Euklid: Stoicheia

(Die Elemente des Euklid)

Buch XII.

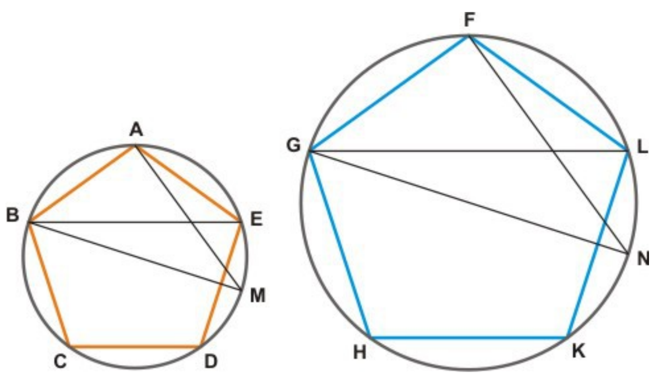
Über eingefügte Hypertextverknüpfungen kann der griechische Text in der Fassung von I. L. Heiberg aufgerufen werden.

XII.1.
Ähnliche Polygone, die einem Kreis einbeschrieben sind, stehen im Verhältnis der Quadrate über den Durchmessern der Kreise.

Wenn den Kreisen ABC, FGH mit den Durchmessern BM, GN die Polygone ABCDE, FGHKL einbeschrieben sind, dann, sage ich, verhält sich das Quadrat über BM zum Quadrat über GN wie das Polygon ABCDE zum Polygon FGHKL.

Denn werden BE, AM, GL, FN gezogen, dann, da das Polygon ABCDE dem Polygon FGHKL ähnlich ist, ist der Winkel BAE gleich dem Winkel GFL und es verhält sich BA zu AE wie GF zu FL.

Es ist somit in den Dreiecken BAE, GFL der Winkel BAE dem Winkel GFL gleich und es stehen die Seiten, die diese Winkel einschließen, in Proportion, womit die beiden Dreiecke ABE, FGL gleichwinklig sind, wobei die Winkel AEB, FLG gleich sind, da sie den entsprechenden Seiten in Proportion gegenüber liegen [wie VI.6.].



Da die Winkel AEB, AMB gleich sind, denn sie sind über gleichen Kreisbögen errichtet [wie III.27.], und ebenso FLG, FNG gleich sind, ist der Winkel AMB gleich dem Winkel FNG.
Die Winkel BAM, GFN sind gleich, denn es sind rechte Winkel [wie III.31.].
Damit sind die Dreiecke ABM, FGN gleichwinklig und es verhält sich BM zu GN wie BA zu GF [wie VI.4.]. Ähnliche Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate über entsprechenden Seiten [wie VI.19.], womit sich das Dreieck ABM zum Dreieck FGN verhält wie das Quadrat über BM zum Quadrat über GN [wie VI.19.].

Ähnliche Polygone sind in gleich viele ähnliche und einander entsprechende Dreiecke aufteilbar [wie VI.20.]. Somit verhält sich das Polygon ABCDE zum Polygon FGHKL wie das Quadrat über BA zum Quadrat über GF.

Also verhält sich das Quadrat über BM zum Quadrat über GN wie das Polygon ABCDE zum Polygon FGHKL.

Deshalb verhalten sich ähnliche Polygone, die einem Kreis einbeschrieben sind, wie die Quadrate über den Durchmessern, was zu zeigen war.

XII.2.

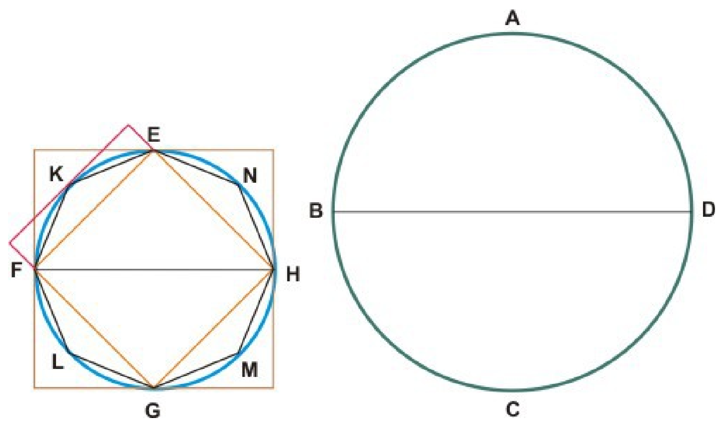
Kreise stehen im Verhältnis der Quadrate über ihren Durchmessern.

Wenn die Kreise ABCD, EFGH die Durchmesser BD, FH haben, dann, sage ich, verhält sich ABCD zu EFGH wie das Quadrat über BD zum Quadrat über FH.

Denn wenn nicht, dann ist das Verhältnis der Quadrate über den Durchmessern gleich dem Verhältnis von ABCD zu einer Fläche S, die kleiner oder größer ist als die des Kreises EFGH.

Ist nun die Fläche S kleiner als EFGH, dann ist in den Kreis EFGH das Quadrat EFGH einzubeschreiben [wie IV.6.]; dies ist dann größer ist als die Hälfte des Kreises EFGH.

Denn werden in den Punkten E, F, G, H Tangenten angelegt und wird damit das Quadrat errichtet, das dem Kreis EFGH umschrieben ist, dann ist die Hälfte des Quadrats das EFGH umschrieben ist, gleich dem Quadrat, das EFGH einbeschrieben ist.
Da die Hälfte des Quadrats, das EFGH umschrieben ist, größer ist als die Hälfte des Kreises EFGH, ist das dem Kreis einbeschriebene Quadrat größer als die Hälfte des Kreises EFGH.



Werden die Kreisbögen EF, FG, GH, HE in den Punkten K, L, M, N jeweils in zwei gleiche Teile geteilt und werden die Sekanten EK, KF, FL, LG, GM. MH, HN, NE gezogen, dann ist jedes der Dreiecke EKF, FLG, GMH, HNE größer als die Hälfte des Kreisabschnitts, in dem sie liegen.

Denn werden in den Punkten K, L, M, N Tangenten angelegt und werden damit über den Strecken EF, FG, GH, HE Parallelogramme vervollständigt, dann sind die Dreiecke EKF, FLG, GMH, HNE jeweils gleich der Hälfte dieser Parallelogramme.
Da jedes dieser Parallelogramme größer ist als der Kreisabschnitt, der in ihm liegt, ist auch jeweils die Hälfte des Parallelogramms größer als die Hälfte des Kreisabschnitts.
Jedes der Dreiecke EKF, FLG, GMH, HNE ist damit größer als die Hälfte des Kreisabschnitts, in dem es liegt.

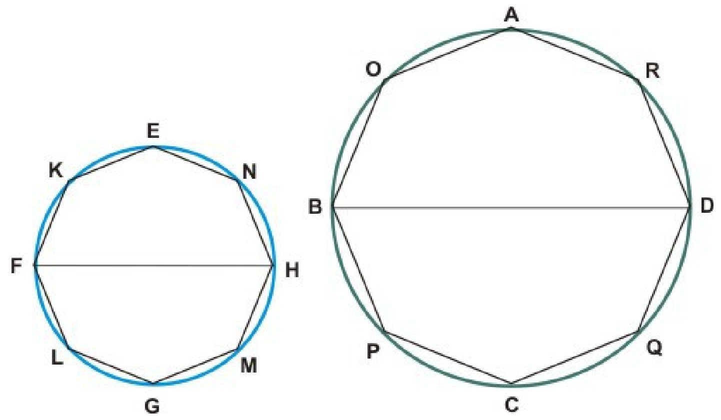
Der Unterschied der Fläche des Kreises zu der des ihm einbeschriebenen Quadrats wird mit der Halbierung der Kreisbögen und dem Eintragen der Sekanten um mehr als die Hälfte verringert.

Werden nun die Halbierungen der Kreisbögen und die darauf folgenden Schritte fortgesetzt, dann wird sich als Unterschied der Fläche des Kreises zur Fläche der Polygone, die ihm einbeschrieben sind, jeweils ein Rest ergeben, der um mehr als die Hälfte kleiner ist, als der jeweils vorhergehende Unterschied.

Dieser Rest wird kleiner werden als der Unterschied der Fläche des Kreises EFGH zur Fläche S, denn wird von der größeren von zwei ungleichen Größen mehr als die Hälfte weggenommen und vom Rest wiederum mehr als die Hälfte und wird dieses fortgesetzt, dann wird sich ein Rest ergeben, der kleiner ist als die kleinere der beiden Größen [wie X.1.].

Ist nun das Polygon EKFLGMHN größer als S, dann ist dem Kreis ABCD ein ähnliches Polygon AOBPCQDR einzubeschreiben.

Das Quadrat über BD verhält sich dann zum Quadrat über FH wie das Polygon AOBPCQDR zum Polygon EKFLGMHN [wie XII.1.].



Verhält sich das Quadrat über BD zum Quadrat über FH wie der Kreis ABCD zur Fläche S, dann verhält sich der Kreis ABCD zu S wie das Polygon AOBPCQDR zum Polygon EKFLGMHN.
Es verhält sich dann, nach Umordnung [wie V.16.], der Kreis ABCD zum Polygon AOBPCQDR wie S zum Polygon EKFLGMHN.

Da der Kreis ABCD größer ist als das Polygon AOBPCQDR ist dann S größer als das Polygon EKFLGMHN, was nicht möglich ist, denn S ist kleiner als das Polygon EKFLGMHN.
Also verhält sich das Quadrat über BD zum Quadrat über FH nicht wie der Kreis ABCD zu einer Fläche, die kleiner ist als der Kreis EFGH.

Auf gleiche Weise ist zu zeigen, dass sich das Quadrat über FH zum Quadrat über BD sich nicht verhält wie der Kreis EFGH zu einer Fläche, die kleiner ist als der Kreis ABCD.

Es verhält sich auch nicht, sage ich, das Quadrat über BD zum Quadrat über FH wie der Kreis ABCD zu einer Fläche, die größer ist als der Kreis EFGH.

Denn, wenn nicht, sei die Fläche S größer als EFGH.
In umgekehrten Verhältnissen [wie V.7. Zusatz] verhält sich dann das Quadrat über FH zum Quadrat über BD wie S zum Kreis ABCD.
Es verhält sich dann S zum Kreis ABCD wie der Kreis EFGH zu einer Fläche, die kleiner ist als ABCD.
Das Quadrat über FH verhält sich dann zum Quadrat über BD wie der Kreis EFGH zu einer Fläche, die kleiner ist als der Kreis ABCD, was, wie gezeigt, nicht möglich ist.
Also verhält sich das Quadrat über BD zum Quadrat über FH nicht wie der Kreis ABCD zu einer Fläche, die größer ist als der Kreis EFGH.

Wie bereits gezeigt, verhält sich das Quadrat über BD zum Quadrat über FH auch nicht wie der Kreis ABCD zu einer Fläche, die kleiner ist als der Kreis EFGH. Also verhält sich das Quadrat über BD zum Quadrat über FH wie der Kreis ABCD zum Kreis EFGH.

Deshalb stehen Kreise im Verhältnis der Quadrate über ihren Durchmessern, was zu zeigen war.

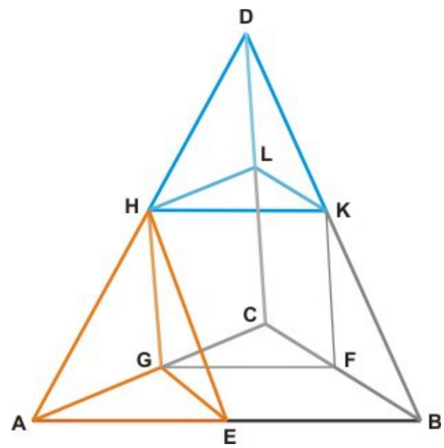
Zusatz:

Offensichtlich stehen Kreise im Verhältnis ähnlicher Polygone, die ihnen einbeschrieben sind. Denn sowohl Kreise wie ihnen einbeschriebene ähnliche Polygone stehen im Verhältnis der Quadrate über den Durchmessern der Kreise.

XII.3.

Jede Pyramide auf dreieckiger Grundfläche lässt sich in zwei gleiche, der ganzen ähnliche Pyramiden und in zwei gleiche Prismen aufteilen, die zusammen größer als die Hälfte der Pyramide sind.

Wenn auf dem Dreieck ABC eine Pyramide mit der Spitze D errichtet ist, dann, sage ich, lässt sich diese Pyramide in zwei gleiche, der ganzen ähnliche Pyramiden auf dreieckigen Grundflächen, die der ganzen Grundfläche ähnlich sind, und in zwei gleiche Prismen aufteilen, die zusammen größer als die Hälfte der Pyramide sind.



Es sind die Kanten AB, BC, CA, AD, DB, DC in den Punkten E, F, G, H, K, L jeweils in zwei gleiche Teile zu teilen und es ist HE, EG, GH, HK, KL, LH, KF, FG zu ziehen.

Da dann AE gleich EB und AH gleich DH ist, ist EH parallel zu DB. Aus den gleichen Gründen ist HK parallel zu AB. HEBK ist damit ein Parallelogramm.

Da die Strecke HK gleich EB ist und EB gleich EA, ist EA gleich HK.

Da AH gleich HD ist, sind von den beiden Strecken EA, AH jeweils eine der andern der beiden Strecken KH, HD gleich, wobei die von ihnen eingeschlossenen Winkel EAH, KHD gleich sind. Damit ist EH gleich KD.
Also ist das Dreieck AEH dem Dreieck HKD gleich und ähnlich.
Aus den gleichen Gründen ist das Dreieck AHG dem Dreieck HLD gleich und ähnlich.

Da die schneidenden Geraden EH, HG den schneidenden Geraden KD, DL parallel sind und nicht in der gleichen Ebene liegen, bilden sie gleiche Winkel [wie XI.10.].
Also sind die Winkel EHG, KDL gleich.

Da von den beiden Strecken EH, HG jeweils eine der andern der beiden Strecken KD, DL gleich ist und die eingeschlossenen Winkel EHG, KDL gleich sind, ist EG gleich KL.
Damit ist das Dreieck EHG gleich und ähnlich dem Dreieck KDL.
Aus den gleichen Gründen ist das Dreieck AEG dem Dreieck HKL gleich und ähnlich.

Somit ist die Pyramide mit der Grundfläche AEG und der Spitze H gleich und ähnlich der Pyramide mit der Grundfläche HKL und der Spitze D.

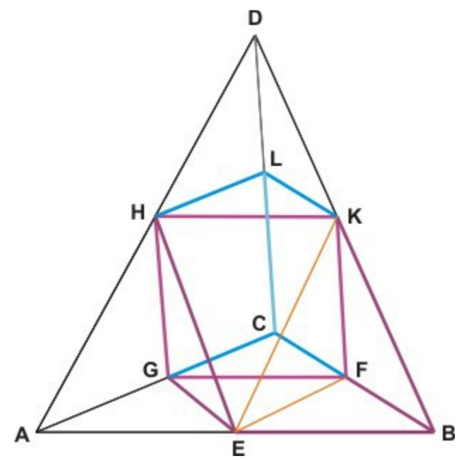
Im Dreieck ADB ist HK parallel zur Seite AB gezogen. Also sind die Dreiecke ADB, DHK gleichwinklig [wie I.29.]. Da ihre Seiten im gleichen Verhältnis stehen, ist das Dreieck ADB dem Dreieck DHK ähnlich.
Aus den gleichen Gründen ist das Dreieck DBC dem Dreieck DKL und ist das Dreieck ADC dem Dreieck DLH gleich und ähnlich.

Da die schneidenden Geraden BA, AC den schneidenden Geraden KH, HL parallel sind und nicht in der gleichen Ebene liegen, bilden sie gleiche Winkel, womit der Winkel BAC gleich dem Winkel KHL ist. BA verhält sich zu AC wie KH zu HL. Damit ist das Dreieck ABC dem Dreieck HKL ähnlich.

Somit ist die Pyramide mit der dreieckigen Grundfläche ABC und der Spitze D gleich und ähnlich der Pyramide mit der dreieckigen Grundfläche HKL und der Spitze D.

Die Pyramide mit der dreieckigen Grundfläche HKL und der Spitze D ist der Pyramide mit der dreieckigen Grundfläche AEG und der Spitze H, wie gezeigt, ähnlich. Also sind die Pyramiden AEGH, HKLD der ganzen Pyramide ABCD ähnlich.

Da BF gleich FC ist, ist das Parallelogramm EBFG das Doppelte des Dreiecks GFC.



Da die beiden Prismen EBFGHK, GFCHKL mit der gleichen Höhe, das eine auf einem Parallelogramm, das andere auf einem Dreieck, errichtet sind und das Parallelogramm das Doppelte des Dreiecks ist, sind diese Prismen gleich, wobei das eine von den beiden Dreiecken BKF, EHG und den drei Parallelogrammen EBFG, EBKH, HKFG und das andere von den beiden Dreiecken GFC, HKL und den drei Parallelogrammen KFCL, LCGH, HKFG begrenzt wird [wie XI.39.].

Offensichtlich ist jedes der Prismen, das eine, das von dem Parallelogramm EBFG, und der Strecke HK, und das andere, das von der dreieckigen Grundfläche GFC, und dem Dreieck HKL begrenzt wird, größer als eine der Pyramiden, deren Grundflächen AEG, HKL und deren Spitzen H, D sind, denn wenn EF, EK gezogen werden, ist das Prisma EBFGHK größer als die Pyramide mit der dreieckigen Grundfläche EBF und der Spitze K, und da die Pyramide EBFK der Pyramide AEGH gleich und ähnlich ist, ist somit das Prisma EBFGHK größer als die Pyramide AEGH.

Da die Prismen EBFGHK, GFCHKL gleich und da die Pyramiden AEGH, HKLD gleich sind, ist damit jedes dieser Prismen größer als eine dieser Pyramiden.

Deshalb kann die ganze Pyramide mit der dreieckigen Grundfläche ABC und der Spitze D in zwei gleiche Pyramiden und in zwei gleich Prismen aufgeteilt werden, wobei die beiden Prismen zusammen größer sind als die Hälfte der ganzen Pyramide, was zu zeigen war.

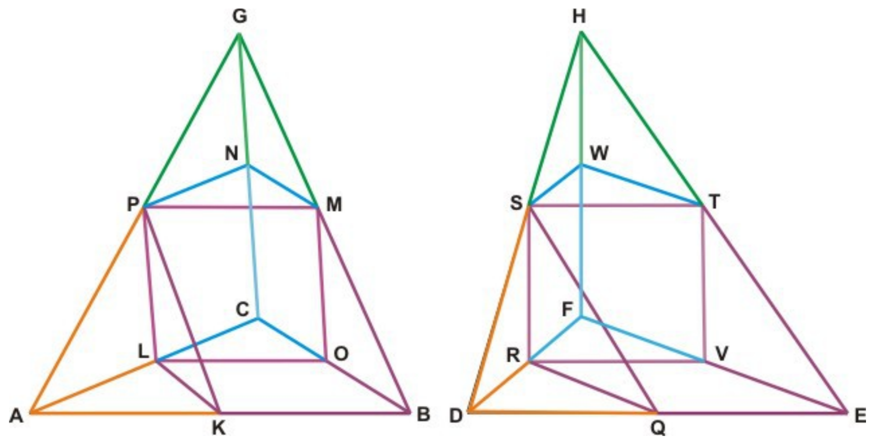
XII.4.

Werden zwei gleich hohe Pyramiden mit dreieckiger Grundfläche jeweils in zwei gleiche, der ganzen ähnliche Pyramiden und in zwei gleiche Prismen aufgeteilt, dann verhält sich die Grundfläche der einen Pyramide zur Grundfläche der anderen wie alle Prismen zusammen in der einen zu allen Prismen zusammen in der anderen Pyramide auch dann, wenn die Aufteilung der aufgeteilten Pyramiden auf gleiche Weise fortgesetzt wird.

Wenn zwei gleich hohe Pyramiden mit den dreieckigen Grundflächen ABC, DEF und den Spitzen G, H jeweils in zwei gleiche Pyramiden, die der ganzen ähnlich sind, und in zwei gleiche Prismen aufgeteilt werden, dann, sage ich, verhält sich die Grundfläche ABC zur Grundfläche DEF wie alle Prismen in der Pyramide ABCG zusammen zu allen Prismen in der Pyramide DEFH zusammen.

Denn da BO gleich OC und da AL gleich LC ist, ist die Strecke LO parallel zur Kante AB und somit das Dreieck ABC ähnlich dem Dreieck LOC.
Aus den gleichen Gründen ist das Dreieck DEF ähnlich dem Dreieck RVF.

Da die Strecke BC das Doppelte der Strecke CO und da die Strecke EF das Doppelte der Strecke FV ist, verhält sich BC zu CO wie EF zu FV.



Auf den Strecken BC, CO sind die ähnlichen Dreiecke ABC, LOC ähnlich errichtet und auf den Strecken EF, FV die ähnlichen Dreiecke DEF, RFV. Also verhält sich das Dreieck ABC zum Dreieck LOC wie das Dreieck DEF zum Dreieck RVF und, nach Umordnung [wie V.16.], verhält sich das Dreieck ABC zum Dreieck DEF wie das Dreieck LOC zum Dreieck RVF.

Wie das Dreieck LOC zum Dreieck RVF verhält sich aber auch das Prisma mit der dreieckigen Grundfläche LOC, dem das Dreieck PMN gegenüberliegt, zum Prisma mit der dreieckigen Grundfläche RVF, dem das Dreieck STW gegenüberliegt, denn das Doppelte der Dreiecke sind Parallelogramme, die im gleichen Verhältnis stehen wie die über ihnen errichteten Parallelepipede [wie XI.32.], womit auch die Dreiecke im gleichen Verhältnis stehen wie die über ihnen errichteten Prismen [wie V.15.], denn Verhältnisse sind gleich, die demselben Verhältnis gleich sind [wie V.11.] [1].

Wie das Dreieck ABC zum Dreieck DEF verhält sich auch das Prisma mit der dreieckigen Grundfläche LOC, dem das Dreieck PMN gegenüberliegt, zum Prisma mit der dreieckigen Grundfläche RVF, dem das Dreieck STW gegenüberliegt.

Da die beiden Prismen in der Pyramide ABCG, wie die beiden Prismen in der Pyramide DEFH gleich sind, steht im gleichen Verhältnis wie die erwähnten Prismen auch das Prisma mit der Grundfläche, dem Parallelogramm KBOL, dem die Strecke PM gegenüberliegt, zum Prisma mit der Grundfläche, dem Parallelogramm QEVR, dem die Strecke ST gegenüberliegt.

Es verhält sich sowohl das Prisma KBOLPM zum Prisma QEVRST wie auch das Prisma LOCPMN zum Prisma RVFSTW wie die dreieckige Grundfläche ABC zur dreieckigen Grundfläche DEF und damit verhalten sich die beiden Prismen in der einen Pyramide zusammen zu den beiden Prismen in der anderen Pyramide zusammen wie die Grundfläche der einen zur Grundfläche der anderen Pyramide [wieV.12.].

Werden nun die Pyramiden PMNG, STWH in zwei Pyramiden und zwei Prismen aufgeteilt, stehen diese jeweils im Verhältnis der Grundfläche PMN zur Grundfläche STW, somit auch die beiden Prismen in der Pyramide PMNG zu den beiden Prismen in der Pyramide STWH.

Die Grundfläche PMN verhält sich zur Grundfläche STW wie die Grundfläche ABC zur Grundfläche DEF und da die Dreiecke PMN, STW den Dreiecken LOC, RVF gleich sind, stehen auch diese im Verhältnis wie ABC zu DEF und ebenso auch die Prismen in der einen zu den Prismen in der anderen Pyramide.

[1] So bei Ratdolt

Auf dieselbe Weise ist zu zeigen, dass alle Prismen in der einen Pyramide zusammen zu allen Prismen in der anderen Pyramide zusammen im Verhältnis wie ABC zu DEF stehen, wenn jeweils gleich viele weitere Pyramiden in den aufgeteilten Pyramiden aufgeteilt werden.

Deshalb stehen jeweils gleich viele Prismen in den Pyramiden ABCG, DEFH wie die Grundfläche der einen zur Grundfläche der anderen Pyramide, was zu zeigen war.

Anmerkung:

Sind die Pyramiden A, D der gleichen Höhe, dann ist für ihre Grundflächen ABC, DEF und alle natürlichen Zahlen k (mit XII.7.]:

ABC : DEF = $(3/4 + 3/4^2 + 3/4^3 + ... + 3/4^k) \cdot A : (3/4 + 3/4^2 + 3/4^3 + ... + 3/4^k) \cdot D$

und es ist $(3/4 + 3/4^2 + 3/4^3 + ... + 3/4^k) \cdot A < A$.

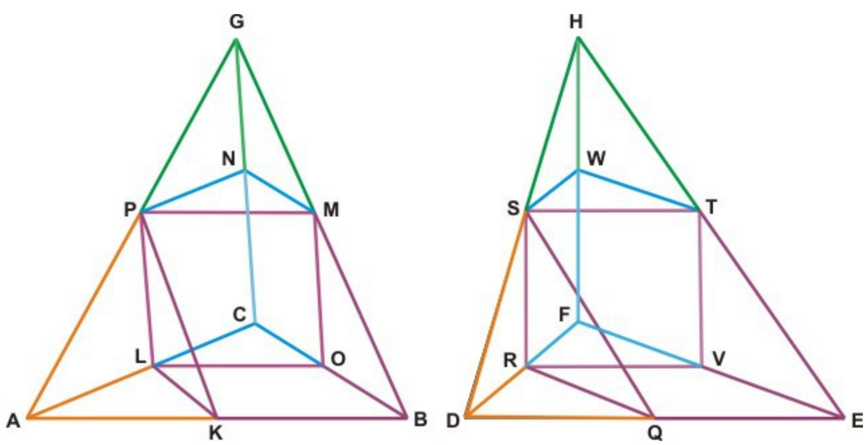
XII.5.

Gleich hohe Pyramiden auf dreieckiger Grundfläche stehen im Verhältnis ihrer Grundflächen.

Wenn die Dreiecke ABC, DEF die Grundflächen zweier gleich hoher Pyramiden mit den Spitzen G, H sind, dann, sage ich, verhält sich die Grundfläche ABC zur Grundfläche DEF wie die Pyramide ABCG zur Pyramide DEFH.

Denn wenn ABCG zu DEFH sich nicht verhält wie ABC zu DEF, dann besteht dieses Verhältnis von ABCG zu einem Körper, der kleiner oder größer ist als DEFH.

Ist nun dieser Körper X kleiner als die Pyramide DEFH und ist DEFH in zwei gleiche Pyramiden, die der ganzen ähnlich sind, und in zwei gleiche Prismen aufgeteilt, dann sind diese beiden Prismen zusammen größer als die Hälfte der ganzen Pyramide.



Es sind dann die durch die Aufteilungen erstellten Pyramiden ebenso aufzuteilen und es ist dies wiederum solange fortzusetzen bis die bei diesem Schritt erstellten Pyramiden zusammen kleiner sind als der Unterschied zwischen der Pyramide DEFH und dem Körper X [wie X.1.].
Alle Prismen in der Pyramide DEFH zusammen sind dann größer als der Körper X.

Wird die Pyramide ABCG ebenso oft aufgeteilt wie die Pyramide DEFH, dann verhält sich die Grundfläche ABC zur Grundfläche DEF wie alle Prismen in der Pyramide ABCG zusammen zu allen Prismen in der Pyramide DEFH zusammen [wie XII.4.].

Steht die Grundfläche ABC zur Grundfläche DEF im Verhältnis der Pyramide ABCG zum Körper X, dann stehen auch die Prismen in der Pyramide ABCG zusammen zu den Prismen in der Pyramide DEFH zusammen in diesem Verhältnis und, im umgeordneten Verhältnis, verhält sich die Pyramide ABCG zu den Prismen in ihr wie der Körper X zu den Prismen in der Pyramide DEFH.

Da die Pyramide ABCG größer ist als die Prismen in ihr, ist dann auch der Körper X größer als alle Prismen zusammen in der Pyramide DEFH, was nicht möglich ist, denn er ist kleiner. Also steht die Grundfläche ABC zur Grundfläche DEF nicht in dem Verhältnis, in dem die Pyramide ABCG zu einem Körper steht, der kleiner ist als die Pyramide DEFH.

Auf gleiche Weise ist zu zeigen, dass die Pyramide DEFH zu einem Körper, der kleiner ist als die Pyramide ABCG, nicht in dem Verhältnis steht wie die Grundfläche DEF zur Grundfläche ABC.

Es steht aber auch, sage ich zudem, kein Körper, der größer ist als die Pyramide DEFH, zur Pyramide ABCG im Verhältnis der Grundfläche DEF zur Grundfläche ABC.

Denn wenn doch ein Körper X in diesem Verhältnis steht, dann steht die Grundfläche DEF zur Grundfläche ABC im Verhältnis des Körper X zur Pyramide ABCG. Da sich dann die Grundfläche DEF zur Grundfläche ABC verhält wie die Pyramide DEFH zu einem Körper, der kleiner ist als die Pyramide ABCG, verhält sich dann der Körper X zur Pyramide ABCG wie die Pyramide DEFH zu einem Körper der kleiner ist als die Pyramide ABCG.

Die Grundfläche DEF verhält sich dann zur Grundfläche ABC wie die Pyramide DEFH zu einem Körper der kleiner ist als die Pyramide ABCG, was wie gezeigt, nicht möglich ist. Also steht kein Körper, der größer ist als die Pyramide DEFH, im Verhältnis zur Pyramide ABCG wie die Grundfläche DEF zur Grundfläche ABC.

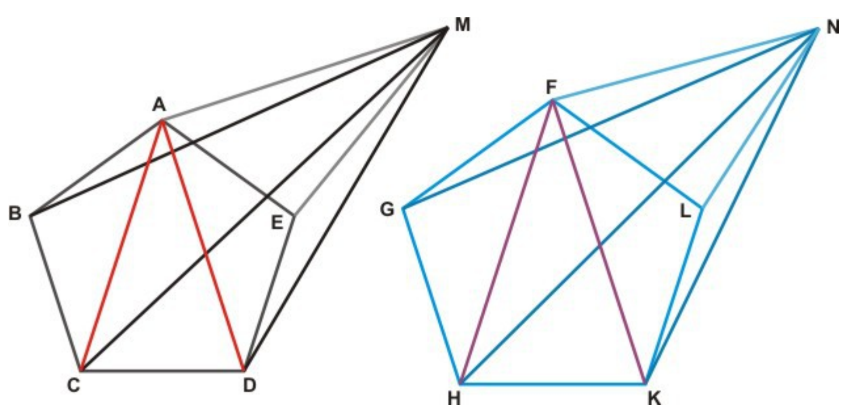
Da, wie gezeigt, auch kein Körper, der kleiner ist, in diesem Verhältnis steht, verhält sich die Grundfläche ABC zur Grundfläche DEF wie die Pyramide ABCG zur Pyramide DEFH.

Deshalb stehen gleich hohe Pyramiden auf dreieckiger Grundfläche im Verhältnis ihrer Grundflächen, was zu zeigen war.

XII.6.

Pyramiden gleicher Höhe, deren Grundflächen Polygone sind, stehen im Verhältnis ihrer Grundflächen.

Wenn zwei gleich hohe Pyramiden die Polygone ABCDE, FGHKL als Grundflächen und M, N als Spitzen haben, dann, sage ich, verhält sich die Grundfläche ABCDE zur Grundfläche FGHKL wie die Pyramide ABCDEM zur Pyramide FGHKLN.



Denn werden AC, AD, FH, FK gezogen, dann sind ABCM, ACDM zwei Pyramiden gleicher Höhe mit dreieckiger Grundfläche, die im Verhältnis ihrer Grundflächen stehen [wie XII.5.].

Somit verhält sich das Dreieck ABC zum Dreieck ACD wie die Pyramide ABCM zur Pyramide ACDM. Das Viereck ABCD verhält sich deshalb zum Dreieck ACD wie die Pyramide ABCDM zur Pyramide ACDM [wie V.18.].

Da sich das Dreieck ACD zum Dreieck ADE verhält die Pyramide ACDM zur Pyramide ADEM, verhält sich aufgrund Gleichheit [wie V.22.] das Viereck ABCD zum Dreieck ADE wie die Pyramide ABCDM zur Pyramide ADEM und verhält sich deshalb das Polygon ABCDE zum Dreieck ADE wie die Pyramide ABCDEM zur Pyramide ADEM.

Auf gleiche Weise ist zu zeigen, dass das Polygon FGHKL zum Dreieck FGH verhält wie die Pyramide FGHKLN zur Pyramide FGHN.

Die Pyramiden ADEM, FGHN haben dreieckige Grundflächen und gleiche Höhen, also verhält sich die Grundfläche ADE zur Grundfläche FGH wie die Pyramide ADEM zur Pyramide FGHN. Aufgrund Gleichheit [wie V.22.] verhält sich damit das Polygon ABCDE zum Dreieck FGH wie die Pyramide ABCDEM zur Pyramide FGHN.

Da sich das Dreieck FGH zum Polygon FGHKL verhält wie die Pyramide FGHN zur Pyramide FGHKLN, verhält sich aufgrund Gleichheit das Polygon ABCDE zur Polygon FGHKL wie die Pyramide ABCDEM zur Pyramide FGHKLN.

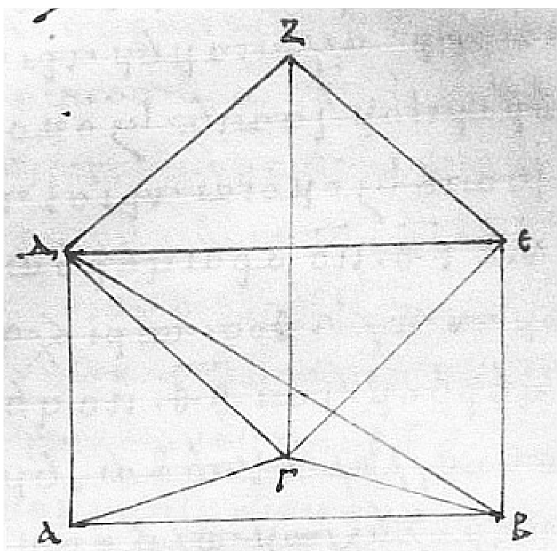
Deshalb stehen Pyramiden gleicher Höhe, deren Grundflächen Polygone sind, im Verhältnis ihrer Grundflächen, was zu zeigen war.

XII.7.

Jedes Prisma ist in drei gleiche Pyramiden mit dreieckiger Grundfläche aufteilbar.

Das Prisma ΑΒΓΔΕΖ, dessen Grundfläche das Dreieck ΑΒΓ ist, dem das Dreieck ΔΕΖ gegenüberliegt, ist, sage ich, in drei gleiche Pyramiden mit dreieckiger Grundfläche aufteilbar.

Denn werden ΒΔ, ΕΓ, ΓΔ gezogen, dann ist ΒΔ die Diagonale des Parallelogramms ΑΒΕΔ und ist das Dreieck ΑΒΔ gleich ΕΒΔ. [2]



Die Pyramide, deren Grundfläche das Dreieck ΑΒΔ und deren Spitze der Punkt Γ ist, ist somit gleich der Pyramide, deren Grundfläche ΔΕΒ und deren Spitze Γ ist.

Die Pyramide, deren Grundfläche ΔΕΒ und deren Spitze der Punkt Γ ist, ist dieselbe Pyramide, deren Grundfläche das Dreieck ΕΒΓ und deren Spitze der Punkt Δ ist.

Damit ist die Pyramide, deren Grundfläche das Dreieck ΑΒΔ und deren Spitze der Punkt Γ ist, gleich der Pyramide, deren Grundfläche das Dreieck ΕΒΓ und deren Spitze der Punkt Δ ist.

Da ΓΕ die Diagonale des Parallelogramms ΖΓΒΕ ist, ist das Dreieck ΓΕΖ gleich dem Dreieck ΓΒΕ und ist die Pyramide, deren Grundfläche das Dreieck ΒΓΕ und deren Spitze der Punkt Δ ist, gleich der Pyramide, deren Grundfläche das Dreieck ΕΓΖ und deren Spitze der Punkt Δ ist.

[2] Wiedergabe der Zeichnung des Arethas nach der Reproduktion seines Manuskripts.

Da wie gezeigt, die Pyramide, deren Grundfläche das Dreieck ΒΓΕ und deren Spitze der Punkt Δ ist, gleich der Pyramide ist, deren Grundfläche ΔΕΒ und deren Spitze der Punkt Γ ist, und da die Pyramide, deren Grundfläche das Dreieck ΓΕΖ und deren Spitze der Punkt Δ ist, gleich der Pyramide ist, deren Grundfläche das Dreieck ΑΒΔ und deren Spitze der Punkt Γ ist, deshalb ist das Prisma ΑΒΓΔΕΖ in drei gleiche Pyramiden aufgeteilt, deren Grundflächen Dreiecke sind.

Die Pyramide, deren Grundfläche das Dreieck ΑΒΔ und deren Spitze der Punkt Γ ist, ist dieselbe Pyramide, deren Grundfläche das Dreieck ΓΑΒ und deren Spitze der Punkt Δ ist.

Also ist gezeigt, dass die Pyramide, deren Grundfläche das Dreieck ΑΒΔ und deren Spitze der Punkt Γ ist, der dritte Teil des Prismas ist, dessen Grundfläche das Dreieck ΑΒΓ ist, dem das Dreieck ΔΕΖ gegenüberliegt, und auch dass die Pyramide, deren Grundfläche das Dreieck ΑΒΓ und deren Spitze der Punkt Δ ist, der dritte Teil des Prismas ist, dessen Grundfläche das Dreieck ΑΒΓ ist, dem das Dreieck ΔΕΖ gegenüberliegt.

Deshalb ist jede Pyramide der dritte Teil eines Prismas gleicher Grundfläche und Höhe, was zu zeigen war.

XII.8.

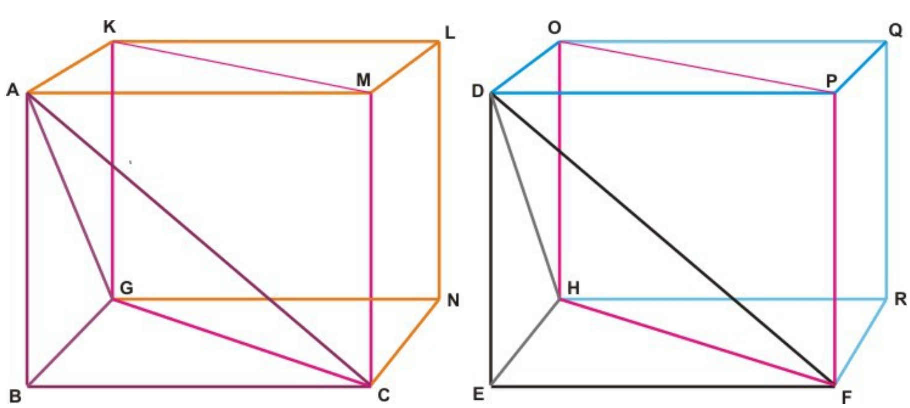
Ähnliche Pyramiden mit dreieckigen Grundflächen stehen im Verhältnis der Kuben über entsprechenden Kanten.

Wenn zwei ähnliche Pyramiden die dreieckigen Grundflächen ABC, DEF und die Spitzen G, H haben, dann, sage ich, verhält sich die Pyramide ABCG zur Pyramide DEFH wie der Kubus über BC zum Kubus über EF.

Denn wenn die Parallelepipede BGML, EHPQ vervollständigt werden, dann ist,
da die Pyramiden ABCG, DEFH ähnlich sind, der Winkel ABC gleich dem Winkel DEF,
ist der Winkel GBC gleich dem Winkel HEF und ist der Winkel ABG gleich dem Winkel DEH.

Somit verhält sich die Kante AB zur Kante DE wie die Kante BC zur Kante EF und wie die Kante BG zur Kante EH.

Da sich AB zu DE verhält wie BC zu EF, also die den gleichen Winkel einschließenden Strecken im gleichen Verhältnis stehen, ist das Parallelogramm BM dem Parallelogramm EP ähnlich.



Aus den gleichen Gründen ist das Parallelogramm BN dem Parallelogramm ER ähnlich und ist das Parallelogramm BK ähnlich dem Parallelogramm EO. Somit sind die drei Parallelogramme MB, BK, BN den drei Parallelogrammen EP, EO, ER ähnlich.

Sowohl die drei Parallelogramme MB, BK, BN wie auch die drei Parallelogramme EP, EO, ER sind den ihnen gegenüberliegenden Parallelogrammen gleich und ähnlich.

Somit werden die Körper BGML, EHPQ von gleich vielen ähnlichen ebenen Flächen begrenzt. Also ist der Körper BGML dem Körper EHPQ ähnlich.

Da ähnliche Parallelepipede im Verhältnis der Kuben über entsprechenden Kanten stehen [wie XI.33.], steht der Körper BGML zum Körper EHPQ im Verhältnis des Kubus über BC zum Kubus über der entsprechenden Kante EF.

Der Körper BGML verhält sich zum Körper EHPQ wie die Pyramide ABCG zur Pyramide DEFH, denn jede der Pyramiden ist einem Sechstel des umgebenden Körpers gleich, weil die Hälfte eines der Parallelepipede ein Prisma und damit dem Dreifachen der Pyramide gleich ist.

Deshalb verhält sich die Pyramide ABCG zur Pyramide DEFH wie der Kubus über der Kante BC zum Kubus über der Kante EF, was zu zeigen war.

Zusatz:

Offensichtlich stehen auch ähnliche Pyramiden, deren Grundflächen Polygone sind, im Verhältnis der Kuben über entsprechenden Kanten, denn da die Polygone, deren Grundflächen sind, in gleich viele ähnliche und einander entsprechende Dreiecke aufteilbar sind [wie VI.20.], sind diese Pyramiden in ebenso viele Pyramiden mit dreieckiger Grundfläche aufteilbar.

Da jede der durch Aufteilung der einen Pyramide entstandenen Pyramiden mit dreieckiger Grundfläche im gleichen Verhältnis steht zur entsprechenden durch Aufteilung entstandenen Pyramide mit dreieckiger Grundfläche der anderen Pyramide, stehen alle Pyramiden mit dreieckiger Grundfläche der einen Pyramide zusammen zu allen Pyramiden mit dreieckiger Grundfläche der anderen Pyramide zusammen in diesem Verhältnis [wie V.12.] und somit steht auch die eine Pyramide mit einem Polygon als Grundfläche zur anderen ähnlichen Pyramide mit ähnlichem Polygon als Grundfläche in diesem Verhältnis.

Eine Pyramide mit dreieckiger Grundfläche steht zu einer anderen ähnlichen Pyramide mit dreieckiger Grundfläche im Verhältnis der Kuben über entsprechenden Kanten und damit steht auch eine Pyramide, deren Grundfläche ein Polygon ist, zu einer ähnlichen Pyramide mit ähnlicher Grundfläche im Verhältnis der Kuben über entsprechenden Kanten.

XII.9.

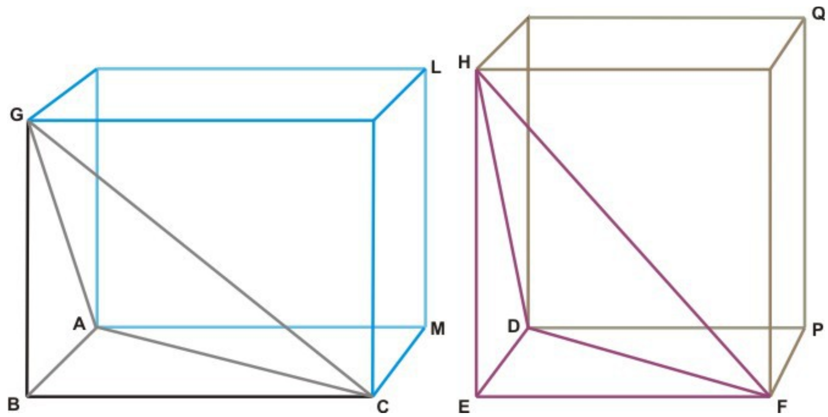
Die Grundflächen gleicher Pyramiden mit dreieckigen Grundflächen stehen im umgekehrten Verhältnis ihrer Höhen und die Pyramiden mit dreieckigen Grundflächen, deren Grundflächen im umgekehrten Verhältnis ihrer Höhen stehen, sind gleich.

Wenn die Dreiecke ABC, DEF die Grundflächen und die Punkte G, H die Spitzen gleicher Pyramiden sind, dann, sage ich, stehen die Grundflächen der Pyramiden ABCG, DEFH im umgekehrten Verhältnis ihrer Höhen, es verhält sich also die Grundfläche ABC zur Grundfläche DEF wie die Höhe der Pyramide DEFH zur Höhe der Pyramide ABCG.

Denn wenn die Parallelepipede BGML, EHPQ vervollständigt werden, ist die Pyramide ABCG gleich der Pyramide DEFH, wobei das Parallelepiped BGML dem Sechsfachen der Pyramide ABCG und das Parallelepiped EHPQ dem Sechsfachen der Pyramide DEFH gleich ist.
Damit ist der Körper BGML gleich dem Körper EHPQ.

Da die Grundflächen gleicher Parallelepipede im umgekehrten Verhältnis ihrer Höhen stehen [wie XI.34.], verhält sich die Grundfläche BM zur Grundfläche EP wie die Höhe des Körpers EHPQ zur Höhe des Körpers BGML, wobei sich die Grundfläche BM zur Grundfläche EP wie das Dreieck ABC zum Dreieck DEF verhält.
Also verhält sich das Dreieck ABC zum Dreieck DEF wie die Höhe des Körpers EHPQ zur Höhe des Körpers BGML.

Da die Höhe des Körpers EHPQ dieselbe ist wie die Höhe der Pyramide DEGH und da die Höhe des Körpers BGML dieselbe
ist wie die der Pyramide ABCG, verhält sich die Grundfläche ABC zur Grundfläche DEF wie die Höhe der Pyramide DEFH zur Höhe der Pyramide ABCG.



Also stehen die Grundflächen der Pyramiden ABCG, DEFH im umgekehrten Verhältnis ihrer Höhen.

Stehen nun die Grundflächen der Pyramiden ABCG, DEFH im umgekehrten Verhältnis ihrer Höhen, verhält sich also die Grundfläche ABC zur Grundfläche DEF wie die Höhe der Pyramide DEFH zur Höhe der Pyramide ABCG, dann, sage ich, ist die Pyramide ABCG gleich der Pyramide DEFH.

Denn, mit denselben Vergleichen wie vorher, verhält sich die Grundfläche ABC zur Grundfläche DEF wie die Höhe der Pyramide DEFH zur Höhe der Pyramide ABCG.

Die Grundfläche ABC verhält sich zur Grundfläche DEF wie das Parallelogramm BM zum Parallelogramm EP. Somit verhält sich das Parallelogramm BM zum Parallelogramm EP wie die Höhe der Pyramide DEFH zur Höhe der Pyramide ABCG.

Da die Höhe der Pyramide DEFH dieselbe ist wie die des Parallelepipeds EHPQ und da die Höhe der Pyramide ABCG dieselbe ist wie die des Parallelepipeds BGML, verhält sich das Parallelogramm BM zum Parallelogramm EP wie die Höhe des Parallelepipeds EHPQ zur Höhe des Parallelepipeds BGML.

Da also die Grundflächen der Parallelepipede im umgekehrten Verhältnis ihrer Höhen stehen und damit diese Körper gleich sind, da also der Körper BGML gleich dem Körper EHPQ ist, und da die Pyramide ABCG einem Sechstel des Körpers BGML und die Pyramide DEFH einem Sechstel des Körpers EHPQ gleich ist, ist die Pyramide ABCG gleich der Pyramide DEFH.

Deshalb stehen die Grundflächen gleicher Pyramiden mit dreieckigen Grundflächen im umgekehrten Verhältnis ihrer Höhen und die Pyramiden mit dreieckigen Grundflächen, deren Grundflächen im umgekehrten Verhältnis ihrer Höhen stehen, sind gleich, was zu zeigen war.

XII.10.

Jeder Kegel ist dem Drittel eines Zylinders mit gleicher Grundfläche und Höhe gleich.

Wenn die Grundfläche eines Kegels, der Kreis ABCD, gleich der Grundfläche eines Zylinders mit gleicher Höhe ist, dann, sage ich, ist der Kegel dem Drittel des Zylinders gleich und der Zylinder ist gleich dem Dreifachen des Kegels.

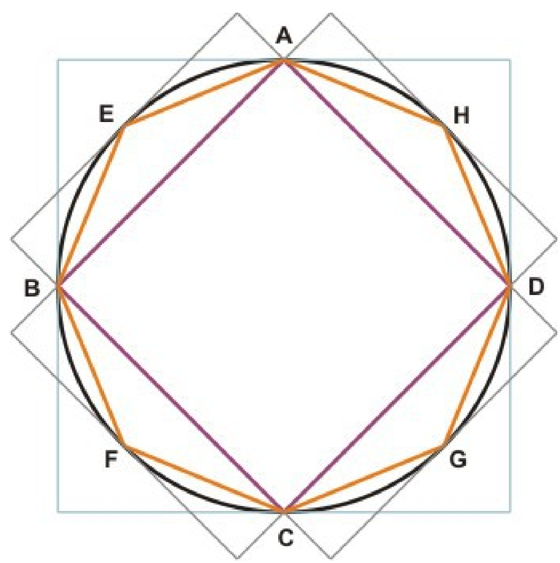
Denn wenn der Zylinder nicht dem Dreifachen gleich ist, ist er größer oder kleiner als das Dreifache.

Ist er größer und wird in den Kreis ABCD das Quadrat ABCD einbeschrieben {wie IV.6.], dann ist das Quadrat ABCD größer als die Hälfte des Kreises ABCD.

Das auf dem Quadrat ABCD errichtete Parallelepiped gleicher Höhe wie der gegebene Zylinder ist damit größer als die Hälfte des Zylinders.

Denn wenn um den Kreis ein Quadrat beschrieben wird [wie IV.7.], ist das dem Kreis einbeschriebene Quadrat gleich der Hälfte des ihm umschriebenen Quadrats, wobei sich die über den Quadraten errichteten Parallelepipede gleicher Höhe verhalten wie ihre Grundflächen [wie XI.32.], und da der Zylinder kleiner ist als das über dem umschriebenen Quadrat errichtete Parallelepiped, ist das über dem einbeschriebenen Quadrat errichtete Parallelepiped gleicher Höhe größer als die Hälfte des Zylinders.

Werden die Kreisbögen AB, BC, CD, DA in den Punkten E, F, G, H jeweils in zwei gleiche Teile geteilt und werden AE, EB, BF, FC, CG. GD, DH, HA gezogen, dann ist, wie gezeigt, jedes der Dreiecke AEB, BFC, CGD, DHA größer als die Hälfte des Abschnitts des Kreises ABCD in dem sie liegen [wie XII.2.].



Jedes der über den Dreiecken AEB, BFC, CGD, DHA mit der Höhe des Zylinders errichteten Prismen ist damit größer als die Hälfte eines der über einem Kreisabschnitt mit der Höhe des Zylinders errichteten Körper.

Denn wenn durch die Punkte E, F, G, H die Parallelen zu AB, BC, CD, DA gezogen und die Parallelogramme vervollständigt werden, dann auf ihnen Parallelepipede mit der Höhe des Zylinders errichtet werden, ist jedes der Prismen über den Dreiecken AEB, BFC, CGD, DHA gleich der Hälfte eines dieser Parallelepipede und da jeder der Körper über einem der Kreisabschnitte kleiner ist als eines dieser Parallelepipede ist jedes der Prismen über den Dreiecken AEB, BFC, CGD, DHA größer als die Hälfte eines der Körper über den Kreisabschnitten.

Wenn also die jeweiligen Kreisabschnitte in zwei gleiche Teile geteilt, Gerade durch die Punkte gezogen, auf den gebildeten Dreiecken Prismen mit der Höhe des Zylinders errichtet werden und diese Aufteilung fortgesetzt wird, werden deshalb Körper über Kreisabschnitten übrig bleiben, die zusammen kleiner sind als der Unterschied zwischen Zylinder und dem Dreifachen des Kegels [wie X.1.].

Sind AE, EB, BF, FC, CG. GD, DH, HA die nach genügender Teilung verbleibenden Kreisabschnitte, dann ist der über dem Polygon AEBFCGDH mit der Höhe des Zylinders errichtete Körper größer als das Dreifache des Kegels.

Da der Körper, dessen Grundfläche das Polygon AEBFCGDH ist und der die Höhe des Zylinders hat, gleich dem Dreifachen einer Pyramide ist, die das Polygon AEBFCGDH zur Grundfläche hat und deren Spitze die des Kegels ist, ist diese Pyramide, die das Polygon AEBFCGDH zur Grundfläche hat und deren Spitze die des Kegels ist, größer als der Kegel, der den Kreis ABCD zur Grundfläche hat; sie ist aber auch kleiner, denn sie wird von ihm eingeschlossen, was nicht möglich ist.

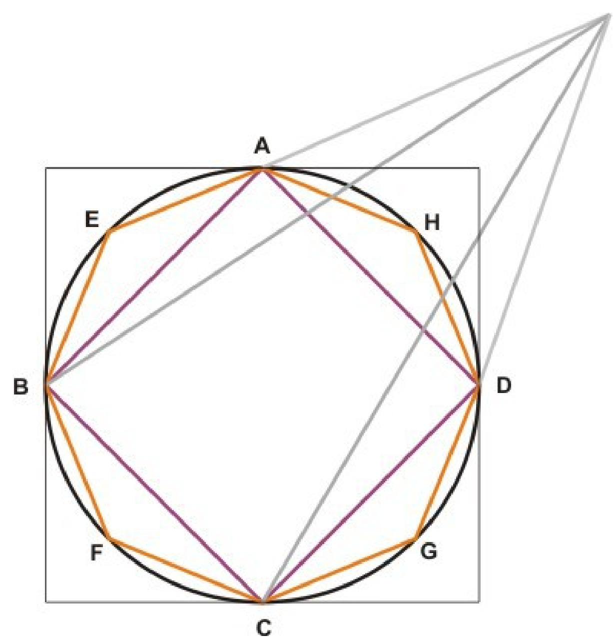
Also ist der Zylinder nicht größer als das Dreifache des Kegels.

Es ist, sage ich, der Zylinder auch nicht kleiner als das Dreifache des Kegels.

Denn wenn es möglich ist, dass der Zylinder kleiner ist als das Dreifache des Kegels, dann ist umgekehrt der Kegel größer als ein Drittel des Zylinders.

Wird in den Kreis ABCD das Quadrat ABCD einbeschrieben, dann ist das Quadrat ABCD größer als die Hälfte des Kreises ABCD.

Wird über dem Quadrat ABCD eine Pyramide errichtet mit der gleichen Spitze wie der Kegel, dann ist diese Pyramide größer als die Hälfte des Kegels, da, wie im Vorhergehenden gezeigt, das dem Kreis einbeschriebene Quadrat ABCD die Hälfte eines um den Kreis beschriebenen Quadrates ist und da sich auf den Quadraten mit der Höhe des Kegels errichtete Parallelepipede, die das Doppelte von Prismen gleicher Höhe sind, sich verhalten wie ihre Grundflächen und ebenso errichtete Pyramiden, ist der über dem Quadrat ABCD errichtete Körper gleich der Hälfte des auf dem Kreis umschriebenen Quadrates errichteten Körpers [wie XI.32.].



Also sind auch die dem Drittel der Parallelepipede gleichen Pyramiden mit der gleichen Grundfläche, dem Quadrat ABCD, gleich der Hälfte derjenigen, die über dem Quadrat errichtet sind, das dem Kreis umschrieben ist.

Die Pyramide über dem Quadrat, das dem Kreis umschrieben ist, ist größer als der Kegel, denn sie umschließt ihn.

Deshalb ist die Pyramide, deren Grundfläche das Quadrat ABCD ist und Höhe die des Kegels ist, größer als die Hälfte des Kegels.

Werden die Kreisbögen AB, BC, CD, DA in den Punkten E, F, G, H jeweils in zwei gleiche Teile geteilt und werden AE, EB, BF, FC, CG. GD, DH, HA gezogen, dann ist jedes der Dreiecke AEB, BFC, CGD, DHA größer als die Hälfte des Abschnitts des Kreises ABCD in dem sie liegen [wie XII.2.].

Damit sind die über jedem der Dreiecke AEB, BFC, CGD, DHA mit der Spitze des Kegels errichteten Pyramiden größer als die Hälfte eines der Abschnitte des Kegels, in denen sie liegen.

Wenn also die jeweiligen Kreisabschnitte in zwei gleiche Teile geteilt, Gerade durch die Punkte gezogen, auf den entstandenen Dreiecken Pyramiden mit der Höhe des Kegels errichtet werden und diese Aufteilung fortgesetzt wird, werden deshalb Abschnitte des Kegels über den Kreisabschnitten übrig bleiben, die zusammen kleiner sind als der Unterschied zwischen Kegel und dem Drittel des Zylinders [wie X.1.].

Sind AE, EB, BF, FC, CG. GD, DH, HA die nach genügender Teilung verbleibenden Kreisabschnitte, dann ist die über dem Polygon AEBFCGDH mit der Höhe des Kegels errichtete Pyramide größer als ein Drittel des Zylinders.

Da die Pyramide, deren Grundfläche das Polygon AEBFCGDH ist und die Höhe des Kegels hat, gleich dem Drittel eines Körpers ist, der das Polygon AEBFCGDH zur Grundfläche und die Höhe des Zylinders hat, ist diese Pyramide, die das Polygon AEBFCGDH zur Grundfläche hat und deren Spitze die des Kegels ist, größer als der Kegel, der den Kreis ABCD zur Grundfläche hat; sie ist aber auch kleiner, denn sie wird von ihm eingeschlossen, was nicht möglich ist.
Also ist der Zylinder nicht kleiner als das Dreifache des Kegels.

Da, wie gezeigt, der Zylinder auch nicht größer ist als das Dreifache des Kegels, ist der Kegel einem Drittel des Zylinders gleich.

Deshalb ist jeder Kegel dem Drittel eines Zylinders mit gleicher Grundfläche und Höhe gleich, was zu zeigen war.

Anmerkung:

Das Volumen eines Zylinders, dessen Grundfläche den Radius 1 und der die Höhe 1 hat, ist π,
denn der Flächeninhalt seiner Grundfläche ist π.

Der Flächeninhalt eines dem Grundflächenkreis einbeschriebenen Quadrats ist $A_4 = 2$.

Der Flächeninhalt eines regulären 2n-Ecks mit Umkreisradius 1 ist aus dem Flächeninhalt des n-Ecks mit zweimaliger Anwendung von Satz I.47 zu berechnen:

$$A_{2n} = n/2 \cdot (2 - 2 \cdot (1 - (2 \cdot A_n/n)^2)^{½})^{½}$$

und es ist damit für die Grundflächen

8-Eck:	$A_8 = 2 \cdot 2^{½}$
16-Eck:	$A_{16} = 4 \cdot (2 - 2^{½})^{½}$
32-Eck:	$A_{32} = 8 \cdot (2 - (2 + 2^{½})^{½})^{½}$
64-Eck:	$A_{64} = 16 \cdot (2 - (2 + (2 + 2^{½})^{½})^{½})^{½}$
. . .	. . .

wobei für alle A_n gilt: $A_{2n} > A_n$ und alle $A_n < \pi$.

Die Flächeninhalte der jeweils durch Teilung der Kreisbögen und Konstruktion der Dreiecke hinzukommenden Dreiecke ergeben sich aus den Differenzen zweier in der Konstruktion aufeinanderfolgender Polygone.

Wie im Lehrsatz mit anderen Worten gezeigt, gibt es damit für alle ε ein k, so dass

$$A_{2k} - A_k < \varepsilon \quad \text{und} \quad \pi - A_{2k} < \varepsilon.$$

Die Volumina der auf den Grundflächen errichteten Körper verhalten sich, wie im Lehrsatz gezeigt, wie die Flächeninhalte der Grundflächen.

XII.11.

Sowohl Kegel wie Zylinder gleicher Höhe stehen im Verhältnis ihrer Grundflächen.

Wenn Kegel und Zylinder die Grundflächen ABCD, EFGH mit den Durchmessern AC, EG und die Achsen KL, MN haben, dann, sage ich, verhält sich der Grundflächenkreis ABCD zum Grundflächenkreis EFGH wie der Kegel AL zum Kegel EN.

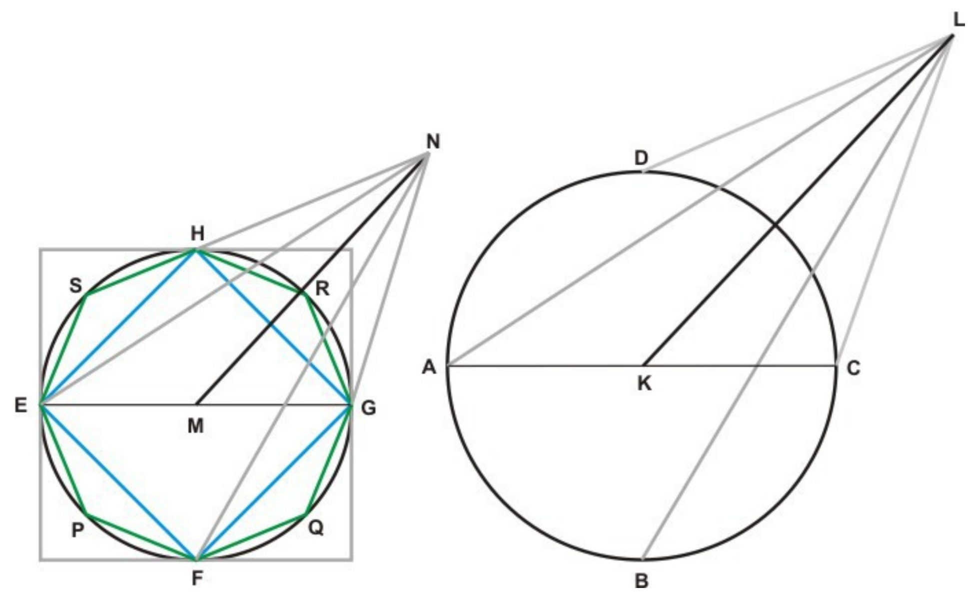
Denn wenn nicht, dann verhält sich der Kreis ABCD zum Kreis EFGH wie der Kegel AL zu einem Körper kleiner oder größer als der Kegel EN.

Besteht nun das Verhältnis zu einem kleineren Körper X, dann ist ein Körper Z gleich dem Kegel EN weniger dem Körper X, da der Kegel EN gleich den Körpern X und Z zusammen ist.

Da das Quadrat EFGH, das in den Kreis EFGH einbeschrieben wird, größer ist als die Hälfte des Kreises EFGH, ist eine über dem Quadrat EFGH errichtete Pyramide mit der Höhe des Kegels größer als die Hälfte des Kegels.

Denn wenn um den Kreis ein Quadrat beschrieben und auf ihm eine Pyramide mit der Höhe des Kegels errichtet wird, dann ist die Pyramide über dem einbeschriebenen Quadrat gleich der Hälfte der Pyramide über dem umschriebenen Quadrat, da die Pyramiden sich wie ihre Grundflächen verhalten [wie XII.6.].

Der Kegel ist kleiner als die Pyramide über dem umschriebenen Quadrat, deshalb ist die Pyramide über dem Quadrat EFGH größer als die Hälfte des Kegels.



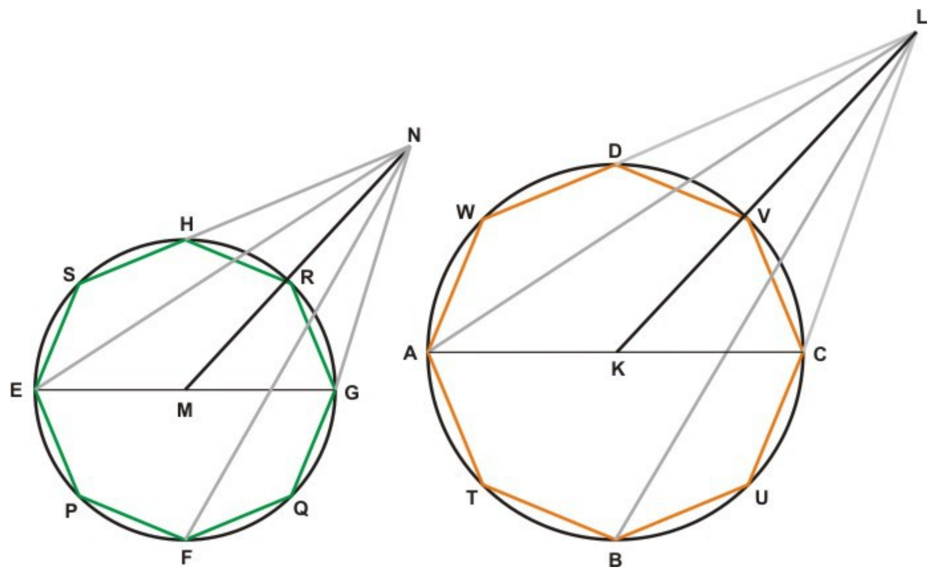
Werden die Kreisbögen EF, FG, GH, HF in den Punkten P, Q, R, S jeweils in zwei gleiche Teile geteilt und werden HS, SE, EP, PF, FQ, QG, GR, RH gezogen, dann ist jede der über jedem der so entstandenen Dreiecke HSE, EPF, FQG, GRH mit der Höhe des Kegels errichteten Pyramiden größer als die Hälfte des Kegelabschnitts in dem sie liegt.

Wenn also die jeweiligen Kreisabschnitte in zwei gleiche Teile geteilt, Gerade durch die Punkte gezogen, auf den entstandenen Dreiecken Pyramiden mit der Höhe des Kegels errichtet werden und diese Aufteilung fortgesetzt wird, werden deshalb Abschnitte des Kegels übrig bleiben, die zusammen kleiner sind als der Körper Z [wie X.1.].

Verbleiben nach genügender Teilung die Kegelabschnitte über HS, SE, EP, PF, FQ, QG, GR, RH, die zusammen kleiner sind als der Körper Z, dann ist die mit der Höhe des Kegels über dem Polygon HSEPFQGR errichtete Pyramide größer als der Körper X.

Wird in den Kreis ABCD ein dem Polygon HSEPFQGR ähnliches und ähnlich errichtetes Polygon DWATBUCV einbeschrieben, dann verhält sich das Quadrat über AC zum Quadrat über EG wie das Polygon DWATBUCV zum Polygon HSEPFQGR [wie XII.1.] und wie der Kreis ABCD zum Kreis EFGH [wie XII.2.]. Also verhält sich der Kreis ABCD zum Kreis EFGH wie das Polygon DWATBUCV zum Polygon HSEPFQGR.

Da sich der Kreis ABCD zum Kreis EFGH verhält wie das Polygon DWATBUCV zum Polygon HSEPFQGR und wie der Kegel AL zum Körper X und da sich das Polygon DWATBUCV zum Polygon HSEPFQGR verhält wie die Pyramide, deren Grundfläche das Polygon DWATBUCV und deren Spitze L ist, zur Pyramide, deren Grundfläche das Polygon HSEPFQGR und deren Spitze N ist, deshalb verhält sich, nach Umordnung der Proportion [wie V.16.], der Kegel AL zur Pyramide, die er umschließt, wie der Körper X zur Pyramide, die vom Kegel EN umschlossen wird.



Der Kegel AL ist damit größer als die Pyramide, die er umschließt und der Körper X ist größer als die Pyramide, die der Kegel EN umschließt [wie V.14.]; er ist aber kleiner, was nicht möglich ist. Also verhält sich der Kreis ABCD zum Kreis EFGH nicht wie der Kegel AL zu einem Körper, der kleiner ist als der Kegel EN.

Auf gleiche Weise ist zu zeigen, dass sich der Kreis EFGH zum Kreis ABCD nicht verhält wie der Kegel EN zu einem Körper, der kleiner ist als der Kegel AL

Es verhält sich auch nicht, sage ich zudem, der Kreis ABCD zum Kreis EFGH wie der Kegel AL zu einem Körper, der größer ist als der Kegel EN.

Denn wenn sich ein größerer Körper X doch so verhält, dann verhält sich der Kreis EFGH zum Kreis ABCD wie der Körper X zum Kegel AL [wie V.7. Zusatz]. Da sich dann der Körper X zum Kegel AL verhält wie der Kegel EN zu einem Körper, der kleiner ist als der Kegel AL, verhält sich dann der Kreis EFGH zum Kreis ABCD wie der Kegel EN zu einem Körper der kleiner ist als der Kegel AL, was, wie gezeigt, nicht möglich ist. Also verhält sich der Kreis ABCD zum Kreis EFGH nicht wie der Kegel AL zu einem Körper, der größer ist als der Kegel EN. Da, wie gezeigt, jener Körper auch nicht kleiner ist, verhält sich der Kreis ABCD zum Kreis EFGH wie der Kegel AL zum Kegel EN.

In dem Verhältnis, in dem ein Kegel zum andern steht, steht auch ein Zylinder zum andern, denn sie sind jeweils dreimal so groß [wie XII.10.]. Damit verhalten sich die Kreise ABCD, EFGH wie die über ihnen mit der Höhe der Kegel errichteten Zylinder.

Deshalb stehen sowohl Kegel wie Zylinder gleicher Höhe im Verhältnis ihrer Grundflächen, was zu zeigen war.

XII.12.

Sowohl ähnliche Kegel wie ähnliche Zylinder stehen im Verhältnis der Kuben über den Durchmessern ihrer Grundflächen.

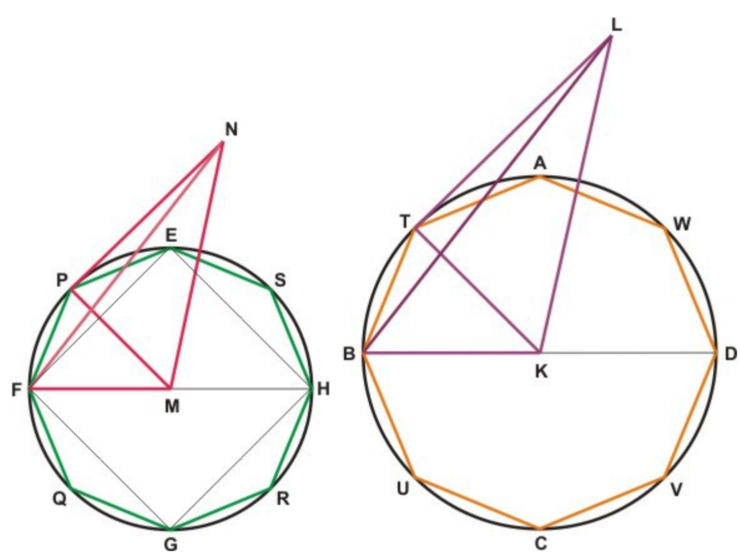
Wenn ähnliche Kegel und Zylinder mit den Achsen KL, MN, als Grundflächen die Kreise ABCD, EFGH mit den Durchmessern BD, FH haben, dann, sage ich, verhält sich der Kegel, dessen Grundfläche der Kreis ABCD und dessen Spitze der Punkt L ist, zum Kegel, dessen Grundfläche der Kreis EFGH und dessen Spitze der Punkt N ist, wie der Kubus über BD zum Kubus über FH.

Denn wenn sich der Kegel ABCDL zum Kegel EFGHN nicht verhält wie der Kubus über BD zum Kubus über FH, dann steht der Kegel ABCDL zu einem Körper der entweder kleiner oder größer ist als der Kegel EFGHN im Verhältnis der Kuben.

Besteht nun das Verhältnis zu einem kleineren Körper X, dann ist, da ein in den Kreis EFGH einbeschriebenes Quadrat größer ist als die Hälfte des Kreises EFGH, die über dem Quadrat EFGH mit der Höhe des Kegels errichtete Pyramide größer als die Hälfte des über dem Kreis EFGH errichteten Kegels.

Werden die Kreisbögen EF, FG, GH, HF in den Punkten P, Q, R, S jeweils in zwei gleiche Teile geteilt und werden EP, PF, FQ, QG, GR, RH, HS, SE gezogen, dann ist jedes der so entstandenen Dreiecke EPF, FQG, GRH, HSE größer als die Hälfte des Kreisabschnitts in dem es liegt. Jede der über jedem der Dreiecke EPF, FQG, GRH, HSE errichteten Pyramiden mit der Höhe des Kegels ist deshalb größer als der Kegelabschnitt in dem sie liegt.

Wenn also die jeweiligen Kreisabschnitte in zwei gleiche Teile geteilt, Gerade durch die Punkte gezogen, auf den entstandenen Dreiecken Pyramiden mit der Höhe des Kegels errichtet werden und diese Aufteilung fortgesetzt wird, werden deshalb Abschnitte des Kegels übrig bleiben, die zusammen kleiner sind als der Unterschied zwischen dem Kegel EFGHN und dem Körper X [wie X.1.]. Verbleiben nach genügender Teilung die Kegelabschnitte über EP, PF, FQ, QG, GR, RH, HS, SE, dann ist die mit der Höhe des Kegels über dem Polygon EPFQGRHS errichtete Pyramide, deren Spitze der Punkt N ist, größer als der Körper X.



Wird in den Kreis ABCD ein dem Polygon EPFQGRHS ähnliches und ähnlich errichtetes Polygon ATBUCVDW einbeschrieben und darüber eine Pyramide mit der Höhe des Kegels ABCDL errichtet, dann ist eine der Seitenflächen der Pyramide, deren Grundfläche das Polygon ATBUCVDW und deren Spitze der Punkt L ist, das Dreieck LBT. Entsprechend ist eine der Seitenflächen der Pyramide, deren Grundfläche das Polygon EPFQGRHS und deren Spitze der Punkt N ist, das Dreieck NFP. Es sind dann KT, MB zu ziehen.

Da der Kegel ABCDL dem Kegel EFGHN ähnlich ist, verhält sich der Durchmesser BD zum Durchmesser FH wie die Achse KL zur Achse MN und wie der Radius BK zum Radius FM.

Somit verhält sich der Radius BK zum Radius FM wie die Achse KL zur Achse MN und, nach Umordnung, verhält sich der Radius BK zur Achse KL wie der Radius FM zur Achse MN.

Da die Winkel BKL, FMN gleich sind und von Strecken, die im gleichen Verhältnis stehen, gebildet werden, ist das Dreieck BKL dem Dreieck FMN ähnlich.

Da sich BK zu KT sich verhält wie FM zu MP, wobei sie gleiche Winkel BKT, FMP einschließen, denn diese sind der Hälfte eines von vier rechten Winkeln gleich, die im den Kreismittelpunkt liegen, ist das Dreieck BKT dem Dreieck FMP ähnlich.

Wie gezeigt, verhält sich BK zu KL wie FM zu MN, und da BK gleich KT und da FM gleich PM ist, verhält sich TK zu KL wie PM zu MN. Da die Strecken, die die Winkel TKL, PMN einschließen, im gleichen Verhältnis stehen, ist das Dreieck LKT dem Dreieck NMP ähnlich.

Da das Dreieck LKB dem Dreieck NMF ähnlich ist, verhält sich LB zu BK wie NM zu MF. Da das Dreieck BKT dem Dreieck FMP ähnlich ist, verhält sich KB zu BT wie MF zu FP. Wegen Gleichheit verhält sich somit LB zu BT wie NF zu FP.

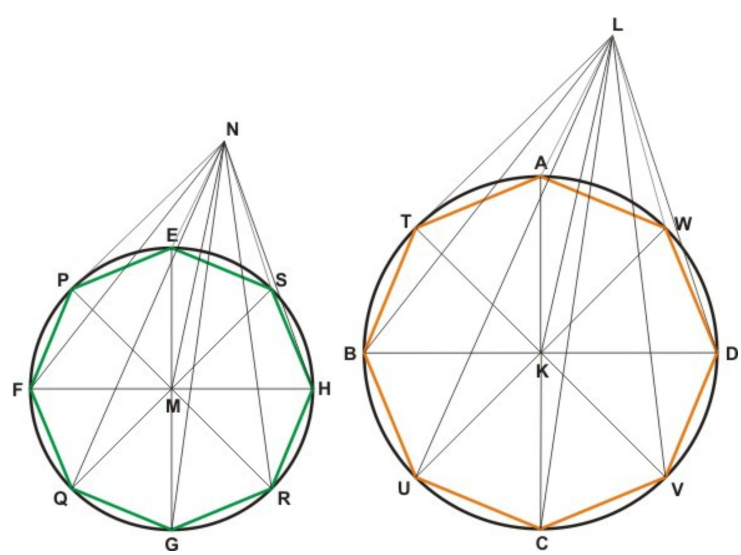
Da das Dreieck LTK dem Dreieck NPM ähnlich ist, verhält sich LT zu TK wie NP zu PM. Da das Dreieck TKB dem Dreieck PMF ähnlich ist, verhält sich KT zu TB wie MP zu PF. Wegen Gleichheit verhält sich somit LT zu TB wie NP zu PF.

Da, wie gezeigt, sich TB zu BL verhält wie PF zu FN, verhält sich, wegen Gleichheit, TL zu LB wie PN zu NF. Entsprechende Seiten der Dreiecke LTB, NPF stehen somit im gleichen Verhältnis und da die Dreiecke LTB, NPF gleichwinklig sind, sind sie ähnlich.

Es ist also die Pyramide, deren Grundfläche das Dreieck BKT und deren Spitze der Punkt L ist, ähnlich der Pyramide, deren Grundfläche das Dreieck FMP und deren Spitze der Punkt N ist, denn sie werden von gleich vielen ähnlichen Flächen begrenzt.

Da ähnliche Pyramiden mit dreieckigen Grundflächen im Verhältnis der Kuben über entsprechenden Kanten stehen [wie XII.8.], verhält sich die Pyramide BKTL zur Pyramide FMPN wie der Kubus über BK zum Kubus über FM.

Werden von den Punkten A, W, D, V, C, U Radien zu K und von den Punkten E, S, H, R, G, Q Radien zu M gezogen und über jedem der so entstandenen Dreiecke Pyramiden mit der Höhe des Kegels errichtet, dann ist auf gleiche Weise zu zeigen, dass jede einzelne der einen Pyramiden zu jeder der anderen Pyramiden im Verhältnis des Kubus über BK zum Kubus über FM steht und damit wie der Kubus über BD zum Kubus über FH.



Stehen mehrere Größen in gleicher Proportion, dann verhalten sich die Vorderglieder zusammen zu den Hintergliedern zusammen wie eines der Vorderglieder zum Hinterglied [wie V.12.], womit sich die Pyramide BKTL zur Pyramide FMPN verhält wie die ganze Pyramide, deren Grundfläche das Polygon ATBUCVDW und deren Spitze der Punkt L ist, zur ganzen Pyramide, deren Grundfläche das Polygon EPFQGRHS und deren Spitze der Punkt N ist.

Also verhält sich die Pyramide, deren Grundfläche das Polygon ATBUCVDW und deren Spitze der Punkt L ist, zur Pyramide, deren Grundfläche das Polygon EPFQGRHS und deren Spitze der Punkt N ist, wie der Kubus über BD zum Kubus über FH.

Steht der Kegel, dessen Grundfläche der Kreis ABCD und dessen Spitze L ist, zum Körper X im Verhältnis des Kubus über BD zum Kubus über FH, dann steht der Kegel, dessen Grundfläche der Kreis ABCD und dessen Spitze L ist, zum Körper X im Verhältnis der Pyramide, deren Grundfläche das Polygon ATBUCVDW und deren Spitze der Punkt L ist, zur Pyramide, deren Grundfläche das Polygon EPFQGRHS und deren Spitze der Punkt N ist.

Damit verhält sich, nach Umordnung, der Kegel, dessen Grundfläche der Kreis ABCD und dessen Spitze L ist, zu der von ihm umschlossenen Pyramide, deren Grundfläche das Polygon ATBUCVDW und deren Spitze der Punkt L ist, wie der Körper X zur Pyramide, deren Grundfläche das Polygon EPFQGRHS und deren Spitze der Punkt N ist.

Da der Kegel größer ist als die Pyramide, die er umschließt, ist damit der Körper X größer als die Pyramide, deren Grundfläche das Polygon EPFQGRHS und deren Spitze der Punkt N ist; er ist jedoch kleiner, was nicht möglich ist.

Also verhält sich der Kegel, , dessen Grundfläche der Kreis ABCD und dessen Spitze L ist, zu einem Körper, der kleiner ist als der Kegel, dessen Grundfläche der Kreis EFGH und dessen Spitze der Punkt N ist, nicht wie der Kubus über BD zum Kubus über FH.

Auf gleiche Weise ist zu zeigen, dass der Kegel EFGHN zu einem Körper, der kleiner ist als der Kegel ABCDL, nicht im Verhältnis steht wie der Kubus über FH zum Kubus über BD.

Es verhält sich, sage ich, der Kegel ABCDL auch zu einem Körper, der größer ist als der Kegel EFGHN nicht wie der Kubus über BD zum Kubus über FH.

Denn wenn sich der Kegel ABCDL zu einem Körper X so verhält, dann verhält sich der Körper X zum Kegel ABCDL wie der Kubus über FH zum Kubus über BD und damit verhält sich der Körper X zum Kegel ABCDL wie der Kegel EFGHN zu einem Körper, der kleiner ist als der Kegel ABCDL.

Wie gezeigt, ist es nicht möglich, dass der Kegel EFGHN zu einem Körper, der kleiner ist als der Kegel ABCDL, im Verhältnis des Kubus über BD zum Kubus über FH steht. Also steht der Kegel ABCDL zu einem Körper, der größer ist als der Kegel EFGHN nicht im Verhältnis des Kubus über BD zum Kubus über FH.

Da der Kegel ABCDL, wie gezeigt, auch zu einem Körper, der kleiner ist, nicht in diesem Verhältnis steht, verhält sich der Kegel ABCDL zum Kegel EFGHN wie der Kubus über BD zum Kubus über FH.

Ebenso wie ein Kegel zu einem anderen, verhält sich ein Zylinder gleicher Grundfläche und Höhe zu einem anderen [wie XII.10.].

Also steht ein Zylinder zum anderen im Verhältnis des Kubus über BD zum Kubus über FH.

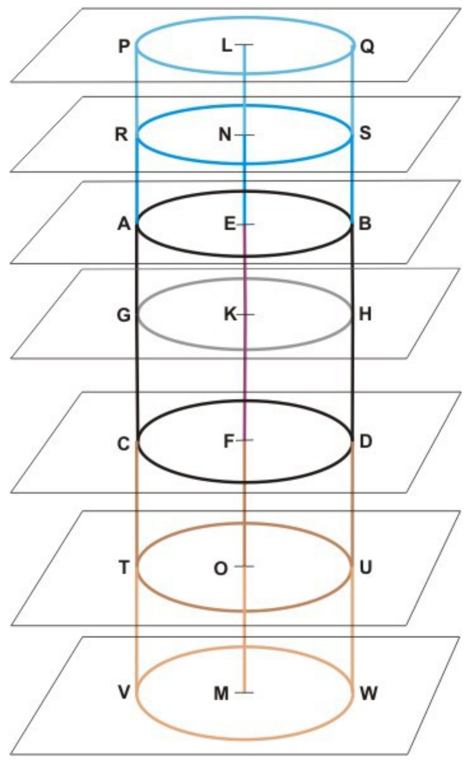
Deshalb stehen sowohl ähnliche Kegel wie ähnliche Zylinder im Verhältnis der Kuben über den Durchmessern ihrer Grundflächen, was zu zeigen war.

[XII.13.]

Wird ein Zylinder von einer schneidenden, zu den Grundflächen parallelen Ebene geteilt, dann stehen die abgeteilten Achsen im Verhältnis der abgeteilten Zylinder.

Wenn der Zylinder AD von der schneidenden Ebene GH geteilt wird, die zu den seinen Grundflächen AB, CD parallel ist, und die Ebene GH seine Achse im Punkt K teilt, dann, sage ich, verhält sich der Zylinder BG zum Zylinder GD wie die Achse EK zur Achse KF.

Es ist die Achse EF nach der einen Seite um ein beliebiges Vielfaches der Strecke EK bis zum Punkt L, auf der anderen Seite um ein gleiches Vielfaches der Strecke KF bis zum Punkt M zu verlängern, es ist der Zylinder PW mit der Achse LM und den Grundflächen PQ, VW, die den Kreisen AB, CD gleich sind, zu errichten, es sind durch die Punkte N, O zu AB, CD parallele Ebenen zu legen und auf ihnen um die Mittelpunkte N, O Kreise zu ziehen, die den Grundflächen des Zylinders PQ gleich sind.



Damit sind die Achsen LN, NE, EK einander gleich, womit die Zylinder QR, RB, BG im Verhältnis ihrer Grundflächen stehen [wie XII.11.]. Also sind diese Zylinder gleich, da ihre Grundflächen gleich sind.

Da die Anzahlen der einander gleichen Achsen LN, NE, EK und der einander gleichen Zylinder QR, RB, BG gleich sind, ist die Achse KL das gleiche Vielfaches der Achse EK wie der Zylinder QG Vielfaches des Zylinders GB ist.

Aus dem gleichen Grund ist die Achse MK das gleiche Vielfache der Achse KF wie der Zylinder WG das Vielfache des Zylinders GD ist.

Ist also die Achse KL gleich der Achse KM, dann ist auch der Zylinder QG gleich dem Zylinder GW; ist die eine Achse größer als die andere, dann ist auch der eine Zylinder größer als der andere und wenn kleiner, dann kleiner.

Die vier Größen, die Achsen EK, KF und die Zylinder BG, GD ergeben, gleich vervielfacht, die Achse LK und den Zylinder QG einerseits und die Achse KM, den Zylinder GW andererseits und, wie gezeigt, wenn die Achse KL größer ist als die Achse KM, dann ist der Zylinder QG größer als der Zylinder GW, wenn gleich, dann gleich und wenn kleiner, dann kleiner.

Also steht die Achse EK zur Achse KF im Verhältnis des Zylinder BG zum Zylinder GD [wie V. Erklärung 5].

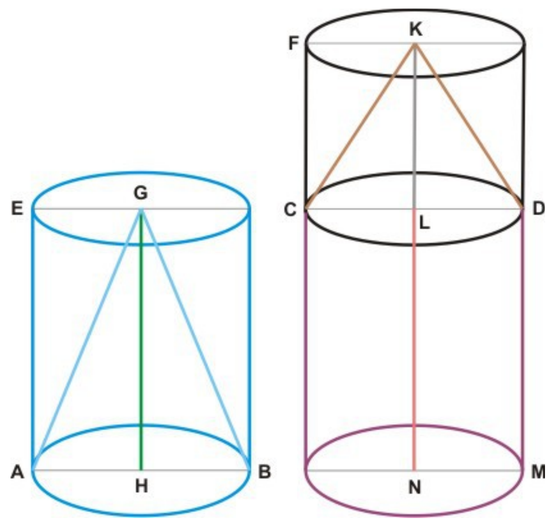
Deshalb stehen die abgeteilten Achsen im Verhältnis der abgeteilten Zylinder, wenn eine schneidende, zu den Grundflächen parallele Ebene einen Zylinder teilt, was zu zeigen war.

XII.14.

Sowohl Kegel wie Zylinder mit gleichen Grundflächen stehen im Verhältnis ihrer Höhen.

Wenn die Zylinder EB, FD als Grundflächen die gleichen Kreise AB, CD haben, dann, sage ich, verhält sich der Zylinder EB zum Zylinder FD wie die Achse GH zur Achse KL.

Es ist die Achse KL bis zum Punkt N so zu verlängern, dass LN gleich GH ist, und es ist der Zylinder CM um die Achse LN zu ergänzen.



Die Zylinder EB, CM haben die gleiche Höhe, sie stehen deshalb im Verhältnis ihrer Grundflächen [wie XII.11.].
Die Grundflächen sind gleich und damit auch die Zylinder EB, CM.

Da der Zylinder FM von der Ebene CD, die seinen Grundflächen parallel ist, geschnitten wird, verhält sich der Zylinder CM zum Zylinder FD wie die Achse LN zur Achse KL [wie XII.13.].

Die Zylinder CM, EB sind gleich, ebenso die Achsen LN, GH, also verhält sich der Zylinder EB zum Zylinder FD wie die Achse GH zur Achse KL.

Der Zylinder EB verhält sich zum Zylinder FD wie der Kegel ABG zum Kegel CDK [wie XII.10 mit V.15.] und damit verhält sich die Achse GH zur Achse KL wie der Kegel ABG zum Kegel CDK und wie der Zylinder EB zum Zylinder FD

Deshalb stehen sowohl Kegel wie Zylinder mit gleichen Grundflächen im Verhältnis ihrer Höhen, was zu zeigen war.

XII.15.

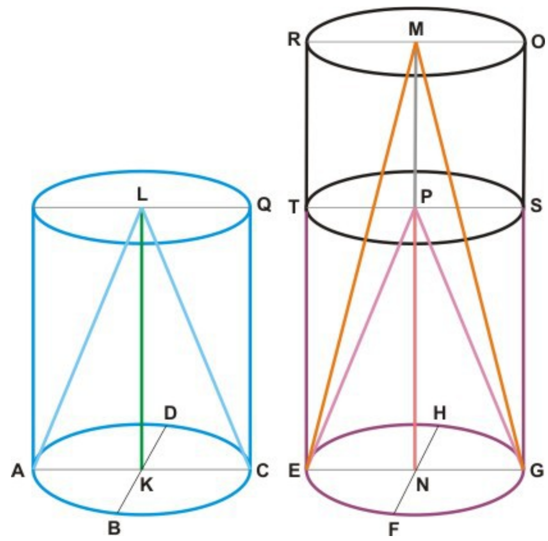
Die Grundflächen gleicher Kegel und gleicher Zylinder stehen im umgekehrten Verhältnis ihrer Höhen und Kegel und Zylinder, deren Grundflächen im umgekehrten Verhältnis ihrer Höhen stehen, sind gleich.

Wenn bei zwei gleichen Kegeln und zwei gleichen Zylindern die Grundflächenkreise ABCD, EFGH mit den Durchmessern AC, EG und die Achsen KL, MN und damit die Höhen der Kegel auch die Höhen der Zylinder AQ, EO sind, dann, sage ich, stehen die Grundflächen der Zylinder AQ, EO im umgekehrten Verhältnis ihrer Höhen und es verhält sich die Grundfläche ABCD zur Grundfläche EFGH wie die Achse MN zur Achse KL.

Denn die Höhen LK, MN sind entweder gleich oder ungleich.

Sind die Höhen gleich, dann ist der Zylinder AQ gleich dem Zylinder EO.
Da sowohl Kegel wie Zylinder gleicher Höhe im Verhältnis ihrer Grundflächen stehen [wie XII.11.], sind dann die Grundflächen ABCD, EFGH gleich und stehen im umgekehrten Verhältnis, womit sich die Grundfläche ABCD zur Grundfläche EFGH verhält wie die Höhe MN zur Höhe KL.

Sind die Höhen LK, MN nicht gleich, dann sei MN größer als LK.
Wird dann von MN die der Höhe KL gleiche Höhe PN abgeteilt, dann teilt die zu den Grundflächen EFGH, RO parallele Ebene TPS im Punkt P den Zylinder ES mit der Grundfläche EFGH und der Höhe NP ab.



Da der Zylinder AQ gleich dem Zylinder EO ist, verhält sich dann der Zylinder AQ zum Zylinder ES wie der Zylinder EO zum Zylinder ES. Die Höhen der Zylinder AQ, ES sind gleich und es verhält sich somit der Zylinder AQ zum Zylinder ES wie die Grundfläche ABCD zur Grundfläche EFGH.

Der Zylinder EO verhält sich zum Zylinder ES wie die Höhe MN zur Höhe PN, denn der Zylinder EO wird von einer zu den Grundflächen parallelen Ebene geschnitten. Damit verhält sich die Grundfläche ABCD zur Grundfläche EFGH wie die Höhe MN zur Höhe PN.

Da die Höhen PN, KL gleich sind, verhält sich die Grundfläche ABCD zur Grundfläche EFGH wie die Höhe MN zur Höhe KL. Also steht der Zylinder AQ zum Zylinder EO im umgekehrten Verhältnis der Höhen.

Stehen die Grundflächen der Zylinder AQ, EO im umgekehrten Verhältnis der Höhen und verhält sich die Grundfläche ABCD zur Grundfläche EFGH wie die Höhe MN zur Höhe KL, dann verhält sich, da die Höhe KL der Höhe PN gleich ist, die Grundfläche ABCD zur Grundfläche EFGH wie die Höhe MN zur Höhe PN.

Da sich die Grundfläche ABCD zur Grundfläche EFGH verhält wie der Zylinder AQ zum Zylinder ES, denn beide haben gleiche Höhen, verhält sich die Höhe MN zur Höhe PN wie der Zylinder EO zum Zylinder ES. Der Zylinder AQ verhält sich zum Zylinder ES wie der Zylinder EO zum Zylinder ES, also sind die Zylinder AQ, EO gleich.

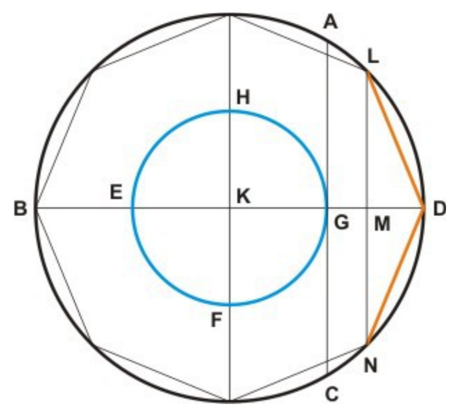
Die gleichen Verhältnisse gelten für Kegel, was zu zeigen war.

XII.16.

In den größeren von zwei Kreisen um denselben Mittelpunkt ein Polygon gerader Seitenzahl einbeschreiben, das den kleineren nicht berührt.

Es sind zwei Kreise ABCD, EFGH um denselben Mittelpunkt K gegeben. In den größeren der beiden Kreise ABCD soll ein Polygon mit gerader Seitenzahl einbeschrieben werden, das den kleineren Kreis EFGH nicht berührt.

Es ist durch den Punkt K die Gerade BKD zu legen und im Punkt G die zu BD senkrechte GA zu errichten und bis C zu verlängern. Damit berührt AC den Kreis EFGH [wie III.16. Zusatz].



Wird der Kreisbogen BAD in zwei gleiche Teile geteilt und jedes Teil wiederum in zwei gleiche Teile geteilt und wird dieses so fortgesetzt, so wird ein Kreisbogen übrig bleiben, der kleiner ist als der Kreisbogen AD [wie X.1.].

Ist LD dieser Kreisbogen, ist vom Punkt L aus die zu BD senkrechte LM zu errichten und bis N zu verlängern. Es sind dann LD, DN zu ziehen.

Da LD, DN gleich sind und da die Gerade LN zu AC parallel ist [wie I.28.], die den Kreis EFGH berührt, berührt LN den Kreis EFGH nicht, noch weniger berühren LD, DN den Kreis EFGH.

Indem der Strecke LD gleiche Strecken aneinander rund um den Kreis ABCD gelegt werden, wird ein gleichseitiges Polygon geraden Seitenzahl einbeschrieben, das den kleineren Kreis EFGH nicht berührt, was auszuführen war.

XII.17.

In die größere von zwei Kugeln um denselben Mittelpunkt ein Polyeder einbeschreiben, das die kleinere nicht berührt.

Es sind zwei Kugeln mit demselben Mittelpunkt A gegeben. In die größere der beiden Kugeln soll ein Polyeder einbeschrieben werden, das die kleinere Kugel nicht berührt.

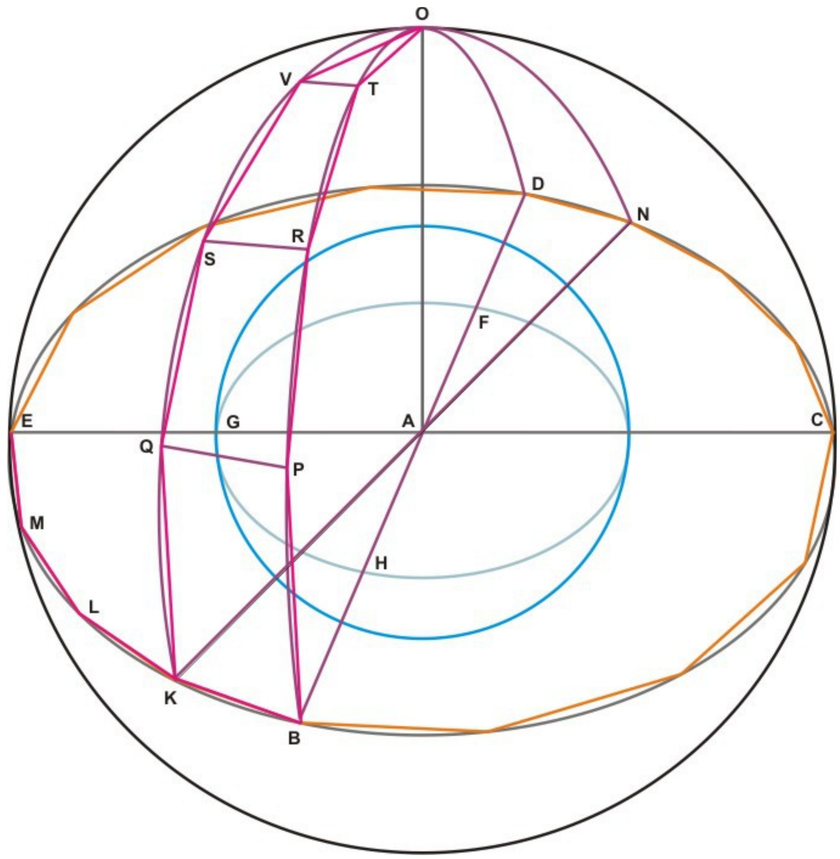
Wird die Kugel von einer Ebene durch den Mittelpunkt geschnitten, dann ist die Schnittfläche ein Kreis, denn eine Kugel wird von einem Halbkreises erzeugt, der um seinen festgehaltenen Durchmesser einmal bis zur Ausgangslage gedreht wird [wie XI. Erklärung 14].

Wie auch immer die Schnittebene durch den Kugelmittelpunkt gelegt wird, ist deshalb die Schnittfläche ein Kreis. Dieser Kreis ist der größte mögliche, da der Durchmesser der Kugel, der auch der Durchmesser des ihn erzeugenden Halbkreises ist, die größte aller Strecken im Kreis und in der Kugel ist [wie III.15.].

In die beiden Kreise BCDE, FGH sind die Durchmesser BD, CE senkrecht zueinander einzutragen und in den größeren Kreis BCDE ein gleichseitiges Polygon mit gerader Seitenzahl einzubeschreiben, das den kleineren Kreis FGH nicht berührt [wie XII.16.].

Sind BK, KL, LM, ME die Seiten dieses Polygons im Kreisviertel BE, dann ist KA zu ziehen und bis N zu verlängern.

Im Punkt A ist auf der Kreisfläche BCDE die senkrechte AO zu errichten und die Ebene der AO, BD und die Ebene der AO, KN durch den Mittelpunkt zu legen, die, wie vorhin erklärt, größtmögliche Schnittkreise ergeben, denn die Halbkreise BOD, KON liegen über den Durchmessern BD, KN.



Zur Kreisfläche BCDE ist OA senkrecht, womit alle Ebenen, in denen OA liegt, senkrecht zur Kreisfläche BCDE sind [wie XI.18.]. Somit sind die Halbkreise BOD, KON senkrecht zur Kreisfläche BCDE. Da die Halbkreise BED, BOD, KON gleich sind, denn die Durchmesser BD, KN sind gleich, sind die Kreisviertel BE, BO, KO gleich.

Ebenso viele Seiten des einbeschriebenen Polygons, wie sie in BE liegen, sind deshalb in die Kreisviertel BO, KO einzutragen. Es sind somit die den BK, KL, LM, ME gleichen Strecken BP, PR, RT, TO, KQ, QS, SV, VO einzutragen und QP, SR, VT zu ziehen.

Von den Punkten P, Q sind auf der Kreisfläche BCDE die Senkrechten PW, QX zu errichten, die in denselben Ebenen wie BD, KN liegen, denn die Halbkreise BOD, KON stehen senkrecht auf der Kreisfläche BCDE.

Es ist dann WX zu ziehen.

Von den gleichen Halbkreisbögen BOD, KON sind gleiche Kreisbögen BP, KQ abgeteilt, also ist PW gleich QX und ist BW gleich KX [wie III.28.].

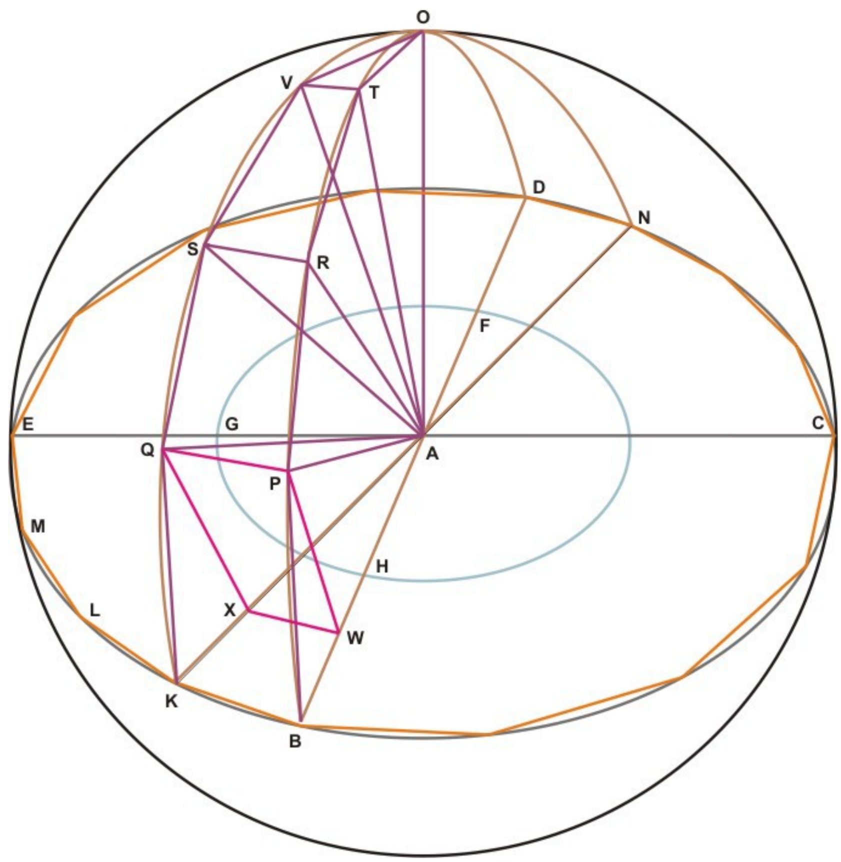
Da der ganze Radius BA gleich KA ist, ist somit das abgeteilte WA gleich XA und es verhält sich BW zu WA wie KX zu XA. Damit ist WX parallel zu BK [wie VI.2.].
Da sowohl PW wie QX auf der Kreisfläche BCDE senkrecht stehen, ist PW parallel zu QX [wie XI.6.] und da PW, QX gleich sind, ist WX parallel zu PQ [wie I.33.].
Es ist WX parallel zu PQ und es ist WX parallel BK, somit ist PQ parallel BK.

Das mit den Strecken BP, KQ gebildete Viereck KBPQ liegt damit in einer Ebene, denn eine Geraden durch zwei Punkte auf Parallelen liegt in der Ebene der Parallelen [wie XI.7.].

Aus den gleichen Gründen liegen die Vierecke QPRS, SRTV in einer Ebene. In einer Ebene liegt auch das Dreieck VTO [wie XI.2.].

Indem Gerade durch die Punkte P, Q, R, S, T, V und den Punkt A gezogen werden, entsteht ein polyedischer Körper, der zwischen den Kreisbögen BO, KO liegt und aus Pyramiden zusammengesetzt ist, deren Grundflächen die Vierecke KBPQ, QPRS, SRTV und das Dreieck VTO sind und deren Spitzen der Punkt A ist.

Wird über jeder der Seiten KL, LM, ME ein solcher Körper wie über BK gebildet und wird dies ebenso in den übrigen drei Kreisvierteln und in der anderen Halbkugel wiederholt, dann wird in die Kugel ein Polyeder einbeschrieben, das aus Pyramiden zusammengesetzt ist, deren Grundflächen die Vierecke und Dreiecke sind, die auf gleiche Weise, wie gezeigt, gefunden werden und die alle die Spitze A haben.



Das beschriebene Polyeder, sage ich, berührt die kleinere Kugel um den Kreis FGH nicht.

Denn wenn durch den Punkt A die Senkrechte AY auf dem Viereck KBPQ errichtet wird, ist ihr Fußpunkt Y.

Es sind dann YB, YK zu ziehen.

Da AY auf der Ebene des Vierecks KBPQ senkrecht steht, bildet sie mit allen Geraden dieser Ebene rechte Winkel. Somit sind BY, YK senkrecht zu AY.

Die Strecke AB ist gleich der Strecke AK und das Quadrat über AB ist gleich dem Quadrat über AK.

Die Quadrate über AY und über YB zusammen sind gleich dem Quadrat über AB, denn der Winkel im Punkt Y ist ein Rechter [wie I.47.].

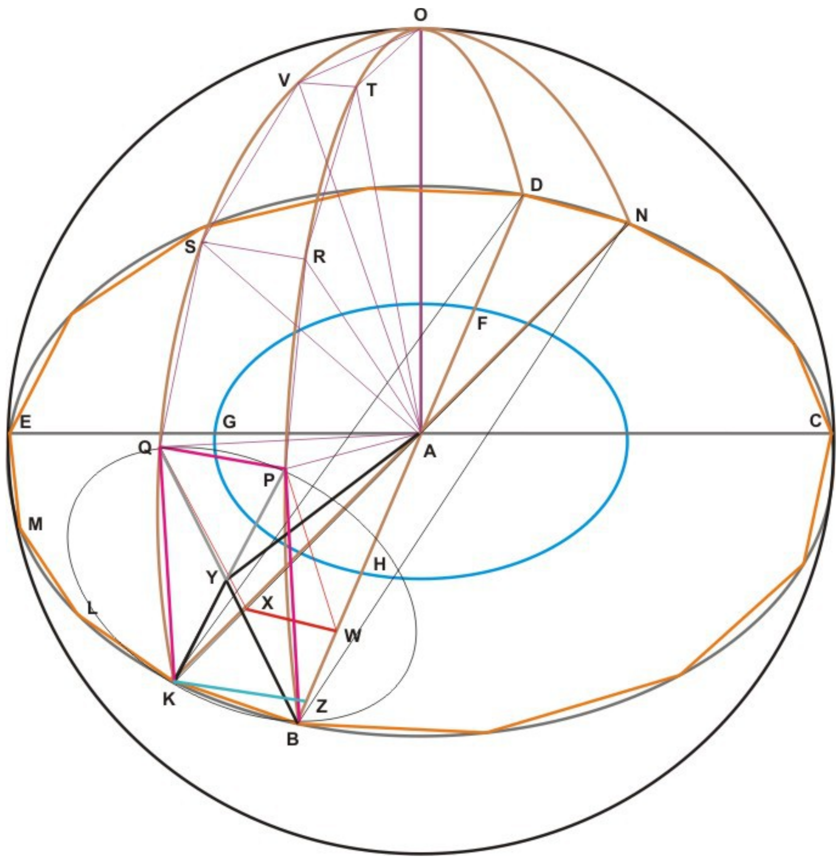
Da die Quadrate über AY und YK zusammen gleich dem Quadrat über AK sind, sind die Quadrate über AY und YB zusammen gleich den Quadraten über AY und YK zusammen. Beiden das gemeinsame Quadrat über AY weggenommen, ist dann das Quadrat über YB gleich dem Quadrat über YK und damit ist BY gleich YK.

Auf gleiche Weise ist zu zeigen, dass die Strecken, die vom Punkt Y zu den Punkten P, Q gezogen werden, gleich den Strecken YB, YK sind, so dass auf dem Kreis, der um den Punkt Y mit einem Radius gleich YB, YK geschlagen wird, die Punkte P, Q liegen und dieser Kreis somit der Umkreis des Vierecks KBPQ ist.

Da die Strecke KB größer als die Strecke XW ist und, da XW gleich PQ ist, ist KB größer als PQ. Die Strecke KB ist gleich der Strecke KQ und gleich der Strecke BP, also ist KQ größer als QP und ist BP größer als QP.

Da im Viereck mit dem Umkreis KBPQ die Kreisbögen KB, BP, KQ gleich und größer sind als der Kreisbogen PQ, ist KYB ein stumpfer Winkel im Kreis mit dem Radius BY.
Damit ist das Quadrat über KB größer als das Doppelte des Quadrats über BY [wie II.12.].

Es ist durch den Punkt K die Senkrechte KZ auf BA zu errichten.
Da BD kleiner ist als das Doppelte der DZ und sich BD zu DZ verhält wie das Rechteck aus DB mit BZ zum Rechteck aus DZ mit ZB [wie VI.1.], ist das Rechteck aus DB mit BZ kleiner als das Doppelte des Rechtecks aus DZ mit BZ.



Es ist KD zu ziehen, das mit BK einen rechten Winkel bildet. Damit ist das Rechteck aus DB mit BZ gleich dem Quadrat über BK [wie VI.8. Zusatz].

Entsprechend ist das Rechteck aus DZ mit BZ gleich dem Quadrat über KZ Damit ist das Quadrat über KB kleiner als das doppelte Quadrat über KZ.

Da das Quadrat über KB größer ist als das doppelte Quadrat über BZ, ist das Quadrat über KZ größer als das Quadrat über BY.

Die Radien BA, KA sind gleich, womit das Quadrat über BA gleich dem Quadrat über KA ist. Das Quadrat über BA ist gleich dem Quadrat über BY und dem Quadrat über YA zusammen und das Quadrat über KA ist gleich dem Quadrat über KZ und dem Quadrat über ZA zusammen, also ist das Quadrat über BY und das Quadrat über YA zusammen gleich dem Quadrat über KZ und dem Quadrat über ZA zusammen.

Das Quadrat über KZ ist größer als das Quadrat über BY und damit ist das Quadrat über ZA kleiner als das Quadrat über YA, somit ist AY größer als AZ und desto größer als AH.
Da AY die Strecke vom Mittelpunkt an die Oberfläche des Polyeders und AH die Strecke vom Mittelpunkt an die Oberfläche der kleineren Kugel ist, berührt das Polyeder die kleinere Kugel nicht.

Damit ist in die größere von zwei Kugeln mit demselben Mittelpunkt ein Polyeder einbeschrieben, das die kleinere Kugel nicht berührt, was auszuführen war.

Zusatz XII.17 Porisma:

Das Polyeder, das der Kugel BCDE einbeschrieben ist, steht zu einem ähnlichen Polyeder, das einer anderen Kugel mit dem Mittelpunkt A einbeschrieben wird, im Verhältnis des Kubus über dem Durchmesser der Kugel BCDE zum Kubus über dem Durchmesser der anderen Kugel.

Denn wenn die Polyeder in die gleiche Anzahl ähnlich errichteter Pyramiden aufgeteilt werden, dann sind diese Pyramiden einander ähnlich. Ähnliche Pyramiden, deren Grundflächen Polygone sind, stehen im Verhältnis der Kuben über entsprechenden Kanten [wie XII.8. Zusatz].

Also steht auch die Pyramide, deren Grundfläche das Viereck KBPQ und deren Spitze der Punkt A ist, zur Pyramide im anderen Polyeder im Verhältnis der Kuben über entsprechenden Kanten und damit im Verhältnis des Kubus über dem Radius AB zum Kubus über dem Radius der anderen Kugel, die denselben Mittelpunkt A hat.

Jede der ähnlich errichteten Pyramiden, deren Spitzen der Mittelpunkt A ist, in den beiden Kugeln mit dem Mittelpunkt A steht im Verhältnis des Kubus über dem Radius AB zum Kubus über dem Radius der anderen Kugel. Stehen mehrere Größen in gleicher Proportion, dann verhält sich eines der Vorderglieder zum Hinterglied wie die Vorderglieder zusammen zu den Hintergliedern zusammen [wie V.12.].

Deshalb steht das ganze Polyeder in der Kugel mit dem Mittelpunkt A zum ganzen Polyeder in der anderen Kugel im Verhältnis des Kubus über dem Radius AB zum Kubus über dem Radius der anderen Kugel und damit im Verhältnis des Kubus über dem Durchmesser BD zum Kubus über dem Durchmesser der anderen Kugel, was zu zeigen war.

XII.18.

Kugeln stehen im Verhältnis der Kuben über ihren Durchmessern.

Wenn die beiden Kugeln ABC, DEF die Durchmesser BC, EF haben, dann, sage ich, verhält sich die Kugel ABC zur Kugel DEF wie der Kubus über dem Durchmesser BC zum Kubus über dem Durchmesser EF.

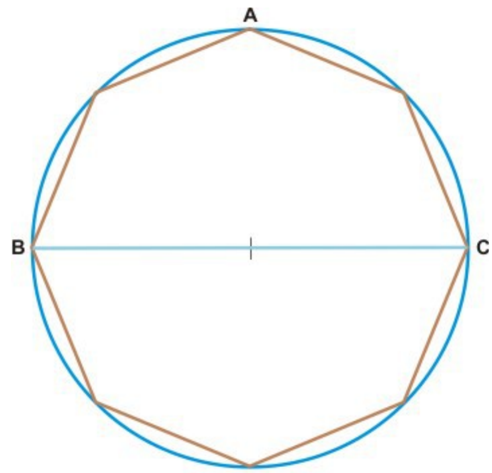
Denn wenn nicht, steht die Kugel ABC zu einer Kugel, die kleiner oder größer ist als DEF im Verhältnis des Kubus über dem Durchmesser BC zum Kubus über dem Durchmesser EF.

Besteht nun dieses Verhältnis zu einer kleineren Kugel GHK und liegen DEF, GHK um denselben Mittelpunkt, dann ist in die größere Kugel DEF ein Polyeder einzubeschreiben, das die kleinere Kugel GHK nicht berührt [wie XII.17.].

Wird in die Kugel ABC ein diesem ähnliches Polyeder einbeschrieben, dann verhält sich das in die Kugel ABC einbeschriebene Polyeder zu dem in die Kugel DEF einbeschriebenen Polyeder wie der Kubus über dem Durchmesser BC zum Kubus über dem Durchmesser EF [wie XII.17. Zusatz].

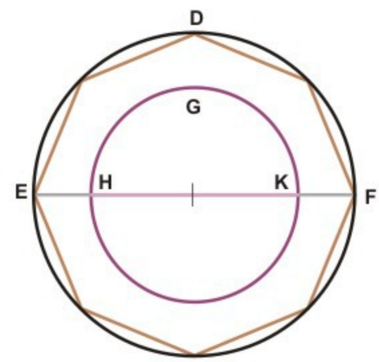
Da sich die Kugel ABC zur Kugel GHK verhält wie der Kubus über BC zum Kubus über EF, verhält sich die Kugel ABC zur Kugel GHK wie das in die Kugel ABC einbeschriebene Polyeder zu dem in die Kugel DEF einbeschriebenen Polyeder und, nach Umordnung [wie V.16.], verhält sich die Kugel ABC zu dem in sie einbeschriebenen Polyeder wie die Kugel GHK zu dem in die Kugel DEF einbeschriebenen Polyeder.

Die Kugel ABC ist größer als das in sie einbeschriebene Polyeder, also ist dann die Kugel GHK größer als das in die Kugel DEF einbeschriebene Polyeder; sie ist aber kleiner, denn sie liegt innerhalb von ihm, was nicht möglich ist. Die Kugel ABC steht deshalb zur kleineren Kugel DEF nicht im Verhältnis des Kubus über dem Durchmesser BC zum Kubus über dem Durchmesser EF.



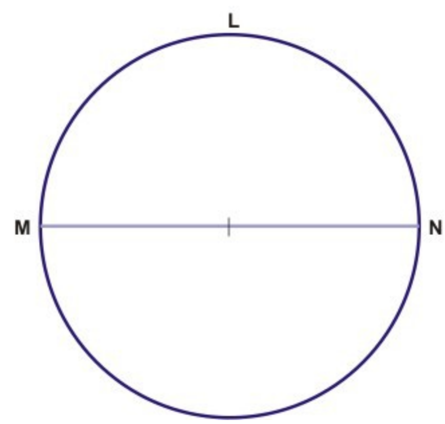
Auf gleiche Weise ist zu zeigen, dass die Kugel DEF auch zu einer Kugel, die kleiner ist als ABC, nicht im Verhältnis des Kubus über EF zum Kubus über BC steht.

Die Kugel ABC, sage ich zudem, steht auch zu einer Kugel, die größer ist als DEF, nicht im Verhältnis des Kubus über BC zum Kubus über EF.



Denn wenn doch, dann besteht dieses Verhältnis zu einer größeren Kugel LMN und es verhält sich dann die Kugel LMN zur Kugel ABC wie der Kubus über dem Durchmesser EF zum Kubus über dem Durchmesser BC [wie V.7. Zusatz].

Da sich dann die Kugel LMN zur Kugel ABC verhält wie die Kugel DEF zu einer Kugel, die kleiner ist als ABC, und da die Kugel LMN größer ist als die Kugel DEF, verhält sich dann DEF zu einer Kugel, die kleiner ist als ABC, wie der Kubus über EF zum Kubus über BC, was, wie gezeigt, nicht möglich ist.



Also steht die Kugel ABC zu einer Kugel, die größer ist als DEF, nicht im Verhältnis des Kubus über BC zum Kubus über EF.

Da sie, wie gezeigt, auch zu einer Kugel, die kleiner ist als DEF, nicht in diesem Verhältnis steht, deshalb steht die Kugel ABC zur Kugel DEF im Verhältnis des Kubus über BC zum Kubus über EF, was zu zeigen war.
