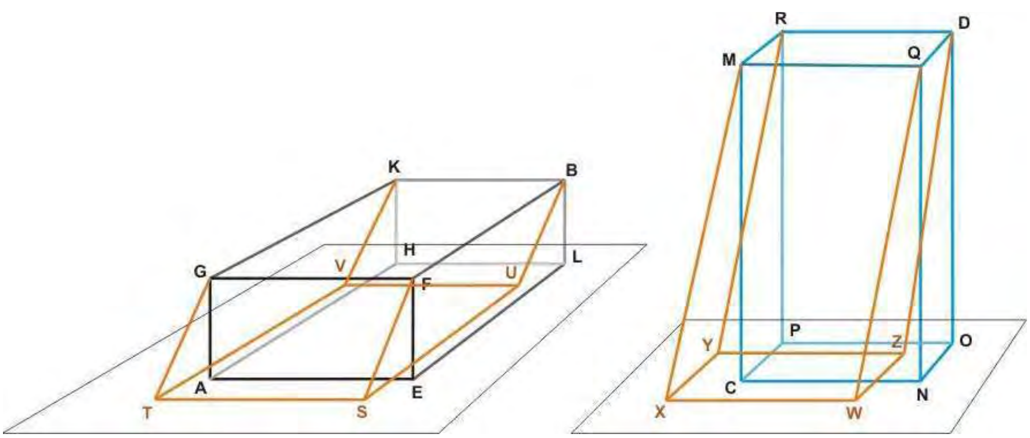
Der Körper AB verhält sich zu CS wie EH zu NP, denn die Körper AB, CS haben die gleiche Höhe. Damit verhält sich der Körper CD zum Körper CS wie die Fläche MP zur Fläche TP und wie die Kante CM zur Kante CT.
Die Grundfläche EH verhält sich somit zur Grundfläche NP wie MC zu CT.
Da CT der Kante AG gleich ist, verhält sich damit EH zu NP wie MC zu AG.
Somit stehen dann die Grundflächen der Parallelepipede AB, CD im umgekehrten Verhältnis ihrer Höhen.

Stehen nun die Grundflächen EH, NP der Parallelepipede AB, CD im umgekehrten Verhältnis ihrer Höhen, dann, sage ich, ist der Körper AB gleich dem Körper CD.

Denn stehen die auf den Grundflächen emporragenden Kanten senkrecht auf den Grundflächen und sind die Grundflächen EH, NP gleich, dann verhält sich die Grundfläche EH zur Grundfläche NP wie die Höhe des Körpers CD zur Höhe des Körpers AB.
Da damit diese Parallelepipede auf den gleichen Grundflächen mit den gleichen Höhen errichtet sind, ist deshalb der Körper AB gleich dem Körper CD.

Ist die Grundfläche EH ungleich der Grundfläche NP, dann sei EH größer als NP.
Es ist dann die Höhe des Körpers CD größer als die Höhe des Körpers AB, somit ist CM größer als AG.
Ist CT gleich AG, die Höhe des Körpers CS, verhält sich EH zu NP wie MC zu AG und, da AG gleich CT ist, verhält sich EH zu NP wie CM zu CT.
Es verhält sich EH zu NP wie AB zu CS, denn die Körper AB, CS haben die gleiche Höhe.
Also verhält sich CM zu CT wie MP zu PT und wie CD zu CS.
Somit verhält sich AB zu CS wie CD zu CS, womit die Körper AB, CD zum Körper CS im gleichen Verhältnis stehen. Deshalb sind die Körper AB, CD gleich.

Stehen jedoch die auf den Grundflächen emporragenden Kanten FE, BL, KH, GA, QN, DO, RP, MC nicht senkrecht auf den Grundflächen, sind von den Punkten F, G, B, K, Q, M, D, R die Senkrechten auf die Ebenen zu fällen, in denen die Grundflächen EH, NP liegen, und die sie in den Punkten S, T, U, V, W, X, Z, Y schneiden.



Werden dann die Körper FV, QY vervollständigt, sage ich, wenn die Körper AB, CD gleich sind, dann stehen die Grundflächen im umgekehrten Verhältnis ihrer Höhen und es verhält sich dann die Grundfläche EH zur Grundfläche NP wie der Körper CD zum Körper AB.

Es ist AB gleich CD und der Körper AB gleich dem Körper BT, denn sie sind auf gleicher Grundfläche mit gleicher Höhe errichtet.
Aus den gleichen Gründen ist der Körper CD gleich dem Körper DX.
Damit ist der Körper BT gleich dem Körper DX.

Die Grundfläche FK verhält sich somit zur Grundfläche QR wie die Höhe des Körpers DX zur Höhe des Körpers BT. Da FK gleich EH und da QR gleich NP ist, verhält sich EH zu NP wie die Höhe des Körpers DX zur Höhe des Körpers BT.

Deshalb stehen die Grundflächen der Parallelepipede AB, CD im umgekehrten Verhältnis ihrer Höhen.

Stehen nun die Grundflächen der Parallelepipede AB, CD im umgekehrten Verhältnis ihrer Höhen, verhält sich also die Grundfläche EH zur Grundfläche NP wie die Höhe des Körpers CD zur Höhe des Körpers AB, dann, sage ich, ist der Körper AB gleich dem Körper CD.

Nach den gleichen Vergleichen wie vorher, wonach sich die Grundfläche EH zur Grundfläche NP verhält wie die Höhe des Körpers CD zur Höhe des Körpers AB, wobei EH gleich FK und NP gleich QR ist, verhält sich die Grundfläche FK zur Grundfläche QR wie die Höhe des Körpers CD zur Höhe des Körpers AB.

Da die Körper AB, CD die gleichen Höhen haben wie die Körper BT, DX, verhält sich die Grundfläche FK zur Grundfläche QR wie die Höhe des Körpers DX zur Höhe des Körpers BT. Somit stehen die Grundflächen der Parallelepipede BT, DX im umgekehrten Verhältnis ihrer Höhen, wobei der Körper BT gleich dem Körper DX ist.

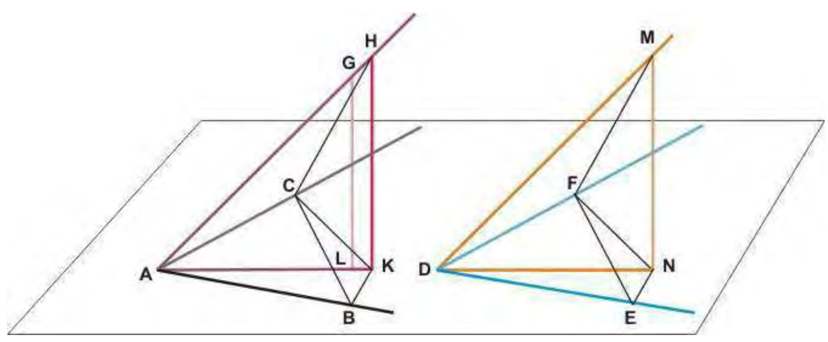
Der Körper BT ist gleich dem Körper BA, der Körper DX ist gleich dem Körper DC, also ist das Parallelepiped AB gleich dem Parallelepiped CD, was zu zeigen war.

XI.35.

Die Winkel, die von Geraden gebildet werden, die jeweils über zwei einen gleichen Winkel bildenden Geraden durch deren Schnittpunkt verlaufen und mit ihnen gleiche Winkel einschließen, mit den Geraden durch ihre Schnittpunkte und die Fußpunkte der Senkrechten in beliebigen ihrer Punkte zu den Ebenen, in denen jene Geraden liegen, sind gleich.

Wenn die Geraden mit den gleichen ebenen Winkeln BAC, EDF mit den über ihnen durch A, D verlaufenden Geraden AG, DM gleiche Winkel bilden und mit ihnen gleiche Winkel einschließen, also der Winkel MDE gleich dem Winkel GAB und der Winkel MDF gleich dem Winkel GAC ist, und von beliebigen Punkten G, M auf AG, DM die Senkrechten mit den Fußpunkten N, L auf den Ebenen errichtet werden, in denen BAC, EDF liegen, und LA, ND gezogen werden, dann, sage ich, ist der Winkel GAL gleich dem Winkel MDN.

Denn wird auf der Geraden AG die Strecke AH gleich der Strecke DM abgetragen und vom Punkt H die zu GL parallele HK gezogen, dann ist, da GL senkrecht auf der Ebene steht, in der BAC liegt, auch HK senkrecht zu dieser Ebene.



Durch die Punkte K, N sind sodann die zu AB, AC, DF, DE Senkrechten KC, NF, KB, NE zu errichten und es sind HC, CB, MF, FE zu ziehen.

Das Quadrat über HA ist gleich den Quadraten über HK, KA zusammen und das Quadrat über KA ist gleich den Quadraten über KC, CA zusammen.
Somit ist das Quadrat über HA gleich den Quadraten über HK, KC, CA zusammen.
Da das Quadrat über HC gleich den Quadraten über HK, KC zusammen ist, ist das Quadrat über HA gleich den Quadraten über HC, CA zusammen, womit der Winkel HCA ein rechter Winkel ist.
Aus den gleichen Gründen ist DFM ein rechter Winkel.
Also sind ACH, DFM gleiche Winkel.

Da auch die Winkel HAC, MDF gleiche Winkel sind, sind in den Dreiecken MDF, HAC zwei Winkel des einen gleich zwei Winkeln des anderen und ist eine Seite, die einem der gleichen Winkel gegenüber liegt, der Seite im anderen Dreieck gleich, nämlich HA, die MD gleich ist, womit auch die übrigen Seiten den übrigen Seiten im anderen Dreieck gleich sind [wie I.26.].
Damit ist AC gleich DF.

Auf die gleiche Weise ist zu zeigen, dass AB gleich DE ist, womit die beiden Strecken CA, AB den beiden Strecken FD, DE gleich sind.
Da der Winkel CAB gleich dem Winkel FDE ist und BC gleich EF, sind die Dreiecke CAB, FDE gleich und damit auch ihre übrigen Winkel.
Somit ist der Winkel ACB gleich dem Winkel DFE.

Da die Winkel ACK, DFN gleich sind, denn beide sind rechte Winkel, ist der Winkel BCK gleich dem Winkel EFN.
Aus den gleichen Gründen ist der Winkel CBK gleich dem Winkel FEN.
Damit sind in den Dreiecken BCK, EFN zwei Winkel des einen gleich zwei Winkeln des anderen und ist eine Seite, die einem der gleichen Winkel gegenüber liegt, der Seite im anderen Dreieck gleich, nämlich BC, die EF gleich ist, womit auch die übrigen Seiten den übrigen Seiten im anderen Dreieck gleich sind. Also ist CK gleich FN.

Da AC gleich DF ist, sind die beiden Seiten AC, CK den beiden Seiten DF, FN gleich, wobei sie den gleichen Winkel einschließen, womit AK gleich DN ist.

Das Quadrat über AH ist gleich dem Quadrat über DM, denn AH ist gleich DM.
Das Quadrat über AH ist gleich den Quadraten über AK, KH zusammen, denn AKH ist ein rechter Winkel, und das Quadrat über DM ist gleich den Quadraten über DN, NM zusammen, denn DNM ist ein rechter Winkel.

Da die Quadrate über AK, KH zusammen gleich den Quadraten über DN, NM zusammen sind, denn das Quadrat über AK ist gleich dem Quadrat über DN, ist das Quadrat über KH gleich dem Quadrat über NM, womit KH gleich NM ist.
In den Dreiecken HAK, MDN sind die beiden Seiten HA, AK den beiden Seiten MD, DN gleich und da, wie gezeigt, KH gleich NM ist, ist der Winkel HAK gleich dem Winkel MDN [wie I.8.].

Deshalb schließen die verlangten Geraden gleiche Winkel ein, was zu zeigen war.

Zusatz:

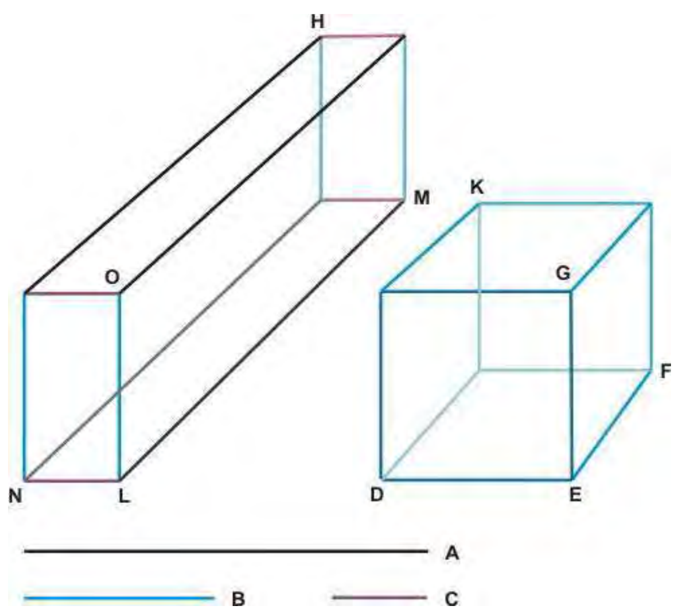
Offensichtlich sind die Senkrechten gleich, die durch gleich weit vom Schnittpunkt entfernte Punkte auf Geraden, die jeweils über zwei einen gleichen Winkel bildenden Geraden durch deren Schnittpunkt verlaufen und mit ihnen gleiche Winkel bilden, auf den Ebenen errichtet werden, in denen jene Geraden liegen.

XI.36.

Das Parallelepiped, dessen Kanten gleich drei Strecken sind, die in fortlaufend gleicher Proportion stehen, ist gleich dem gleichseitigen Parallelepiped mit den gleichen Winkeln, dessen Kanten gleich der mittleren Strecke sind.

Wenn drei Strecken A, B, C in fortlaufend gleicher Proportion stehen, also A zu B sich verhält wie B zu C, dann, sage ich, der Körper, dessen Kanten gleich A, B, C sind, ist gleich dem Körper, dessen Kanten gleich B sind, also gleichseitig ist, und mit den gleichen Winkeln wie der andere Körper errichtet ist.

Denn wenn im Punkt E der Raumwinkel aus den Winkeln DEG, GEF, FED besteht und DE, GE, EF gleich B sind, damit das Parallelepiped EK vervollständigt wird, wenn die Kante LM gleich A und an LM im Punkt L der gleiche Raumwinkel wie im Punkt E angelegt wird, damit also aus NLO, OLM, MLN besteht, wenn die Kante LO gleich B und die Kante LN gleich C ist, wobei sich A zu B verhält wie B zu C, somit A gleich LM, B gleich LO und C gleich LN ist, dann verhält sich LM zu EF wie DE zu LN.



Die einander entsprechenden Seiten, die die gleichen Winkel NLM, DEF einschließen, stehen im umgekehrten Verhältnis, somit ist MN gleich DF [wie VI.14.].

Da die ebenen Winkel DEF, NLM gleich sind und an ihnen die gleichen Strecken LO, EG mit den gleichen Winkeln errichtet sind, sind die Senkrechten in den Punkten G, O auf den Ebenen in denen DEF, NLM liegen, gleich [wie XI.35. Zusatz]. Somit haben die Körper LH, EK die gleiche Höhe.

Parallelepipede, die auf gleicher Grundfläche mit gleicher Höhe errichtet sind, sind gleich [wie XI.31.]. Also ist der Körper HL dem Körper EK gleich.

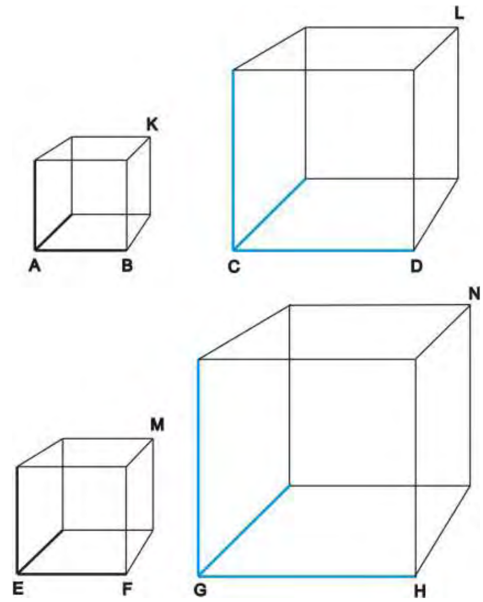
Die Kanten des Körpers LH sind den Strecken A, B, C gleich und die Kanten des Körpers EK sind gleich der Strecke B.

Deshalb ist der Körper, dessen Kanten gleich A, B, C sind, gleich dem Körper, dessen Kanten gleich B sind, also gleichseitig ist, und mit den gleichen Winkeln wie der andere Körper errichtet ist, was zu zeigen war.

XI.37.

Vier ähnliche und ähnlich errichtete parallelepipede Körper, deren Kanten vier Strecken gleich sind, die in Proportion stehen, stehen in Proportion und die Strecken, die den Kanten von vier ähnlichen und ähnlich errichteten, in Proportion stehenden parallelepipeden Körpern gleich sind, stehen in Proportion.

Wenn die vier Strecken AB, CD, EF, GH in Proportion stehen, sich also AB zu CD verhält wie EF zu GH, und vier ähnliche Parallelepipede KA, LC, ME, NG ähnlich errichtet werden, deren Kanten gleich den Strecken AB, CD, EF, GH sind, dann, sage ich, verhalten sich die Körper KA zu LC wie ME zu NG.



Denn da das Parallelepiped KA dem Parallelepiped LC ähnlich ist, verhält sich KA zu LC wie der Kubus über AB zum Kubus über CD [wie XI.33.].
Aus den gleichen Gründen verhält sich das Parallelepiped ME zum Parallelepiped NG wie der Kubus über EF zum Kubus über GH.

Da sich AB zu CD verhält wie EF zu GH, verhält sich deshalb AK zu LC wie ME zu NG.

Wenn sich der Körper AK zum Körper LC verhält wie der Körper ME zum Körper NG, dann, sage ich, verhält sich AB zu CD wie EF zu GH.

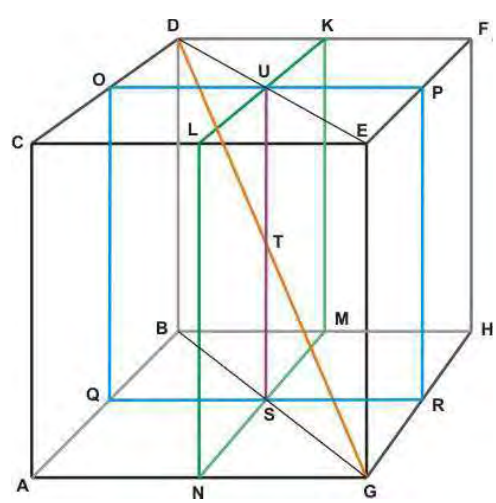
Denn da sich KA zu LC verhält wie der Kubus über AB zum Kubus über CD und da sich ME zu NG verhält wie der Kubus über EF zum Kubus über GH [wie XI.33.], und da sich KA zu LC verhält wie ME zu NG, verhält sich AB zu CD wie EF zu GH.

Deshalb verhalten sich vier ähnliche und ähnlich errichtete parallelepipede Körper wie gefordert, was zu zeigen war.

XI.38.

Werden die gegenüberliegenden Seiten eines Würfels von schneidenden Ebenen jeweils in zwei gleiche Teile geteilt, dann wird die Diagonale des Würfels von den Ebenen und wird die Schnittgerade der Ebenen von der Diagonalen in zwei gleiche Teile geteilt.

Wenn im Würfel AF mit der Diagonalen DG die gegenüberliegenden Seiten CF, AH von den Ebenen KN, OR mit der Schnittgeraden US, die die Kanten des Würfels in den Punkten K, L, M, N, O, P, Q, R schneiden, jeweils in zwei gleiche Teile geteilt werden, dann, sage ich, sind die Abschnitte der Schnittgeraden UT, TS gleich und sind die Abschnitte der Diagonalen DT, TG gleich.



Es sind DU, UE, BS, SG zu ziehen.

Die Geraden DO, PE sind parallel, somit sind die Wechselwinkel DOU, UPE gleich [wie I.29.].

Die Strecke DO ist gleich der Strecke PE und die Strecke OU ist gleich der Strecke UP, und da sie gleiche Winkel einschließen, ist DU gleich UE und sind die Winkel DUO, PUE gleich. Damit sind auch die übrigen Winkel der Dreiecke ODU, PEU gleich, also ist der Winkel OUD gleich dem Winkel PUE und ist DUE eine Gerade.

Aus den gleichen Gründen ist BSG eine Gerade und die Strecke BS gleich der Strecke SG. Da CA, DB gleich und parallel sind, da CA, EG gleich und parallel sind, da auch DB, EG gleich und parallel sind und sie die Geraden DE, BG schneiden, sind DE, BG parallel [wie I.33.]. Somit sind die Wechselwinkel EDT, BGT gleich, womit auch die Winkel DTU, GTS gleich sind [wie I.15.].

Da in den beiden Dreiecken DTU, GTS zwei Winkel und eine Seite, die einem der Winkel gegenüber liegt, gleich sind, denn DU ist gleich GS, weil DE, BG in zwei gleiche Teile geteilt sind, sind auch ihre übrigen Seiten gleich. Also ist DT gleich TG und ist UT gleich TS.

Deshalb wird dann, wenn die gegenüberliegenden Seiten eines Würfels von Ebenen in zwei gleiche Teile geteilt werden, die Diagonale des Würfels von den Ebenen und die Schnittgerade der Ebenen von der Diagonalen in zwei gleiche Teile geteilt, was zu zeigen war.

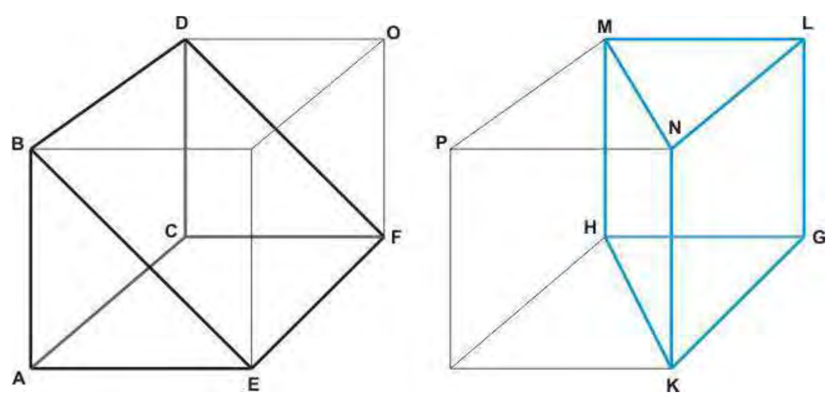
XI.39.

Zwei Prismen gleicher Höhe, wovon das eine ein Parallelogramm und das andere ein Dreieck zur Grundfläche hat, wobei das Parallelogramm das Doppelte des Dreiecks ist, sind gleich.

Wenn die beiden Prismen ABCDEF, GHKLMN die gleiche Höhe haben und die Grundfläche des einen das Parallelogramm AF, die Grundfläche des anderen das Dreieck GHK ist, wobei AF dem Doppelten von GHK gleich ist, dann, sage ich, sind die Körper ABCDEF, GHKLMN gleich.

Denn wenn die Körper AO, GP vervollständigt werden, dann ist, da das Parallelogramm AF das Doppelte des Dreiecks GHK und da das Parallelogramm HK das Doppelte des Dreiecks GHK ist, AF gleich HK.

Da die Parallelepipede AO, GP mit gleicher Höhe auf gleichen Grundflächen errichtet sind, sind sie gleich [wie XI.31.].



Der Körper AO ist das Doppelte des Prismas ABCDEF und der Körper GP ist das Doppelte des Prismas GHKLMN.
Also ist der prismatische Körper ABCDEF dem prismatischen Körper GHKLMN gleich.

Deshalb sind zwei Prismen gleicher Höhe gleich, wovon das eine ein Parallelogramm und das andere ein Dreieck zur Grundfläche hat, wobei das Parallelogramm das Doppelte des Dreiecks ist, was zu zeigen war.