Euklid: Stoicheia

(Die Elemente des Euklid)

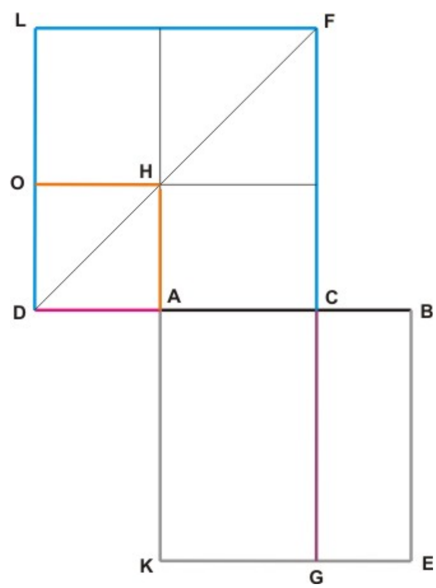
Buch XIII.

Über eingefügte Hypertextverknüpfungen kann der griechische Text in der Fassung von I. L. Heiberg aufgerufen werden.

XIII.1.

Das Quadrat über der Strecke aus dem größeren Teil einer in stetiger Teilung geteilten Strecke zusammen mit der Hälfte der Strecke ist gleich dem fünffachen Quadrat über der Hälfte der Strecke.

Wenn die Strecke AB im Punkt C in stetiger Teilung [wie VI. Erklärung 3.] so geteilt ist, dass AC der größere Teil ist, der um AD, die der Hälfte von AB gleich ist, bis D verlängert wird, dann ist, sage ich, das Quadrat über CD gleich dem fünffachen Quadrat über DA.



Es sind über AB, DC die Quadrate AE, DF zu errichten. Es ist AK zu verlängern, DF im Schnittpunkt H mit der Diagonalen DF in vier Parallelogramme aufzuteilen [wie II. Erklärung 2.] und CF bis G zu verlängern. Es ist dann, da AB in C in stetiger Teilung geteilt ist, das Rechteck aus AB mit BC gleich dem Quadrat über AC [wie VI.17.]. Das Rechteck aus AB mit BC ist gleich dem Rechteck CE und das Quadrat über AC ist gleich dem Quadrat FH, somit ist CE gleich FH. Da BA gleich der doppelten AD ist, wobei BA gleich KA und AD gleich AH ist, ist KA gleich dem doppelten AH.

Es verhält sich KA zu AH wie CK zu CH [wie VI.1.], also ist CK gleich dem doppelten CH. Das doppelte CH ist gleich den Rechtecken LH, HC zusammen, also ist das Rechteck KC gleich den Rechtecken LH, HC zusammen. Da, wie gezeigt, das Rechteck CE gleich dem Rechteck HF ist, ist damit das Quadrat AE gleich dem Gnomon LFCH.

Es ist BA gleich dem doppelten AD, also ist das Quadrat über BA gleich vier Quadraten über AD und ist das Quadrat AE gleich vier Quadraten DH. Das Quadrat AE ist gleich dem Gnomon LFCH, das somit gleich vier Quadraten DH ist. Das ganze Quadrat DF ist damit gleich fünf Quadraten DH.

Es ist DF ist das Quadrat über DC und es ist AO das Quadrat über DA, also ist das Quadrat über CD gleich fünf Quadraten über DA.

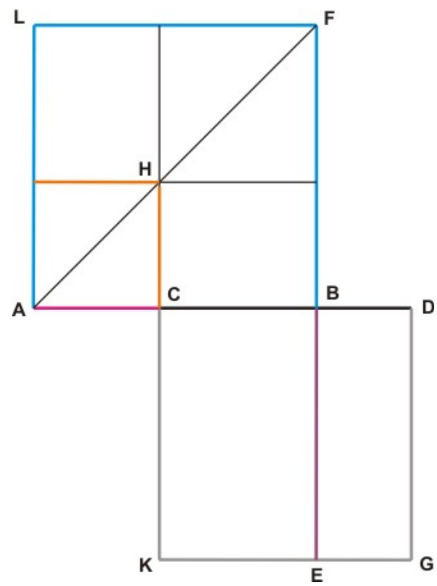
Deshalb ist das Quadrat über der Strecke aus dem größeren Teil einer in stetiger Teilung geteilten Strecke zusammen mit der Hälfte der Strecke gleich dem fünffachen Quadrat über der Hälfte der Strecke, was zu zeigen war.

XIII.2.

Ist das Quadrat über einer Strecke gleich dem fünffachen Quadrat über einem ihrer Abschnitte, dann ist der andere Abschnitt gleich dem größerem Teil der in stetiger Teilung geteilten doppelten Strecke.

Wenn das Quadrat über der Strecke AB gleich dem fünffachen Quadrat über dem Abschnitt AC ist, dann ist, sage ich, der größere Teil der in stetiger Teilung geteilten doppelten Strecke CD gleich dem Abschnitt CB.

Es sind über AB, CD die Quadrate AF, CG zu errichten, es ist CK zu verlängern und AF im Schnittpunkt H mit der Diagonalen AF in vier Parallelogramme aufzuteilen und es ist FB bis E zu verlängern. Es ist dann das Quadrat über BA das Fünffache des Quadrats über AC. Somit ist das Quadrat AF gleich fünf Quadraten AH und ist das Gnomon LFBH gleich vier Quadraten AH.



Da DC das Doppelte von CA ist, ist das Quadrat über DC gleich vier Quadraten über CA, somit ist das Quadrat CG gleich vier Quadraten AH.
Damit ist das Gnomon LFBH gleich dem Quadrat CG.

Da DC gleich dem doppelten CA, da DC gleich CK und AC gleich CH ist, ist das Rechteck KB gleich dem doppelten Rechteck BH.

Es sind LH und HB zusammen gleich dem doppelten HB, also ist das Rechteck KB gleich den Rechtecken LH und HB zusammen.

Da, wie gezeigt, das Gnomon LFBH gleich dem Quadrat CG ist, ist das Quadrat HF gleich dem Rechteck BG.

Es ist BG das Rechteck aus CD mit DB, denn CD ist gleich DG, und es ist HF das Quadrat über CB, also ist das Rechteck aus CD mit DB gleich dem Quadrat über CB.
Es verhält sich DC zu CB wie CB zu BD [wie VI.17.]. Da DC größer als CB ist, ist somit CB größer als BD. Damit ist CD in stetiger Teilung geteilt, wobei CB der größere Teil ist.

Deshalb ist dann, wenn das Quadrat über einer Strecke gleich dem fünffachen Quadrat über einem ihrer Abschnitte ist, der andere Abschnitt gleich dem größeren Teil der in stetiger Teilung geteilten doppelten Strecke, was zu zeigen war.

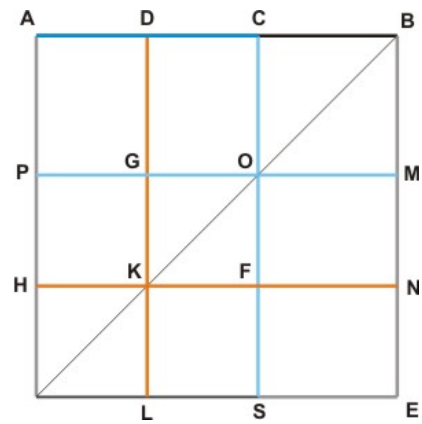
Anmerkung:

Ist $CD = 1$, $AC = 1/2$,
dann $AB^2 = 5 \cdot (1/2)^2$, $AB = 5^{1/2}/2$
und $CB = AB - AC = (5^{1/2} - 1)/2$ ist der größere Teil der in stetiger Teilung geteilten CD.

XIII.3.

Das Quadrat über der Strecke aus dem kleineren Teil einer in stetiger Teilung geteilten Strecke und der Hälfte des größeren Teiles zusammen ist gleich dem fünffachen Quadrat über der Hälfte des größeren Teils.

Wenn die Strecke AB im Punkt C in stetiger Teilung geteilt wird, wobei AC der größere Teil ist, der in D in zwei gleiche Teile geteilt wird, dann ist, sage ich, das Quadrat über BD gleich fünf Quadraten über DC.



Denn wenn über AB das Quadrat AE errichtet und zweifach in jeweils vier Parallelogramme aufgeteilt wird, dann ist, da AC gleich dem doppelten DC ist, das Quadrat über AC gleich vier Quadraten über DC. Somit ist das Quadrat PS gleich vier Quadraten FG.

Da das Rechteck aus AB mit BC gleich dem Quadrat über AC [wie VI.17.] und da das Rechteck aus AB mit BC gleich dem Rechteck CE ist, ist das Rechteck CE gleich dem Quadrat PS. Das Quadrat PS ist gleich vier Quadraten FG, also ist das Rechteck CE gleich vier Quadraten FG.

Es ist AD gleich DC und ist HK gleich KF, somit ist das Quadrat GF gleich dem Quadrat HL. Es ist GK gleich KL und ist MN gleich NE, somit ist das Rechteck MF gleich dem Rechteck FE. Das Rechteck MF ist gleich dem Rechteck CG, also ist das Rechteck CG gleich dem Rechteck FE; beiden das gleiche Rechteck CN hinzugefügt ist das Gnomon DBNO gleich dem Rechteck CE.

Da, wie gezeigt, das Rechteck CE gleich vier Quadraten GF ist, ist das Gnomon DBNO gleich vier Quadraten FG und ist das Gnomon DBNO zusammen mit dem Quadrat FG gleich fünf Quadraten FG.

Das Gnomon DBNO zusammen mit dem Quadrat FG ist das Quadrat DN, also das Quadrat über DB. Das Quadrat GF ist das Quadrat über DC, damit ist das Quadrat über DB gleich fünf Quadraten über DC, was zu zeigen war.

XIII.4.

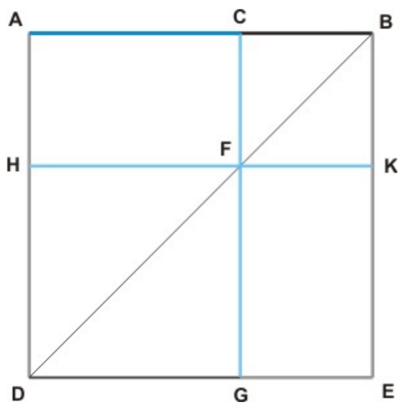
Das Quadrat über einer in stetiger Teilung geteilten Strecke zusammen mit dem Quadrat über dem kleineren Teil ist gleich dem dreifachen Quadrat über dem größeren Teil.

Wenn die Strecke AB in C in stetiger Teilung geteilt ist, wobei AC der größere Teil ist, dann ist, sage ich, das Quadrat über AB zusammen mit dem Quadrat über BC gleich drei Quadraten über CA.

Es ist über AB das Quadrat ADEB zu errichten und in vier Parallelogramme aufzuteilen [wie II. Erklärung 2.].

Da AB in C in stetiger Teilung geteilt und AC der größere Teil ist, ist das Rechteck aus AB mit BC gleich dem Quadrat über AC [wie VI.17.], also gleich dem Rechteck AK. Das Quadrat über AC ist gleich dem Quadrat HG. Somit ist das Rechteck AK gleich dem Quadrat HG.

Es ist das Rechteck AF gleich dem Rechteck FE und, beidem das Quadrat CK hinzugefügt, das Rechteck AK gleich dem Rechteck CE und die Rechtecke AK, CE zusammen gleich zwei AK.



Damit sind die Rechtecke AK, CE zusammen gleich dem Gnomon ABEF und dem Quadrat CK zusammen. Das Gnomon ABEF und das Quadrat CK zusammen sind somit gleich zwei Rechtecken AK.

Da, wie gezeigt, das Rechteck AK gleich dem Rechteck HG ist, ist das Gnomon ABEF zusammen mit CK und einem Quadrat HG gleich drei Quadraten HG.

Das Gnomon ABEF zusammen mit CK und HG ist gleich dem Quadrat AE zusammen mit dem Quadrat CK, somit gleich dem Quadrat über AB zusammen mit dem Quadrat über BC.

Es ist GH das Quadrat über AC, also ist das Quadrat über AB zusammen mit dem Quadrat über BC gleich drei Quadraten über AC, was zu zeigen war.

Anmerkung:

Mit $AB = a$, $AC = b$ ist $a : b = b : (a - b)$ bei stetiger Teilung, damit $a \cdot (a - b) = b^2$

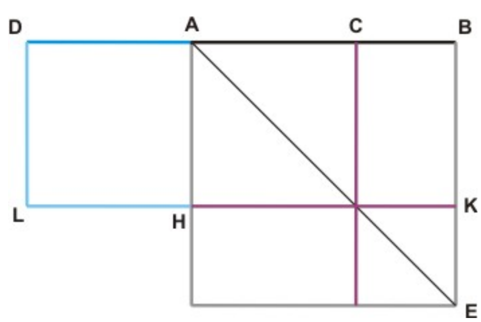
und
$$2a^2 - 2ab = 2b^2,$$
$$2a^2 - 2ab + b^2 = a^2 + (a - b)^2 = 3b^2.$$

XIII.5.

Eine nach stetiger Teilung geteilte Strecke zusammen mit ihrem größeren Teil ist der größere Teil der zusammengesetzten Strecke nach stetiger Teilung geteilt.

Wenn die Strecke AB im Punkt C in stetiger Teilung geteilt, wobei AC der größere Teil ist, und ihr die der AC gleiche Strecke AD hinzugefügt ist, dann ist, sage ich, DB in A in stetiger Teilung geteilt, wobei AB der größere Teil ist.

Denn wenn über AB das Quadrat AE errichtet und dieses in vier Parallelogramme aufgeteilt wird, dann ist, da AB in C in stetiger Teilung geteilt ist, das Rechteck aus AB mit BC gleich dem Quadrat über AC und gleich dem Rechteck CE. Das Quadrat über AC ist das Quadrat CH, also ist das Rechteck CE dem Quadrat HC gleich.



Das Rechteck HE ist gleich dem Rechteck CE und das Quadrat DH ist gleich dem Quadrat HC, somit ist DH gleich HC und gleich HE. Das ganze Rechteck DK ist damit gleich dem Quadrat AE. Da DK gleich dem Rechteck aus BD mit DA ist, denn AD ist gleich DL, und da AE gleich dem Quadrat über AB ist, ist das Rechteck aus BD mit DA gleich dem Quadrat über AB.

Es verhält sich DB zu BA wie BA zu AD, wobei DB größer als BA und BA damit größer als AD ist. Deshalb ist AB der größere Teil der in A in stetiger Teilung geteilten Strecke DB, was zu zeigen war.

XIII.6.

Die Teile einer Strecke rationaler oder quadriert rationaler Länge, die in stetiger Teilung geteilt ist, sind irrational und zwar apotomisch.

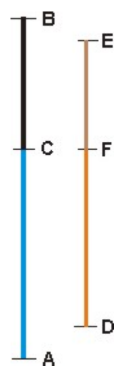
Wenn die Strecke rationaler oder quadriert rationaler Länge AB in C in stetiger Teilung geteilt ist, wobei AC der größere Teil ist, dann sind, sage ich, die Teile AC, CB irrational und zwar apotomisch [wie X.73.].

Denn wenn BA um AD, das dem halben BA gleich ist, verlängert wird, dann, da AB in C in stetiger Teilung geteilt ist, wobei AC der größere Teil ist, ist das Quadrat über CD gleich fünf Quadraten über DA [wie XIII.1.].

Das Quadrat über CD steht zum Quadrat über DA in einem Verhältnis wie eine Zahl zu einer anderen, also sind die Quadrate über CD, DA kommensurabel [wie X.6.]. Da das Quadrat über DA rational ist, denn DA ist die Hälfte der rationalen oder quadriert rationalen Strecke AB, ist auch das Quadrat über CD rational. Also ist CD quadriert rational.

Das Quadrat über CD verhält sich zum Quadrat über DA nicht wie eine Quadratzahl zu einer anderen, somit sind CD, DA der Länge nach inkommensurabel [wie X.9.]. Damit sind CD, DA nur im Quadrat kommensurabel, womit AC apotomisch ist [wie X.73.].

Es ist AB in stetiger Teilung geteilt, wobei der größere Teil AC ist, und somit ist das Rechteck aus AB mit BC gleich dem Quadrat über AC [wie VI.17.].
Es ist also das Quadrat über der apotomischen Strecke AC gleich dem Rechteck aus AB mit BC. Ist ein Rechteck mit einer rationalen Strecke gleich dem Quadrat über einer apotomischen Strecke, dann ist seine andere Seite eine quadriert apotomische Strecke erster Art [wie X.97.]. Damit ist BC eine quadriert apotomische Strecke erster Art.



Ist nun AB quadriert rational, dann sei eine rationale Strecke DE im Punkt F in stetiger Teilung geteilt, wobei DF der größere Teil ist. Es verhält sich dann AB zu DE wie AC zu DF und wie CB zu FE.
Es ist das Quadrat über AB zum Quadrat über DE kommensurabel, somit ist auch das Quadrat über CB zum Quadrat über FE kommensurabel [wie X.10.].

Wie für rationale AB gezeigt, ist dann FE eine quadriert apotomische Strecke erster Art. Da damit FE apotomisch ist, ist auch BC apotomisch[1].

Also ist CB eine apotomische Strecke. Dass CA apotomisch ist, wurde schon gezeigt.

Deshalb sind die Teile einer Strecke rationaler oder quadriert rationaler Länge, die in stetiger Teilung geteilt ist, irrational und zwar apotomisch, was zu zeigen war.

Anmerkung:

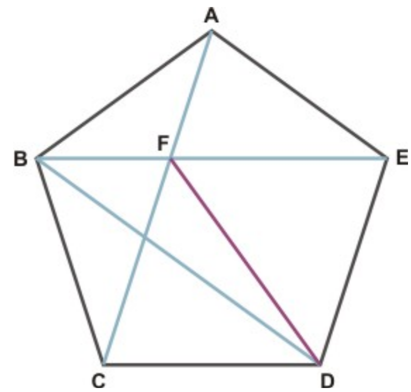
Ist AB = 2, dann ist AC = $5^{½} – 1$ und CB = $3 – 5^{½}$,
ist AB = $2 \cdot 2^{½}$, dann ist AC = $10^{½} – 2^{½}$ und CB = $3 \cdot 2^{½} – 10^{½}$,
dabei sind AC, CB apotomisch und sind die Quadrate über AC, CB apotomisch.

[1] So bei Ratdolt.

XIII.7.

Ein gleichseitiges Fünfeck, in dem drei Winkel, nebeneinanderliegend oder nicht, gleich sind, ist gleichwinklig.

Wenn im gleichseitigen Fünfeck ABCDE die drei Winkel A, B, C, zuerst nebeneinanderliegend angenommen, gleich sind, dann ist, sage ich, das Fünfeck ABCDE gleichwinklig.



Denn wenn AC, BE, FD gezogen werden, dann sind, da die Seiten CB, BA den Seiten BA, AE gleich sind und der Winkel CBA dem Winkel BAE gleich ist, die Dreiecke ABC, ABE gleich, da damit ihre Grundseiten AC, BE gleich sind.

Auch die übrigen Winkel dieser Dreiecke sind gleich, denn sie liegen gleichen Seiten gegenüber.

Der Winkel BCA ist gleich dem Winkel BEA und der Winkel ABE ist gleich dem Winkel CAB, also ist der Abschnitt AF gleich dem Abschnitt BF und, da das ganze AC gleich dem ganzen BE ist, ist das übrige FC gleich dem übrigen FE.

Die Seite CD, die gleich der Seite DE ist, und die beiden Seiten FC, CD , die den Seiten FE, ED gleich sind, bilden mit der gemeinsamen FD die Dreiecke FCD, FED, die somit gleich sind.

Da, wie gezeigt, der Winkel BCA dem Winkel AEF gleich ist, ist der Winkel BCD dem Winkel AED gleich. Da, wie angenommen, der Winkel BCD den Winkeln an A, B gleich ist, und da, wie gezeigt, der Winkel CDE den Winkeln an A, B, C gleich ist, ist das Fünfeck ABCDE gleichwinklig.

Auch dann, wenn die drei gleichen Winkel nicht nebeneinander, sondern an den Punkten A, C, D liegen, sage ich, ist das Fünfeck ABCDE gleichwinklig.

Denn wenn BD gezogen wird, dann sind, da die Seiten BA, AE den Seiten BC, CD gleich sind und da die Winkel, die sie einschließen, gleich sind, die Dreiecke ABE, BCD gleich, da damit ihre Grundseiten BE, BD gleich sind. Auch die übrigen Winkel dieser Dreiecke sind gleich, denn sie liegen gleichen Seiten gegenüber.

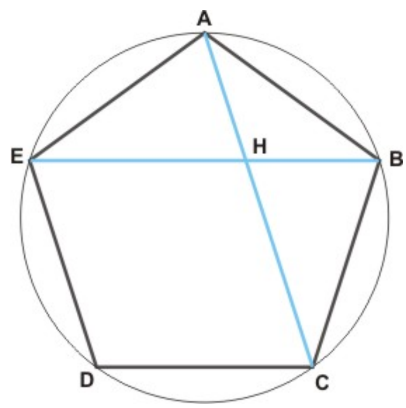
Somit ist der Winkel AEB gleich dem Winkel CDB und, da der Winkel BED gleich dem Winkel BDE ist, ist BE gleich BD und ist der Winkel AED gleich dem Winkel CDE. Da, wie angenommen, der Winkel CDE den Winkel an A, C gleich ist, ist auch der Winkel AED den Winkeln an A, C gleich.

Aus den gleichen Gründen ist der Winkel ABC den Winkeln an A, C, D gleich. Deshalb ist das Fünfeck ABCDE gleichwinklig, was zu zeigen war.

XIII.8.

Die Sehnen unter zwei nebeneinanderliegenden Winkeln eines gleichseitigen und gleichwinkligen Fünfecks schneiden sich in stetiger Teilung, wobei die größeren Teile den Seiten des Fünfecks gleich sind.

Wenn im gleichseitigen und gleichwinkligen Fünfeck ABCDE sich die unter den Winkeln an A, B liegenden Sehnen AC, BE im Punkt H schneiden, dann, sage ich, werden sie im Punkt H in stetiger Teilung geteilt, wobei die größeren Teile den Seiten des Fünfecks gleich sind.



Es ist um das Fünfeck ABCDE der Kreis ABCDE zu beschreiben [wie IV.14.].

Da die beiden Seiten EA, AB den beiden Seiten AB, BC gleich sind und gleiche Winkel einschließen, ist BE gleich AC und ist somit das Dreieck ABE gleich dem Dreieck ABC, wobei die übrigen Winkel den anderen übrigen Winkeln gleich sind und gleiche Seiten gegenüberliegen. Also ist der Winkel BAC gleich dem Winkel ABE.

Der Winkel AHE ist gleich zwei Winkeln BAH [wie I.32.]. Es ist der Winkel EAC gleich zwei Winkeln BAC, denn der Kreisbogen EDC ist das doppelte des Kreisbogens CB, und somit ist der Winkel HAE gleich dem Winkel AHE. Damit ist HE gleich EA und gleich AB.
Da die Seite BA gleich der Seite AE ist, ist der Winkel ABE gleich dem Winkel AEB.

Es ist, wie gezeigt, der Winkel ABE gleich dem Winkel BAH und somit der Winkel BEA gleich dem Winkel BAH. Die Dreiecke ABE, ABH haben denselben Winkel ABE, also ist der Winkel BAE gleich dem Winkel AHB.

Da die Dreiecke ABE, ABH gleichwinklig sind, verhält sich EB zu BA wie AB zu BH, wobei BA gleich EH ist. Damit verhält sich BE zu EH wie EH zu HB. Da BE größer als EH ist, ist EH größer als HB.

Deshalb ist BE in H in stetiger Teilung geteilt, wobei der größere Teil HE den Seiten des Fünfecks gleich ist, und ist auf gleiche Weise zu zeigen, dass AC in H in stetiger Teilung geteilt ist, wobei der größere Teil CH den Seiten des Fünfecks gleich ist, was zu zeigen war.

XIII.9.

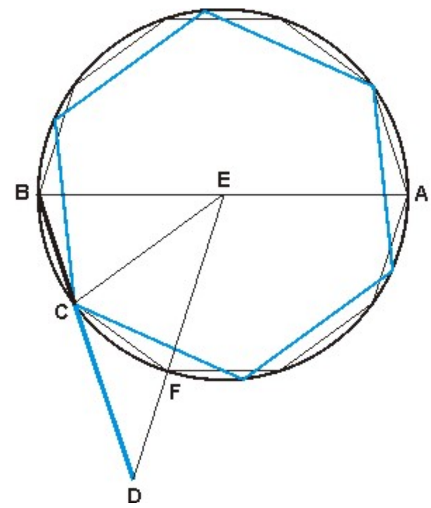
Die Seiten eines demselben Kreis einbeschriebenen gleichseitigen Sechsecks und eines gleichseitigen Zehnecks zusammen ergeben eine Strecke, die in stetiger Teilung geteilt ist, wobei die Seite des Sechsecks der größere Teil ist.

Wenn in den Kreis ABC ein gleichseitiges Zehneck und ein gleichseitiges Sechseck einbeschrieben werden und an die Seite BC des Zehnecks die Seite CD des Sechsecks auf die selbe Gerade gelegt wird, dann ist, sage ich, die ganze Strecke BD in stetiger Teilung geteilt, wobei CD der größere Teil ist.

Es sind vom Mittelpunkt E des Kreises EB, EC, ED zu ziehen und es ist BE bis A zu verlängern. Da BC die Seite eines gleichseitigen Zehnecks ist, ist der Kreisbogen ACB das Fünffache des Kreisbogens BC und ist der Kreisbogen AC das Vierfache des Kreisbogens CB.

Der Kreisbogen AC verhält sich zum Kreisbogen CB wie der Winkel AEC zum Winkel CEB, also ist der Winkel AEC das Vierfache des Winkels CEB. Der Winkel EBC ist gleich dem Winkel ECB und der Winkel AEC damit das Doppelte des Winkels ECB [wie I.32.].

Es ist EC gleich CD, denn die Seiten des Sechsecks, das dem Kreis ABC einbeschrieben ist, sind dem Radius gleich [wie IV.15. Zusatz]. Damit ist der Winkel CED gleich dem Winkel CDE und ist der Winkel ECB das Doppelte des Winkels EDC.



Da, wie gezeigt, der Winkel AEC gleich dem Doppelten des Winkels ECB ist, ist der Winkel AEC gleich dem Vierfachen des Winkels EDC und gleich dem Vierfachen des Winkels BEC. Also ist der Winkel EDC gleich dem Winkel BEC.

Die beiden Dreiecke BEC, BED haben den gleichen Winkel EBD, womit der Winkel BED gleich dem Winkel ECB ist. Somit sind die Dreiecke EBD, EBC gleichwinklig und es verhält sich DB zu BE wie EB zu BC und, da EB gleich CD ist, verhält sich BD zu DC wie DC zu CB, wobei BD größer als DC und DC größer als CB ist.

Deshalb ist BD in stetiger Teilung geteilt, wobei DC der größere Teil ist, was zu zeigen war.

Anmerkung:

Ist der Radius $r = CD$ des Kreises, dann ist BC der größere Teil einer in stetiger Teilung geteilten Strecke und es ist die Seite des Zehnecks $s_{10} = r \cdot (5^{1/2} - 1) / 2$ [wie XIII.2.].

XIII.10.

Das Quadrat über der Seite eines in einen Kreis einbeschriebenen gleichseitigen Fünfecks ist gleich den Quadraten über den Seiten des diesem Kreis einbeschriebenen gleichseitigen Sechsecks und des ihm einbeschriebenen gleichseitigen Zehnecks zusammen.

Wenn in den Kreis ABCDE ein gleichseitiges Fünfeck einbeschrieben ist, dann ist, sage ich, das Quadrat über einer seiner Seiten gleich den Quadraten über den Seiten des dem Kreis ABCDE einbeschriebenen gleichseitigen Sechsecks und des einbeschriebenen gleichseitigen Zehnecks zusammen.

Es ist durch den Kreismittelpunkt F der Radius AF zu ziehen und bis G zu verlängern, es ist FB zu ziehen, es ist auf AB die Senkrechte FH durch F zu errichten und bis K zu verlängern, es sind dann AK, KB zu ziehen, es ist auf AK die Senkrechte FL durch F zu errichten und bis M zu verlängern und es ist KN zu ziehen.

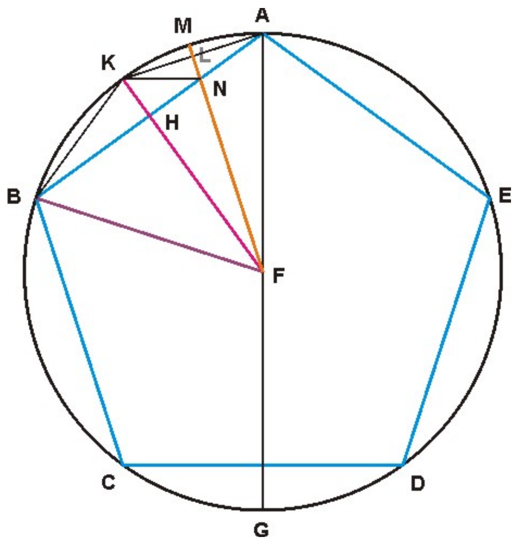
Der Kreisbogen ABCG ist gleich dem Kreisbogen AEDG und der Kreisbogen ABC ist gleich dem Kreisbogen AED, also ist der Kreisbogen CG gleich dem Kreisbogen GD.

Da CD ein Kreisbogen über einer Seite des Fünfecks ist, ist CG ein Kreisbogen über der Seite eines Zehnecks.

Die Radien FA, FB sind gleich, FH ist Senkrechte, womit der Winkel AFK gleich dem Winkel KFB und somit AK gleich KB ist. Es ist damit der Kreisbogen AB das Doppelte des Kreisbogens BK und damit AK die Seite eines gleichseitigen Zehnecks.

Aus den gleichen Gründen ist der Kreisbogen AK das Doppelte des Kreisbogens KM.
Da der Kreisbogen AB das Doppelte des Kreisbogens BK ist und da der Kreisbogen CD gleich dem Kreisbogen AB ist, ist der Kreisbogen CD das Doppelte des Kreisbogens BK. Da der Kreisbogen CD das Doppelte des Kreisbogens CG ist, ist der Kreisbogen CG gleich dem Kreisbogen BK. Der Kreisbogen BK ist das Doppelte des Kreisbogens KM, somit ist der Kreisbogen CG das Doppelte des Kreisbogens KM.

Der Kreisbogen CB ist das Doppelte des Kreisbogens BK, denn der Kreisbogen CB ist dem Kreisbogen BK gleich, also ist der zusammengesetzte Kreisbogen GB das Doppelte des Kreisbogens BM. Somit ist der Winkel GFB das Doppelte des Winkels BFM.
Da der Winkel GFB das Doppelte des Winkels FAB ist und da der Winkel FAB ist gleich dem Winkel ABF, ist der Winkel BFN gleich dem Winkel FAB.



Die beiden Dreiecke ABF, BFN haben den selben Winkel ABF, also ist der Winkel AFB gleich dem Winkel BNF [wie I.32.] und die Dreiecke ABF, BFN sind gleichwinklig. Damit verhält sich AB zu BF wie FB zu BN, womit das Rechteck aus AB mit BN gleich dem Quadrat über BF ist [wie VI.17.].

Es ist AL gleich LK, es ist LN Senkrechte, somit ist KN gleich AN und der Winkel LKN gleich dem Winkel LAN. Der Winkel LAN ist im Dreieck AKB gleich dem Winkel KBN. Damit ist der Winkel LKN gleich dem Winkel KBN.

Den Dreiecken AKB, AKN ist der Winkel am Punkt A gemeinsam, womit der Winkel AKB gleich dem Winkel KNA ist und die Dreiecke KBA, KNA gleichwinklig sind. Es verhält sich damit BA zu AK wie KA zu AN und ist das Rechteck aus BA mit AN gleich dem Quadrat über AK. Wie gezeigt, ist das Rechteck aus AB mit BN gleich dem Quadrat über BF. Also ist das Rechteck aus AB mit BN zusammen mit dem Rechteck aus BA mit AN gleich dem Quadrat über BF zusammen mit dem Quadrat über AK, die damit dem Quadrat über BA gleich sind. Dabei ist BA die Seite des Fünfecks, BF des Sechsecks und AK des Zehnecks.

Deshalb ist das Quadrat über der Seite eines, einem Kreis einbeschriebenen, gleichseitigen Fünfecks gleich den Quadraten über den Seiten eines gleichseitigen Sechsecks und eines gleichseitigen Zehnecks zusammen, die demselben Kreis einbeschrieben sind, was zu zeigen war.

Anmerkung:

Bei Radius AF = r ist das Quadrat über der Seite des Sechsecks $s_6^2 = r^2$

und ist [wie XIII.9.] das Quadrat über der Seite des Zehnecks $s_{10}^2 = r^2 \cdot (3 - 5^{1/2}) / 2 = ((5^{1/2} - 1) / 2)^2$,

damit ist das Quadrat über der Seite des Fünfecks $s_5^2 = s_6^2 + s_{10}^2 = r^2 \cdot (5 - 5^{1/2}) / 2$.

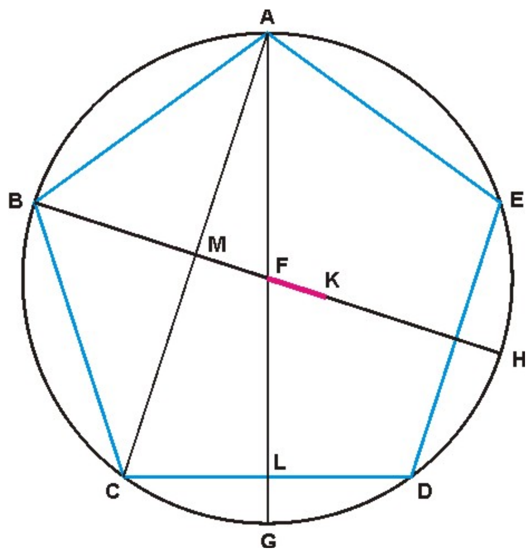
XIII.11.

Die Seite eines gleichseitigen Fünfecks, das einem Kreis mit rationalem oder quadriert rationalem Durchmesser einbeschrieben ist, ist konjugiert apotomisch.

Wenn in den Kreis ABCDE, dessen Durchmesser eine rationale oder quadriert rationale Größe hat, das gleichseitige Fünfeck ABCDE einbeschrieben ist, dann ist, sage ich, die Seite des Fünfecks konjugiert apotomisch [wie X.76.].

Es sind vom Mittelpunkt F des Kreises die Radien AF, FB einzutragen und bis G, H zu verlängern, es ist AC zu ziehen und die Strecke FK, die einem Viertel des Radius AF gleich ist, einzutragen.

Da AF rational ist, ist FK rational. Da BF rational ist, ist die zusammengesetzte BK rational.



Der Kreisbogen ACG ist gleich dem Kreisbogen ADG und der Kreisbogen ABC gleich dem Kreisbogen AED, somit ist der Kreisbogen CG gleich dem Kreisbogen GD.

Die von AL im Punkt L mit CD gebildeten Winkel sind rechte Winkel, da CD das Doppelte von CL ist. Aus dem gleichem Grund sind die Winkel im Punkt M rechte Winkel, wobei AC das Doppelte von CM ist.

Da der Winkel ALC gleich dem Winkel AMF ist und die Dreiecke ACL, AMF den selben Winkel LAC haben, ist der Winkel ACL gleich dem Winkel MFA [wie I.32.] und sind damit die Dreiecke ACL, AMF gleichwinklig. Damit verhält sich LC zu CA wie MF zu FA und verhält sich, die Vorderglieder verdoppelt, das Doppelte von LC zu CA wie das Doppelte von MF zu FA.

Da sich das Doppelte von MF zu FA verhält wie MF zur Hälfte von FA, verhält sich das Doppelte von LC zu CA wie MF zur Hälfte von FA und verhält sich, die Hinterglieder halbiert, das Doppelte von LC zur Hälfte von CA wie MF zum Viertel von FA.

Das Doppelte von LC ist gleich DC, die Hälfte von CA ist gleich CM und ein Viertel von FA ist gleich FK, also verhält sich DC zu CM wie MF zu FK.

In vergrößerten Verhältnissen [wie V.18.] verhält sich damit DC, CM zusammen zu CM wie MK zu KF und verhält sich das Quadrat über DC, CM zusammen zum Quadrat über CM wie das Quadrat über MK zum Quadrat über KF.

Die Sehne AC, die unter einem Winkel des gleichseitigen Fünfecks gezogen ist, wird von einer ebensolchen Sehne in stetiger Teilung geteilt, wobei der größere Teil gleich einer Seite des Fünfecks und damit gleich CD ist [wie XIII.8.]. Es ist CM die Hälfte von AC und es ist damit das Quadrat über DC, CM zusammen gleich dem fünffachen Quadrat über CM [wie XIII.1.].

Wie gezeigt, verhält sich das Quadrat über DC, CM zusammen zum Quadrat über CM wie das Quadrat über MK zum Quadrat über KF. Somit ist das Quadrat über MK gleich dem fünffachen Quadrat über KF.

Das Quadrat über KF ist rational, da der Durchmesser rational ist, und damit ist das Quadrat über MK rational.

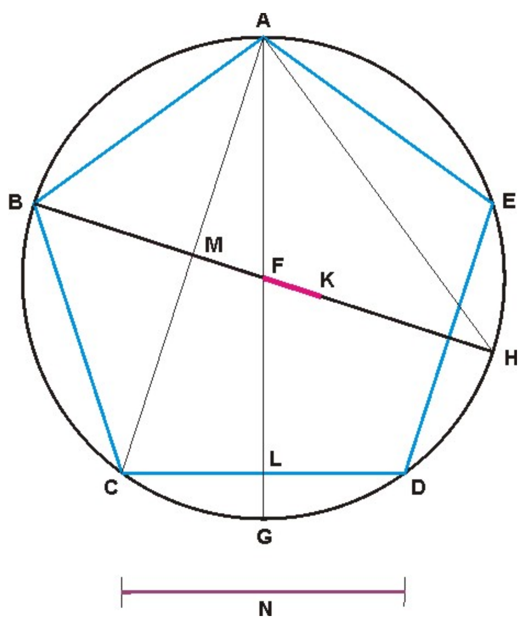
Es ist BF gleich dem vierfachen FK, also BK gleich dem fünffachen KF, damit ist das Quadrat über BK gleich dem fünfundzwanzigfachen Quadrat über KF. Das Quadrat über MK ist gleich dem fünffachen Quadrat über KF, denn das Quadrat über BK ist gleich dem fünffachen Quadrat über KF.

Die Quadrate über BK und über KM stehen deshalb nicht in einem Verhältnis wie Quadratzahlen, womit BK, KM der Länge nach inkommensurabel sind [wie X.9.]. Da BK rational ist, sind somit BK, KM nur im Quadrat kommensurabel.

Wird von einer rationalen oder quadriert rationalen Strecke eine Strecke weggenommen, die zu ihr nur im Quadrat kommensurabel ist, dann ist die restliche Strecke irrational und wird apotomisch genannt [wie X.73.]. Also ist BM eine apotomische Strecke, die von MK zur BK ergänzt wird.

Es ist, sage ich, MB eine quadriert apotomische Strecke vierter Art [wie Unterteilung 4., vor X.85.].

Es sei nun das Quadrat über KM zusammen mit dem Quadrat über einem N gleich dem Quadrat über BK.



Da KF zu FB kommensurabel ist, ist auch die zusammengesetzte KB zu FB kommensurabel. Da BF zu BH kommensurabel ist, ist auch BK zu BH kommensurabel.

Das Quadrat über BK ist das Fünffache des Quadrates über KM. Somit verhält sich das Quadrat über BK zum Quadrat über KM wie Fünf zu Eins.

Es verhält sich dann das Quadrat über BK zum Quadrat über N wie Fünf zu Vier und verhält sich damit nicht wie eine Quadratzahl zu einer anderen Quadratzahl. Damit ist BK zu N inkommensurabel [wie X.9.].

Das Quadrat über BK ist also um ein Quadrat über einer zu BK inkommensurablen Strecke größer als das Quadrat über KM. Da BK zur ganzen BH kommensurabel ist, ist somit MB eine quadriert apotomische Strecke vierter Art.

Wenn das von einer rationalen Strecke und einer quadriert apotomischen Strecke vierter Art eingeschlossene Rechteck irrational ist, dann ist die Strecke, deren Quadrat dem Rechteck gleich ist, konjugiert apotomisch [wie X.94.].

Es ist das Quadrat über AB gleich dem Rechteck aus HB mit BM, denn da, wenn AH eingetragen wird, die Dreiecke ABH, ABM gleichwinklig sind, verhält sich HB zu BA wie AB zu BM [wie VI.17.].

Deshalb ist AB, die Seite des Fünfecks, konjugiert apotomisch, was zu zeigen war.

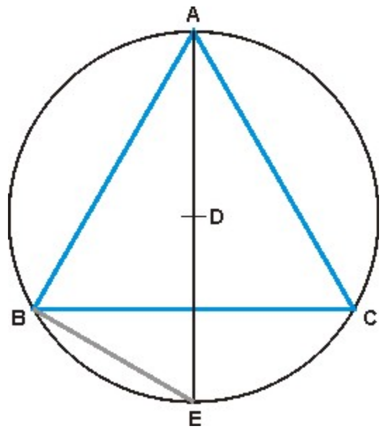
Anmerkung:

Mit Radius r ist die Seite des Fünfecks $r \cdot ((5 + 2 \cdot 5^{½})^{½} - (5 - 2 \cdot 5^{½})^{½}) / 2 = r \cdot (10 - 2 \cdot 5^{½})^{½} / 2$.

XIII.12.

Das Quadrat über der Seite eines gleichseitigen Dreiecks, das einem Kreis einbeschrieben ist, ist gleich dem dreifachen Quadrat über dem Radius.

Wenn dem Kreis ABC das gleichseitige Dreieck ABC einbeschrieben ist, dann ist, sage ich, das Quadrat über der Seite des Dreiecks ABC gleich dem dreifachen Quadrat über dem Radius des Kreises ABC.



Es ist vom Mittelpunkt D des Kreises ABC der Radius AD zu ziehen und bis E zu verlängern und es ist BE einzutragen.

Da das Dreieck ABC gleichwinklig ist, ist der Kreisbogen BEC ein Drittel vom Umfang des Kreises ABC.
Der Kreisbogen BE ist somit ein Sechstel vom Kreisumfang, womit BE die Seite eines einbeschriebenen Sechsecks ist. Also ist BE gleich DE [wie IV.15. Zusatz].

Da AE gleich dem doppelten DE ist, ist das Quadrat über AE gleich dem vierfachen Quadrat über DE und dem vierfachen Quadrat über BE. Das Quadrat über AE ist gleich dem Quadrat über AB und dem Quadrat über BE zusammen.

Damit sind die Quadrate über AB, BE zusammen gleich dem vierfachen Quadrat über BE. Beidem dasselbe weggenommen ist das Quadrat über AB gleich dem dreifachen Quadrat über BE.

Es ist BE gleich DE, also ist das Quadrat über AB gleich dem dreifachen Quadrat über DE.

Deshalb ist das Quadrat über der Seite des Dreiecks gleich dem dreifachen Quadrat über dem Radius, was zu zeigen war.

Anmerkung:

Mit Seitenlänge $AB = s$ des gleichseitigen Dreiecks und
Radius $DE = r$ des umschriebenen Kreises ist

$s^2 = 3 \cdot r^2$ und $s = r \cdot 3^{1/2}$.

XIII.13.

Ein Tetraeder einer Kugel mit gegebenem Durchmesser einbeschreiben. Das Quadrat über dem Durchmesser der Kugel ist dann gleich dem einundeinhalbfachen Quadrat über der Kante des Tetraeders.

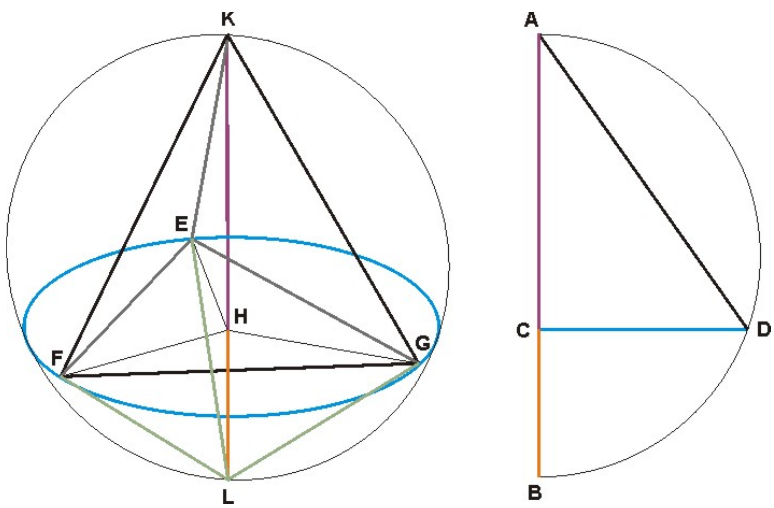
Es ist der gegebene Durchmesser AB der Kugel im Punkt C so zu teilen, dass AC gleich der doppelten CB ist, es ist über AB der Halbkreis ADB zu schlagen, es ist auf AB in C die Senkrechte CD zu errichten und es ist DA zu ziehen.

Es ist um einen Punkt H mit Radius DC der Kreis EFG zu schlagen und diesem das gleichseitige Dreieck EFG einzubeschreiben [wie IV.2.].

Es sind EH, HF, HG zu ziehen und es ist mit rechtem Winkel zu ihnen in H auf der Ebene des Kreises EFG die Strecke HK gleich AC zu errichten [wie XI.4.]. Es sind dann KE, KF, KG zu ziehen.

Auf der Ebene des Kreises EFG steht dann KH senkrecht und bildet mit allen schneidenden Geraden der Ebene rechte Winkel.

Somit ist HK senkrecht zu jeder der Strecken HE, HF, HG.
Da HK gleich AC und da HE gleich CD ist und diese einen rechten Winkel einschließen, ist KE gleich DA.



Aus den gleichen Gründen sind KF, KG gleich DA. Damit sind KE, KF, KG gleich.

Da AC gleich dem doppelten CB ist, ist AB gleich dem dreifachen BC.

Es verhält sich AB zu BC wie das Quadrat über AD zum Quadrat über DC, wie im Korollar gezeigt wird, womit das Quadrat über AD gleich dem dreifachen Quadrat über DC ist.

Das Quadrat über FE ist gleich dem dreifachen Quadrat über EH [wie XIII.12.], wobei DC gleich EH ist, also ist DA gleich EF.

Wie gezeigt, sind DA, KE, KF, KG gleich, womit jede der EF, FG, GE jeder der KE, KF, KH gleich ist. Somit sind die Dreiecke EFG, KEF, KFG, KEG gleichseitig.

Damit ist ein Tetraeder [wie XI. Erklärung 26.] errichtet, dessen Grundfläche das Dreieck EFG und deren Spitze der Punkt K ist.

Es ist nun zu zeigen, dass dieses Tetraeder der gegebenen Kugel einbeschrieben und das Quadrat über dem Durchmesser der Kugel gleich dem einundeinhalbfachen Quadrat über der Kante des Tetraeders ist.

Es ist KH in ihrer Richtung um HL, die gleich CB ist, zu verlängern.

Da sich AC zu CD wie CD zu CB verhält [wie VI.8. Zusatz] und da AC gleich KH, da CD gleich HE und da CB gleich HL ist, verhält sich KH zu HE wie EH zu HL und es ist das Rechteck aus KH mit HL gleich dem Quadrat über EH [wie VI.17.].

Wird EL eingetragen, dann ist der Winkel LEK ein rechter Winkel, denn KHE, EHL sind rechte Winkel und die Dreiecke ELH, EKH sind gleichwinklig [wie VI.6.]. Damit liegt der Punkt E auf dem Halbkreis über KL.

Werden FL, LG gezogen, dann sind aus den gleichen Gründen die Winkel, die KL gegenüberliegen, an den Punkten F, G rechte Winkel.

Der bis zur Ausgangslage gedrehte Halbkreis über KL geht bei festgehaltener KL deshalb durch die Punkte F, G und erzeugt eine Kugel [wie XI. Erklärung 14.], auf der die Eckpunkte des Tetraeders liegen und deren Durchmesser KL gleich AB ist, denn KH ist gleich AC und HL gleich CB.

Das Quadrat über dem Durchmesser der Kugel, sage ich nun, ist gleich dem einundeinhalbfachen Quadrat über der Kante des Tetraeders.

Denn da AC gleich dem doppelten CB und AB gleich dem dreifachen BC ist, ist BA gleich der einundeinhalbfachen AC. Es verhält sich BA zu AC wie das Quadrat über BA zum Quadrat über AD, also ist das Quadrat über BA gleich dem einundeinhalbfachen Quadrat über AD; dabei ist BA der Durchmesser der Kugel und AD die Kante des Tetraeders.

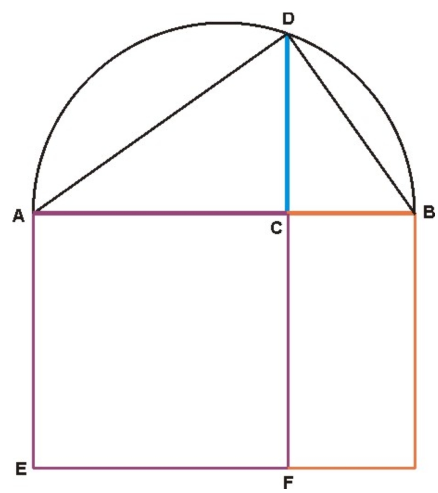
Deshalb ist das Quadrat über dem Durchmesser der Kugel gleich dem einundeinhalbfachen Quadrat über der Kante des Tetraeders, was zu zeigen war.

Anmerkung:

Mit dem Kugeldurchmesser d und der Kante des Tetraeders k_4 ist $d^2 = k_4^2 \cdot 3 / 2$ und $k_4 = d \cdot (2 / 3)^{½}$.

Lemma XIII.13:

Es ist zu zeigen, dass sich AB zu BC verhält wie das Quadrat über AD zum Quadrat über DC.



Es ist in der obigen Figur des Halbkreises DB zu ziehen, es ist über AC das Quadrat EC zu errichten und das Parallelogramm FB zu ergänzen.

Da sich BA zu AD verhält wie DA zu AC, denn die Dreiecke DAB, DAC sind gleichwinklig, ist das Rechteck aus BA mit AC gleich dem Quadrat über AD [wie VI.17.].

Es verhält sich AB zu BC wie EB zu BF, wobei EB das Rechteck aus BA mit AC und BF das Rechteck aus AC mit CB ist, denn CF ist gleich AC.
Damit verhält sich AB zu BC wie das Rechteck aus BA mit AC zum Rechteck aus AC mit CB.

Das Rechteck aus BA mit AC ist gleich dem Quadrat über AD und das Rechteck aus AC mit CB ist gleich dem Quadrat über DC, denn die Senkrechte DC ist das mittlere Glied in fortlaufend gleicher Proportion mit AC, CB [wie VI.8. Zusatz], da ADB ein rechter Winkel ist.

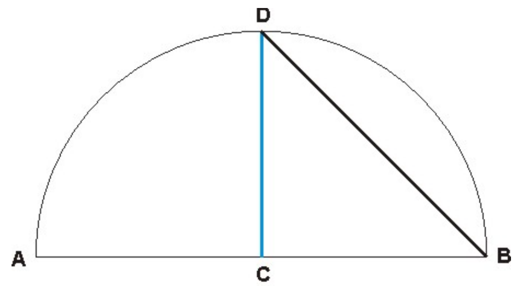
Deshalb verhält sich AB zu BC wie das Quadrat über AD zum Quadrat über DC, was zu zeigen war.

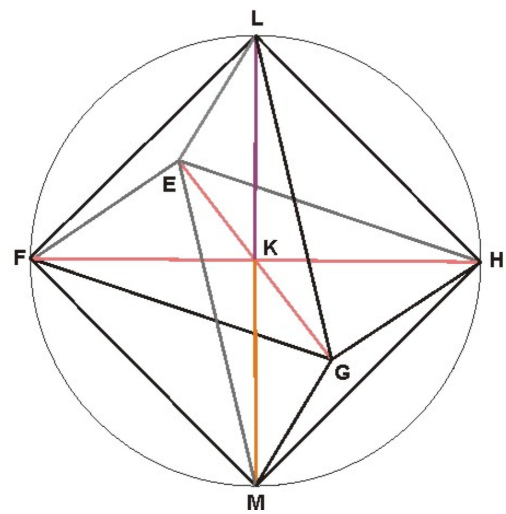
XIII.14.

Ein Oktaeder einer Kugel mit gegebenem Durchmesser einbeschreiben.
Das Quadrat über dem Durchmesser der Kugel ist dann gleich dem doppelten Quadrat über der Kante des Oktaeders.

Es ist der gegebene Durchmesser AB der Kugel in C in zwei gleiche Teile zu teilen, es ist über AB der Halbkreis ADB zu schlagen, in C die Senkrechte CD auf AB zu errichten und DB zu ziehen.

Es ist ein Quadrat EFGH, dessen Seite gleich DB ist, zu errichten und es sind HF, EG zu ziehen, die sich in K schneiden. Im Punkt K ist senkrecht zur Ebene, in der EFGH liegt, KL zu errichten, es sind EK, FK, GK, HK zu ziehen, es ist KL auf der andern Seite der Ebene um KM zu verlängern, wobei KL, KM der EK gleich sind. Es sind LE, LF, LG, LH, ME, MF, MG, MH zu ziehen.





Da KE gleich KH und der Winkel EKH ein rechter Winkel ist, ist das Quadrat über HE gleich dem doppelten Quadrat über EK.
Da LK gleich KE und der Winkel LKE ein rechter Winkel ist, ist das Quadrat über EL gleich dem doppelten Quadrat über EK.
Damit ist das Quadrat über LE gleich dem Quadrat über EH und es ist LE gleich EH.

Aus den gleichen Gründen ist LH gleich HE.
Damit ist das Dreieck LEH gleichseitig.

Auf gleiche Weise ist zu zeigen, dass auch die übrigen Dreiecke, deren Grundseiten die Seiten des Quadrats EFGH und deren Spitzen die Punkte L, M sind, gleichseitig sind.

Also ist dieses Oktaeder aus acht gleichseitigen Dreiecken errichtet [wie. XI. Erklärung 27.]

Es ist nun zu zeigen, dass dieses Oktaeder der Kugel einbeschrieben und das Quadrat über dem Durchmesser der Kugel gleich dem doppelten Quadrat über der Kante des Oktaeders ist.

Da LK, KM, KE gleich sind, liegt der Punkt E auf dem Halbkreis über LM.
Der bis zur Ausgangslage gedrehte Halbkreis über LM geht bei festgehaltener LM deshalb durch die Punkte F, G, H und erzeugt eine Kugel [wie XI. Erklärung 14.], auf der die Eckpunkte des Oktaeders liegen.

Da LK, KM gleich sind und mit KE rechte Winkel bilden, ist LE gleich EM. Der Winkel LEM ist ein rechter Winkel. Damit ist das Quadrat über LM gleich dem doppelten Quadrat über LE.

Da AC gleich CB ist, ist AB gleich dem doppelten BC.
Es verhält sich AB zu BC wie das Quadrat über AB zum Quadrat über BD, weshalb das Quadrat über AB gleich dem doppelten Quadrat über BD ist.

Da, wie gezeigt, das Quadrat über LM gleich dem doppelten Quadrat über LE ist, ist somit das Quadrat über DB gleich dem Quadrat über LE.

Es ist EH gleich DB. Also ist das Quadrat über AB gleich dem Quadrat über LM und ist AB gleich LM. Dabei ist AB der gegebene Durchmesser, der damit dem Durchmesser LM der Kugel gleich ist.

Deshalb ist dieses Oktaeder der gegebenen Kugel einbeschrieben und ist das Quadrat über dem Durchmesser der Kugel gleich dem doppelten Quadrat über der Kante des Oktaeders, was zu zeigen war.

Anmerkung: mit Kugeldurchmesser d ist $d^2 = 2 \cdot k_8^2$ und die Kante des Oktaeders $k_8 = d / 2^{1/2}$.

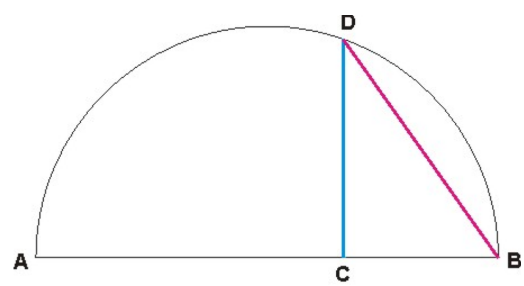
XIII.15.

Einen Würfel einer Kugel mit gegebenem Durchmesser einbeschreiben.
Das Quadrat über dem Durchmesser der Kugel ist dann gleich dem dreifachen Quadrat über der Kante des Würfels.

Es ist der gegebene Durchmesser AB der Kugel im Punkt C so zu teilen, dass AC gleich der doppelten CB ist, es ist über AB der Halbkreis ADB zu schlagen, es ist auf AB in C die Senkrechte CD zu errichten und es ist DB zu ziehen.

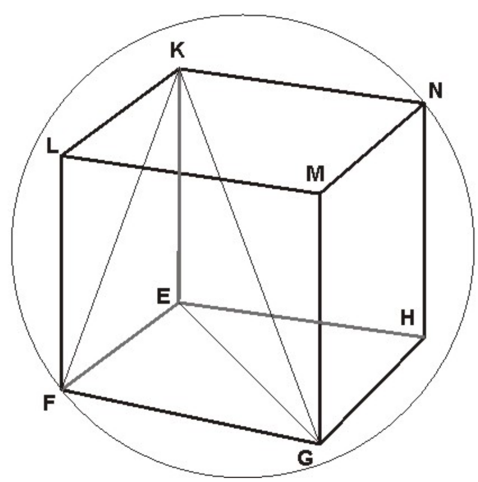
Es ist das Quadrat EFGH, dessen Seite gleich DB ist, anzulegen, in den Punkten E, F, G, H sind mit rechten Winkeln auf der Ebene, in der das Quadrat EFGH liegt, EK, FL, GM, HN, die jedem der EF, FG, GH, HE gleich sind, zu errichten und sind KL, LM, MN, NK zu ziehen.

Damit ist ein Würfel aus sechs gleichen Quadraten errichtet [wie XI. Erklärung 25.].



Es ist nun zu zeigen, dass er einer Kugel einbeschrieben und das Quadrat über dem Durchmesser der Kugel gleich dem dreifachen Quadrat über der Kante des Würfels ist.

Es sind KG, EG zu ziehen.
Da der Winkel KEG ein rechter Winkel ist und da KE senkrecht zu EF auf der Ebene mit EG steht, geht der Halbkreis über KG durch den Punkt E. Da GF sowohl zu FL wie zu FE und zur Ebene, in der FK liegt, senkrecht ist, ist die zu ziehende FK senkrecht zu GF und es geht der Halbkreis über GK durch F. Ebenso geht der Halbkreis durch die übrigen Punkte des Würfels.



Der bei festgehaltener KG bis zur Ausgangslage gedrehte Halbkreis über KG erzeugt deshalb eine Kugel, auf der alle Punkte des Würfels liegen.

Es ist zu zeigen, dass dies die gegebene Kugel ist.
Da GF gleich FE und der Winkel an F ein rechter Winkel ist, ist das Quadrat über EG gleich dem doppelten Quadrat über EF. Da EF gleich EK ist, ist das Quadrat über EG gleich dem doppelten Quadrat über EK. Damit sind die Quadrate über GE und EK zusammen gleich dem dreifachen Quadrat über EK und gleich dem Quadrat über GK.

Es ist AB gleich dem dreifachen BC und es verhält sich AB zu BC wie das Quadrat über AB zum Quadrat über BD, also ist das Quadrat über AB gleich dem dreifachen Quadrat über BD.

Wie gezeigt, ist das Quadrat über GK gleich dem dreifachen Quadrat über BD, wobei KE gleich BD und somit KG gleich AB ist. Es ist AB der gegebene Durchmesser, der damit dem Durchmesser der Kugel gleich ist.

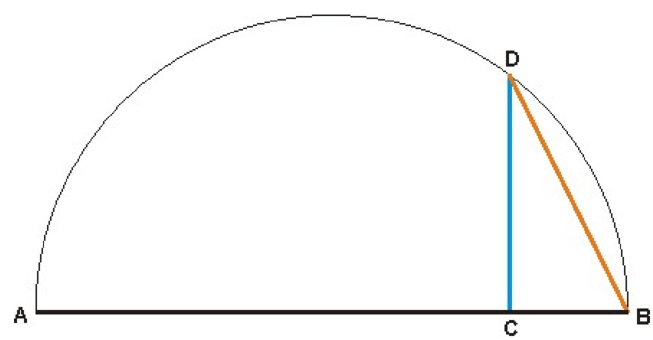
Damit wurde einer gegebenen Kugel ein Würfel einbeschrieben, wobei das Quadrat über dem Durchmesser der Kugel gleich dem dreifachen Quadrat über der Kante des Würfels ist, was zu zeigen war.

XIII.16.

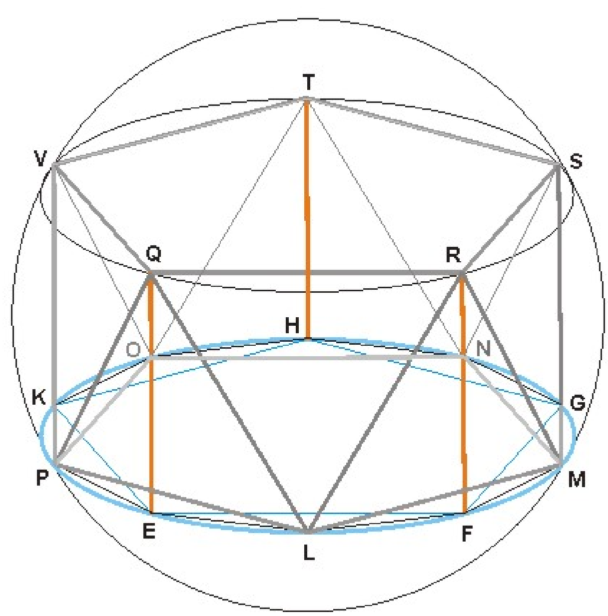
Ein Ikosaeder einer Kugel mit gegebenem rationalem oder quadriert rationalem Durchmesser einbeschreiben.
Die Kante des Ikosaeders ist dann irrational und zwar konjugiert apotomisch.

Es ist der gegebene rationale oder quadriert rationale Durchmesser AB der Kugel in C so zu teilen, dass AC gleich dem vierfachen CB ist, es ist über AB der Halbkreis ADB zu schlagen, es ist auf AB in C die Senkrechte CD zu errichten und es ist DB zu ziehen.

Es ist der Kreis EFGHK mit dem Radius DB zu ziehen und in ihn das gleichseitige Fünfeck EFGHK einzubeschreiben, es sind die Kreisbögen EF, FG, GH, HK, KE in den Punkten L, M, N; O, P in zwei zwei gleiche Teile zu teilen und es sind LM, MN, NO, OP, PL, EP zu ziehen. Da LMNOP ein gleichseitiges Fünfeck ist, ist EP die Seite eines Zehnecks.



Es sind in den Punkten E, F, G, H, K senkrecht zur Ebene, in der der Kreis EFGHK liegt, EQ, FR, GS, HT, KV, die dem Radius DB des Kreises gleich sind, zu errichten und es sind QR, RS, ST, TV, VQ, QL, LR, RM, MS, SN, NT, TO, OV, VP, PQ einzutragen.



Da EQ, KV senkrecht auf der selben Ebene des Kreises stehen, ist EQ parallel zu KV und, da EQ der KV gleich ist, sind auch die ihre Endpunkte verbindenden Strecken gleich und parallel, womit QV, EK gleich und parallel sind [wie I.33.]. Da EK die Seite eines gleichseitigen Fünfecks ist, ist auch QV die Seite eines gleichseitigen Fünfecks, das dem Kreis EFGHK einzubeschreiben ist.

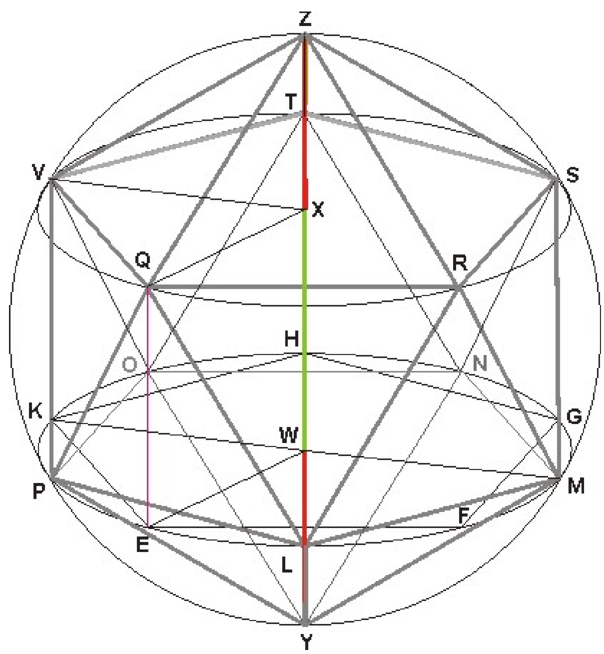
Aus den gleichen Gründen sind QR, RS, ST, TV Seiten eines gleichseitigen Fünfecks, das dem Kreis EFGHK einzubeschreiben ist. Damit ist das Fünfeck QRSTV gleichseitig.

Es ist QE die Seite eines Sechsecks und EP die Seite eines Zehnecks, denn der Winkel QEP ist ein rechter Winkel, QP ist die Seite eines Fünfecks und das Quadrat über der Seite eines in einen Kreis einbeschriebenen gleichseitigen Fünfecks ist gleich den Quadraten über den Seiten des diesem Kreis einbeschriebenen gleichseitigen Sechsecks und des ihm einbeschriebenen gleichseitigen Zehnecks zusammen [wie XIII.10.].

Aus den gleichen Gründen ist PV die Seite eines Fünfecks und da auch QV die Seite eines Fünfecks ist, ist das Dreieck QPV gleichseitig. Aus diesen gleichen Gründen sind die Dreiecke QLR, RMS, SNT, TOV gleichseitig.

Da, wie gezeigt, QL, QP Seiten eines Fünfecks sind und auch LP die Seite eines Fünfecks ist, ist das Dreieck PLQ gleichseitig. Aus den gleichen Gründen sind auch die Dreiecke LRM, MSN, NTO, OVP gleichseitig.

Es ist im Mittelpunkt W des Kreises EFGHK senkrecht zur Fläche, in der der Kreis liegt, WX zu errichten, sie um XZ und sie auf der anderen Seite der Fläche um WY zu verlängern, wobei WX gleich der Seite eines einbeschriebenen Sechsecks und WY, XZ der Seite eines einbeschriebenen Zehnecks gleich sind.



Es sind dann QZ, QX, VZ, EW, LW, LY, YM zu ziehen.

Da WX, QE auf der Ebene des Kreises senkrecht stehen, sind WX, QE parallel, und da sie gleich sind, sind auch EW, QX gleich und parallel. Es ist EW gleich der Seite eines einbeschriebenen Sechsecks, denn es ist QX die Seite eines solchen Sechsecks, weil XZ die Seite eines Zehnecks, der Winkel QXZ ein rechter Winkel und QZ die Seite eines Fünfecks ist [wie XIII.10.].

Aus den gleichen Gründen ist VZ die Seite eines Fünfecks, denn wenn WK, XV gezogen werden, die gleich sind und an gleichen Strecken gegenüber liegen, dann ist WK eine dem Radius gleiche Seite eines eingeschriebenen Sechsecks, womit auch XV die Seite eines solchen Sechsecks ist. XZ ist die Seite eines eingeschriebenen Zehnecks, der Winkel VXZ ist ein rechter Winkel und QV ist die Seite eines Fünfecks, also ist das Dreieck QVZ gleichseitig.

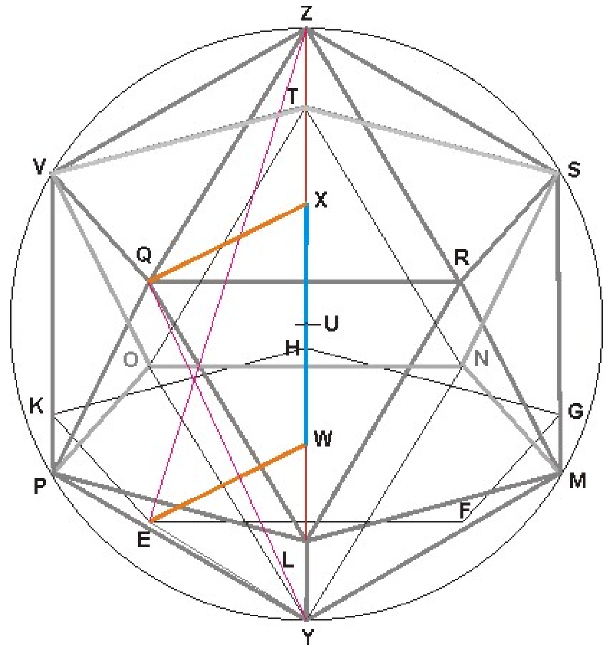
Aus den gleichen Gründen ist jedes der Dreiecke gleichseitig, deren Grundseiten QR, RS, ST, TV sind und deren Spitzen der Punkt Z ist.

Da WL die Seite eines eingeschriebenen Sechsecks ist, WY die Seite eines Zehnecks und da der Winkel LWY ein rechter Winkel ist, ist LY die Seite eines Fünfecks. Aus den gleichen Gründen ist MY, da MW die Seite eines Sechsecks ist, die Seite eines Fünfecks. LM ist die Seite eines Fünfecks, womit das Dreieck LMY gleichseitig ist. Aus den gleichen Gründen ist jedes der Dreiecke gleichseitig, deren Grundseiten MN, NO, OP, PL sind und deren Spitzen der Punkt Y ist. Damit ist ein Ikosaeder aus zwanzig gleichen Dreiecken errichtet [wie XI. Erklärung 28.].

Es ist nun zu zeigen, dass das Ikosaeder der gegebenen Kugel einbeschrieben und seine Kante irrational und zwar konjugiert apotomisch ist.

Denn da WX die Seite eines eingeschriebenen Sechsecks, da XZ die Seite eines Zehnecks und da die Strecke WZ in X in stetiger Teilung geteilt ist [wie XIII.9.], wobei WX der größere Teil ist, verhält sich ZW zu WX wie WX zu XZ.

Da WX gleich WE und da XZ gleich WY ist, verhält sich ZW zu WE wie EW zu WY.



Die Winkel ZWE, EWY sind rechte Winkel, also ist mit eingetragener EZ der Winkel YEZ ein rechter Winkel, denn die Dreiecke YEZ, WEZ sind gleichwinklig [wie VI.8.].

Aus den gleichen Gründen, da sich ZW zu WX verhält wie WX zu XZ, da ZW gleich YX und da WX gleich XQ ist, verhält sich YX zu XQ wie QX zu XZ.

Da mit eingetragener QY der Winkel an Q ein rechter Winkel ist, geht der Halbkreis über YZ durch den Punkt Q.

Der bei festgehaltener YZ bis zur Ausgangslage gedrehte Halbkreis über YZ durch Q erzeugt deshalb eine Kugel, auf der alle übrigen Punkte des Ikosaeders liegen.

Ich sage nun, dass dieses Ikosaeder in der gegebenen Kugel eingeschrieben ist.

Denn wenn WX in U in zwei gleiche Teile geteilt ist, dann, da WZ in X in stetiger Teilung geteilt ist, wobei ZX der kleinere Teil ist, ist das Quadrat über UZ gleich dem fünffachen Quadrat über UX [wie XIII.3.].

Da ZY gleich dem doppelten ZU und da WX gleich dem doppelten UX ist, ist das Quadrat über ZY gleich dem fünffachen Quadrat über XW.
Da AC gleich der vierfachen CB ist, ist AB gleich der fünffachen BC. Es verhält sich AB zu BC wie das Quadrat über AB zum Quadrat über BD. Damit ist das Quadrat über AB gleich dem fünffachen Quadrat über BD.

Wie gezeigt, ist das Quadrat über ZY gleich dem fünffachen Quadrat über WX und ist DB gleich WX, das dem Radius des Kreises EFGHK gleich ist. Somit ist AB gleich YZ. Dabei ist AB der Durchmesser der gegebenen Kugel und ist YZ der Durchmesser der Kugel, der das Ikosaeder einbeschrieben ist.

Ich sage nun, die Kante des Ikosaeders ist irrational und zwar konjugiert apotomisch.
Denn da der Durchmesser der Kugel rational oder quadriert rational und das Quadrat über dem Durchmesser gleich dem fünffachen Quadrat über dem Radius des Kreises EFGHK ist, ist der Radius und der Durchmesser des Kreises EFGHK quadriert rational.

Da die Seite eines gleichseitigen Fünfecks, das einem Kreis mit rationalem oder quadriert rationalem Durchmesser einbeschrieben ist, konjugiert apotomisch ist [wie XIII.11.], ist deshalb die Kante des Ikosaeders konjugiert apotomisch.

Zusatz XIII.16:

Offensichtlich ist das Quadrat über dem Durchmesser der Kugel gleich dem fünffachen Quadrat über dem Radius des Kreises, über dem das Ikosaeder errichtet ist, und ist der Durchmesser der Kugel gleich der Seite des Sechsecks und der doppelten Seite des Zehnecks, die jenem Kreis einbeschrieben sind, zusammen.

Anmerkung:

Das Quadrat über dem Radius r des Kreises dem ein Fünfeck mit der Seitenlänge a, der Kante des Ikosaeders $a = k_{20}$, einbeschrieben ist, $r^2 = k_{20}{}^2 \cdot (5 + 5^{½}) / 10$

und das Quadrat über dem Durchmesser D der Kugel ist $5 \cdot r^2 = k_{20}{}^2 \cdot (5 + 5^{½}) / 2 = D^2$.

Da $k_{20}{}^2 = 10 \cdot r^2 / (5 + 5^{½}) = r^2 \cdot (10 - 2 \cdot 5^{½}) / 4$ ist

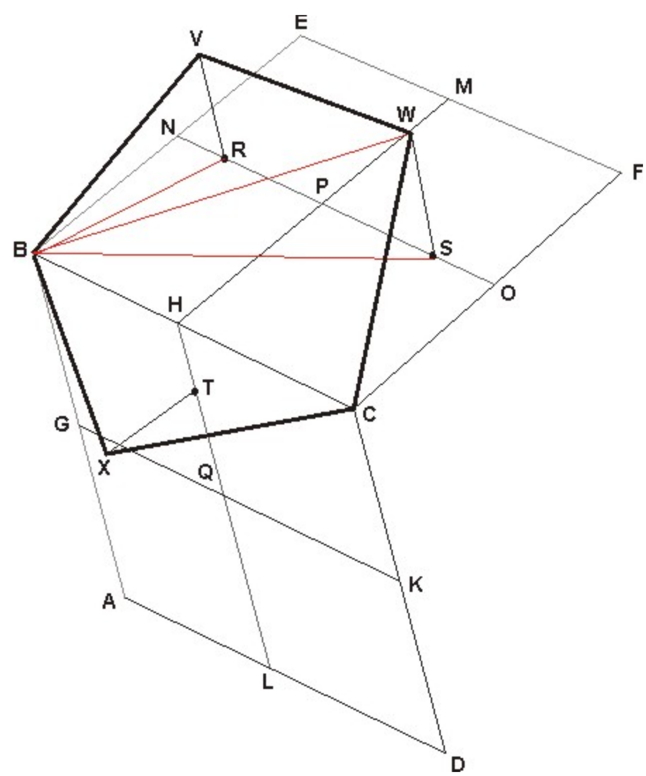
$k_{20} = r \cdot (10 - 2 \cdot 5^{½})^{½} / 2 = r \cdot ((5 + 2 \cdot 5^{½})^{½} - (5 - 2 \cdot 5^{½})^{½}) / 2$ konjugiert apotomisch.

XIII.17.

Ein Dodekaeder einer Kugel mit gegebenem rationalem oder quadriert rationalem Durchmesser einbeschreiben.
Die Kante des Dodekaeders ist dann irrational und zwar apotomisch.

Es sind an zwei senkrecht aufeinander stehenden Seiten eines Würfels, der einer Kugel mit gegebenem Durchmesser einbeschrieben ist [wie XIII.15.], die Kanten AB, BC, CD, DA, EF, EB, FC in den Punkten G, H, K, L M, N, O in zwei gleiche Teile zu teilen und GK, HL, MH, NO, zu ziehen, die sich in Q, P schneiden.

Es sind NP, PO, HQ in stetiger Teilung in den Punkten R, S, T so zu teilen, dass RP, PS, TQ die größeren Teile sind. In den Punkten R, S, T sind senkrecht auf den äußeren Seiten des Würfels RV, SW, TX zu errichten, wobei RV gleich RP, wobei SW gleich PS und wobei TX gleich TQ ist. Es sind dann VB, BX, XC, CW, WV zu ziehen.



Das Fünfeck VBXCW, sage ich, ist gleichseitig, liegt vollständig in einer Ebene und ist gleichwinklig.

Es sind RB, SB, WB zu ziehen.
Da NP in R in stetiger Teilung geteilt ist, wobei RP der größere Teil ist, ist das Quadrat über PN zusammen mit dem Quadrat über NR gleich dem dreifachen Quadrat über RP [wie XIII.4.].

Es ist PN gleich NB und es ist PR gleich RV, also ist das Quadrat über BN zusammen mit dem Quadrat über NR gleich dem dreifachen Quadrat über RV.

Das Quadrat über BR ist gleich dem Quadrat über BN zusammen mit dem Quadrat über NR, somit ist das Quadrat über BR gleich dem dreifachen Quadrat über RV und es ist das Quadrat über BR zusammen mit dem Quadrat über RV gleich dem vierfachen Quadrat über RV.

Das Quadrat über BV ist gleich dem Quadrat über BR zusammen mit dem Quadrat über RV, also ist das Quadrat über BV gleich dem vierfachen Quadrat über RV und ist BV gleich dem doppelten RV. Da WV gleich dem doppelten VR ist, denn SR ist gleich dem doppelten PR und gleich dem doppelten RV, ist BV gleich VW. Auf gleiche Weise ist zu zeigen, dass jede der BX, XC, CW jeder der BV, VW gleich sind. Deshalb ist das Fünfeck VBXCW gleichseitig.

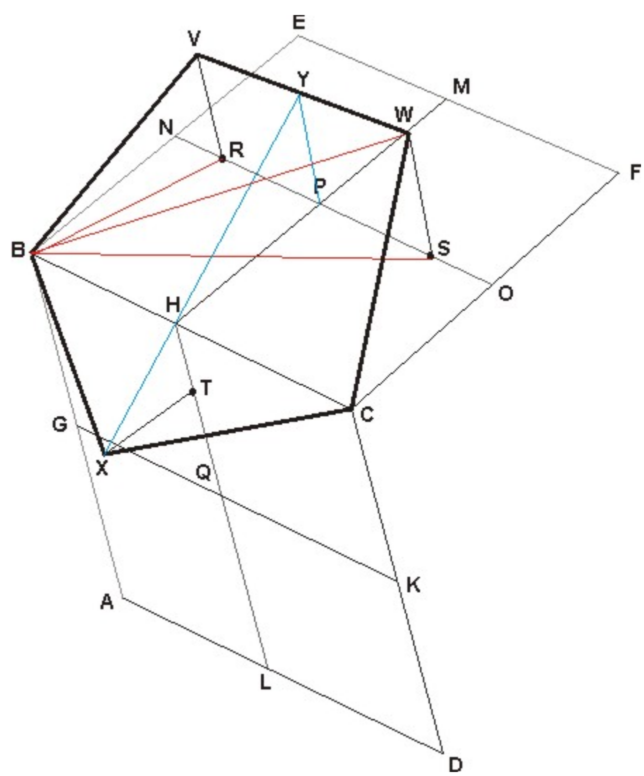
Ich sage nun, dass es vollständig in einer Ebene liegt.

Denn wenn in P parallel zu RV, SW auf der äußeren Seite des Würfels PY errichtet wird und wenn YH, HX gezogen werden, dann, sage ich, liegt YHX auf einer Geraden.
Denn da HQ in T in stetiger Teilung geteilt ist, wobei QT der größere Teil ist, verhält sich HQ zu QT wie QT zu TH. Da HQ gleich HP und da QT gleich TX und gleich PY ist, verhält sich HP zu PY wie XT zu TH.

Es ist TX parallel zu HP, denn beide sind senkrecht zur Fläche BD, und es ist TH parallel zu PY, denn beide sind senkrecht zur Fläche BF.

Die beiden Dreiecke YPH, HTX haben einen gemeinsamen Eckpunkt und zwei Seiten des einen stehen im gleichen Verhältnis wie zwei Seiten des anderen, die zu ihnen parallel sind, womit ihre übrigen Seiten auf derselben Geraden liegen [wie VI.32.]. Damit liegt das Fünfeck VBXCW vollständig in einer Ebene.

Ich sage nun, es ist auch gleichwinklig.



Denn da NP im Punkt R in stetiger Teilung geteilt ist, wobei RP der größere Teil und gleich PS ist, ist NS in stetiger Teilung geteilt, wobei NP der größere Teil ist. Somit ist das Quadrat über NS zusammen mit dem Quadrat über SP gleich dem dreifachen Quadrat über NP [wie XIII.4.].

Da NP gleich NB und da PS gleich SW ist, ist das Quadrat über NS zusammen mit dem Quadrat über SW gleich dem dreifachen Quadrat über NB. Die Quadrate über WS, SN, NB zusammen sind somit gleich dem vierfachen Quadrat über NB.

Das Quadrat über SB ist gleich dem Quadrat über SN zusammen mit dem Quadrat über NB [wie I.47.]. Also sind die Quadrate über BS, SW zusammen gleich dem vierfachen Quadrat über NB und gleich dem Quadrat über BW, denn der Winkel WSB ist ein rechter Winkel.
Damit ist WB gleich dem doppelten BN.
Da BC gleich dem doppelten BN ist, ist BW gleich BC

Die beiden Strecken BV, VW sind den beiden Strecken BX, XC gleich und liegen über den gleichen Grundseiten BW, BC, also ist der Winkel BVW gleich dem Winkel BXC.
Auf gleiche Weise ist zu zeigen, dass der Winkel VWC gleich dem Winkel BXC ist.
Somit sind die drei Winkel BXC, BVW, VWC gleich.

Wenn im gleichseitigen Fünfeck drei Winkel gleich sind, dann ist das Fünfeck gleichwinklig [wie XIII.7.]. Also ist das Fünfeck VBXCW gleichwinklig. Da es, wie gezeigt, auch gleichseitig ist, ist das Fünfeck VBXCW gleichseitig und gleichwinklig.

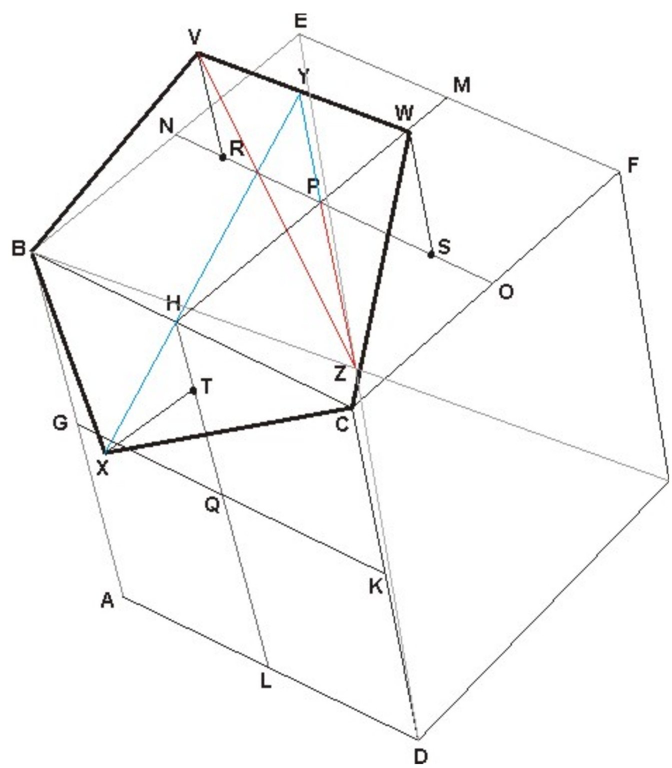
Das Fünfeck liegt auf der einen Kante BC des Würfels. Indem auf jeder der zwölf Kanten des Würfels ein gleiches Fünfeck errichtet wird, wird ein Körper von zwölf gleichseitigen und gleichwinkligen Fünfecken begrenzt, der Dodekaeder genannt wird.

Es ist zu zeigen, dass er der gegebenen Kugel einbeschrieben und die Kante des Dodekaeders irrational und zwar apotomisch ist.

Es ist YP bis zum Schnittpunkt Z der Diagonalen des Würfels zu verlängern.
Da die Diagonalen im Punkt Z halbiert werden, ist Z der Mittelpunkt der Kugel, dem der Würfel einbeschrieben ist [wie XI.38.]. Es ist ZP gleich einer halben Kante des Würfels.

Es ist VZ zu ziehen.
Da die Strecke NS in P in stetiger Teilung geteilt ist, wobei NP der größere Teil ist, sind die Quadrate über NS, SP zusammen gleich dem dreifachen Quadrat über NP [wie XIII.4.].

Es ist NS gleich YZ, denn NP ist gleich PZ, YP ist gleich PS.
Da PS gleich YV und PS gleich RP ist, sind die Quadrate über ZY, YV zusammen gleich dem dreifachen Quadrat über NP.



Da das Quadrat über VZ gleich den Quadraten über ZY, YV ist, ist das Quadrat über VZ gleich dem dreifachen Quadrat über NP.

Damit ist das Quadrat über dem Radius der Kugel gleich dem dreifachen Quadrat über der halben Kante des Würfels. Wie zuvor gezeigt, ist das Quadrat über dem Durchmesser der Kugel, der ein Würfel einbeschrieben ist, gleich dem dreifachen Quadrat über der Kante des Würfels [wie XIII.15.].

Wie das Ganzen des einen sich zum dreifachen Ganzen des anderen verhält, so verhält sich die Hälfte des einen zur dreifachen Hälfte des anderen.

NP ist die halbe Kante des Würfels, somit ist VZ der Radius der Kugel, der der Würfel einbeschrieben ist, und Z ist deren Mittelpunkt. Dabei liegt der Punkt V auf der Oberfläche der Kugel. Auf gleiche Weise ist zu zeigen, dass auch die übrigen Eckpunkte des Dedekaeders auf der Oberfläche der Kugel liegen. Also ist das Dodekaeder der gegebenen Kugel einbeschrieben.

Ich sage nun, die Kante des Dodekaeders ist irrational und zwar apotomisch.

Da RP der größere Teil der in stetiger Teilung geteilten Strecke NP ist und da PS der größere Teil der in stetiger Teilung geteilten Strecke PO ist, ist RS der größere Teil der in stetiger Teilung geteilten Strecke NO.

Es verhält sich NP zu PR wie PR zu RN. Da sich jeweils das Doppelte davon verhält wie diese Strecken, verhält sich NO zu PS wie PS zu NR und SO zusammen. Da NO größer als RS ist, ist RS größer als NR und SO zusammen.

Also ist NO in stetiger Teilung geteilt, wobei RS der größere Teil ist. Da RS gleich VW ist, ist VW der größere Teil der in stetiger Teilung geteilten Strecke NO.

Da der Durchmesser der Kugel rational oder quadriert rational ist und das Quadrat über ihm gleich dem dreifachen Quadrat über der Kante des Würfels ist, ist NO, das der Kante des Würfels gleich ist, quadriert rational.

Wenn eine Strecke rationaler oder quadriert rationaler Länge in stetiger Teilung geteilt ist, sind ihre Teile irrational und werden apotomisch genannt [wie XIII.6.]. Also ist die Kante des Dodekaeders irrational und zwar apotomisch.

Zusatz:

Offensichtlich ist die Kante eines Dodekaeders der größere Teil der in stetiger Teilung geteilten Kante eines Würfels, wobei beide der gleichen Kugel einbeschrieben sind, was zu zeigen war.

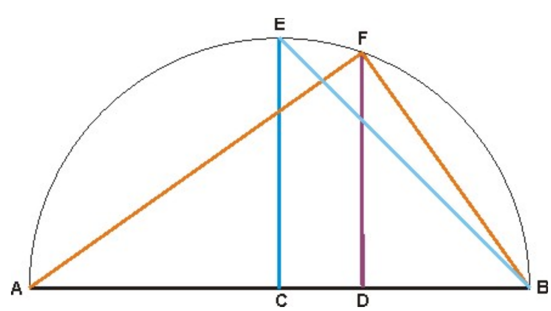
Anmerkung:

Der größere Teil x einer in stetiger Teilung geteilten Strecke s ist	$x = s \cdot (5^{1/2} - 1) / 2$.
Die Kante k_6 des Würfels, der in eine Kugel mit Radius r einbeschrieben ist,	$k_6 = 2 \cdot r / 3^{1/2}$
Damit ist die Kante eines der Kugel einbeschriebenen Dodekaeders	$k_{12} = (5^{1/2} - 1) \cdot r / 3^{1/2}$.

XIII.18.

Die Kanten der fünf verschiedenen Polyeder, die Kugeln mit gleichem Durchmesser einbeschrieben sind, darstellen und vergleichen.

Wird der gegebene Durchmesser AB der Kugel in C so geteilt, dass AC gleich CB ist, und in D so geteilt, dass AD gleich der doppelten DB ist, wird über AB der Halbkreis AEB geschlagen, werden auf AB in C, D die senkrechten CE, DF errichtet und werden AF, FB, EB gezogen, dann, da AD gleich dem doppelten DB ist und da AB gleich dem dreifachen BD ist, ist BA gleich der einundeinhalbfachen AD und es verhält sich BA zu AD wie das Quadrat über BA zum Quadrat über AF [wie V. Erklärung 9.].



Da das Dreieck AFB dem Dreieck AFD gleichwinklig ist [wie VI.8.], ist das Quadrat über BA gleich dem einundeinhalbfachen Quadrat über AF.

Da das Quadrat über dem Durchmesser der Kugel gleich dem einundeinhalbfachen Quadrat über der Kante des Tetraeders ist [wie XIII.13.] und da AB der Durchmesser der Kugel ist, ist AF die Kante eines einbeschriebenen Tetraeders.

Es ist AD gleich der doppelten DB und es ist AB gleich der dreifachen BD, also verhält sich AB zu BD wie das Quadrat über AB zum Quadrat über BF [wie V. Erklärung 9.]. Damit ist das Quadrat über AB gleich dem dreifachen Quadrat über BF.

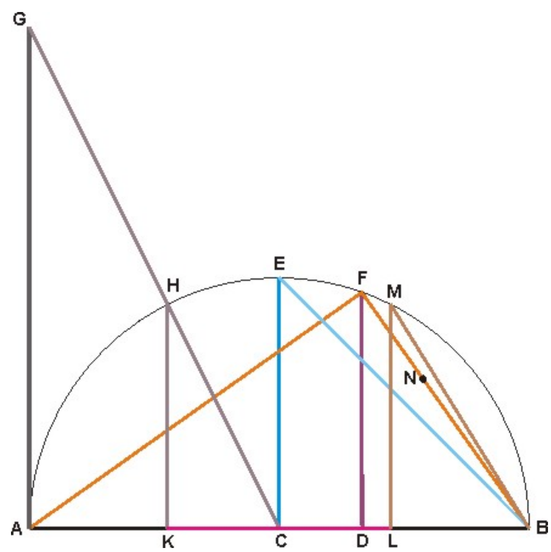
Da das Quadrat über dem Durchmesser der Kugel gleich dem dreifachen Quadrat über der Kante des Würfels ist [wie XIII.15.] und da AB der Durchmesser der Kugel ist, ist BF die Kante eines einbeschriebenen Würfels.

Es ist AC gleich CB und ist AB gleich der doppelten BC, somit verhält sich AB zu BC wie das Quadrat über AB zum Quadrat über BE. Damit ist das Quadrat über AB gleich dem doppelten Quadrat über BE.

Da das Quadrat über dem Durchmesser der Kugel gleich dem doppelten Quadrat über der Kante des Oktaeders ist [wie XIII.14.] und da AB der Durchmesser der Kugel ist, ist BE die Kante eines einbeschriebenen Oktaeders.

Wird im Punkt A auf AB die Senkrechte AG errichtet, wobei AG gleich AB ist, und wird GC gezogen und durch deren Schnittpunkt H mit dem Halbkreis AEB die zu AB senkrechte HK gezogen, dann, da GA gleich der doppelten AC ist, denn GA ist gleich AB, verhält sich GA zu AC wie HK zu KC [wie VI.4.] und ist HK gleich der doppelten KC.

Damit ist das Quadrat über HK gleich dem vierfachen Quadrat über KC. Also ist das Quadrat über HK zusammen mit einem Quadrat über KC gleich dem fünffachen Quadrat über KC und gleich dem Quadrat über HC [wie I.47.]. Da HC gleich CB ist, ist das Quadrat über BC gleich dem fünffachen Quadrat über CK. Da AB gleich der doppelten CB ist und da AD ist gleich der doppelten DB ist, ist BD gleich der doppelten DC. Damit ist BC gleich der dreifachen CD und ist das Quadrat über BC gleich dem neunfachen Quadrat über CD.



Da das Quadrat über BC gleich dem fünffachen Quadrat über CK ist, ist somit das Quadrat über CK größer als das Quadrat über CD und ist damit CK größer als CD.

Wird auf AB die Strecke CL, die gleich CK ist, eingetragen, in L auf AB die Senkrechte LM errichtet und MB gezogen, dann, da das Quadrat über BC gleich dem fünffachen Quadrat über CK ist, da AB gleich der doppelten BC und da KL gleich der doppelten CK ist, ist das Quadrat über AB gleich dem fünffachen Quadrat über KL.

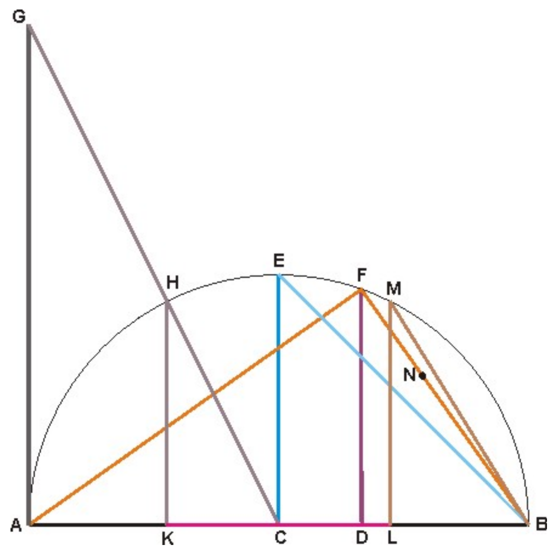
Da das Quadrat über dem Durchmesser der Kugel gleich dem fünffachen Quadrat über dem Radius des Kreises ist, über dem das Ikosaeder errichtet ist [wie XIII.16. Zusatz], und da AB der Durchmesser der Kugel ist, ist KL der Radius des Kreises über dem ein einbeschriebenes Ikosaeder errichtet ist. KL ist auch gleich der Seite eines Sechsecks, das diesem Kreis einbeschrieben ist [wie IV.15. Zusatz].

Da der Durchmesser der Kugel gleich der Seite des Sechsecks zusammen mit der doppelten Seite des Zehnecks ist, das jenem Kreis einbeschrieben ist [wie XIII.16. Zusatz] und da AB der Durchmesser der Kugel ist und da KL die Seite eines Sechsecks ist, ist AK, das gleich LB ist, die Seite eines Zehnecks, das dem Kreis einbeschrieben ist, über dem ein einbeschriebenes Ikosaeder zu errichten ist.

Es ist LB die Seite eines Zehnecks und es ist ML die Seite eines Sechsecks, denn ML ist gleich KL und ist gleich HK, die gleich weit vom Mittelpunkt entfernt ist, denn KL ist gleich der doppelten KC, also ist MB die Seite eines Fünfecks [wie XIII.10.], das jenem Kreis einbeschrieben ist. Die Seite dieses Fünfecks ist die Kante des Ikosaeders [wie XIII.16.]. Also ist MB die Kante des Ikosaeders, das der Kugel einbeschrieben ist.

Wird FB, die Kante des einbeschriebenen Würfels, in N in stetiger Teilung so geteilt, dass NB der größere Teil ist, ist NB die Kante des einbeschriebenen Dodekaeders [wie XIII.17. Zusatz].

Wie gezeigt, ist das Quadrat über dem Durchmesser der Kugel gleich dem einundeinhalbfachen Quadrat über AF, der Kante eines Tetraeders, ist gleich dem doppelten Quadrat über BE, der Kante eines Oktaeders, und ist gleich dem dreifachen Quadrat über FB, der Kante eines einbeschriebenen Würfels.



Wird das Quadrat über dem Durchmesser der Kugel in sechs gleiche Teile geteilt, sind deshalb vier davon gleich dem Quadrat über der Kante des Tetraeders, drei gleich dem Quadrat über der Kante des Oktaeders und zwei Teile gleich dem Quadrat über der Kante des einbeschriebenen Würfels.

Somit ist das Quadrat über der Kante des Tetraeders gleich vier Dritteln des Quadrats über der Kante des Oktaeders und ist gleich dem Doppelten des Quadrats über der Kante des Würfels und es ist das Quadrat über der Kante des Oktaeders das Einundeinhalbfache des Quadrats über der Kante des Würfels.

Also stehen die Kanten dieser drei Körper, des Tetraeders, des Oktaeders, des Würfels zueinander in den Verhältnissen quadriert rationaler Zahlen.

Die Kanten der übrigen beiden Körper, des Ikosaeders und des Dodekaeders, stehen weder in einem rationalen, noch in einem quadriert rationalen Verhältnis, da sie irrational sind. Es ist nämlich die Kante des Dodekaeders apotomisch [wie XIII.17.] und ist die Kante des Ikosaeders konjugiert apotomisch [wie XIII.16.].

Es ist zu zeigen, dass die Kante MB des Ikosaeders größer als die Kante NB des Dodekaeders ist.

Da das Dreieck FDB dem Dreieck FAB gleichwinklig ist, verhält sich DB zu BF wie BF zu BA. Wenn drei Größen in einer fortlaufend gleichen Proportion stehen, dann steht die erste zur dritten in dem Verhältnis wie die mit sich multiplizierte erste zur mit sich multiplizierten zweiten Größe [wie V. Erklärung 9.], also verhält sich DB zu BA wie das Quadrat über DB zum Quadrat über BF und verhält sich, in umgekehrten Verhältnissen, AB zu BD wie das Quadrat über BF zum Quadrat über BD.

Es ist AB gleich der dreifachen BD, also ist das Quadrat über FB gleich dem dreifachen Quadrat über BD. Es ist das Quadrat über AD gleich dem vierfachen Quadrat über DB, also ist AD gleich dem doppelten DB. Damit ist das Quadrat über AD größer als das Quadrat über FB und ist AD größer als FB. Umso mehr ist AL größer als FB.

Es ist AL in K in stetiger Teilung geteilt, wobei KL der größere Teil ist, denn KL ist die Seite eines Sechsecks und KA die Seite eines Zehnecks [wie XIII.9.].
Es ist FB in N in stetiger Teilung geteilt, wobei BN der größere Teil ist.
Also ist KL größer als BN. Da KL gleich LM ist, ist ML größer als BN.

Da BM größer als ML ist, ist MB, die Kante des Ikosaeders, größer als BN, die Kante des Dodekaeders, was zu zeigen war.

Zusatz XIII.18:

Außer den fünf erwähnten Körpern kann kein Polyeder konstruiert werden, das von gleichen, gleichseitigen und gleichwinkligen Flächen begrenzt wird.

Denn aus zwei Winkeln eines Dreiecks oder aus zwei Winkeln einer Figur, die in einer Ebene liegt, lässt sich kein Raumwinkel bilden [wie XI. Erklärung 11.].

Mit drei Winkeln gleicher und gleichseitiger Dreiecke wird der Raumwinkel des Tetraeders, mit vier der des Oktaeders, mit fünf der des Ikosaeders gebildet.

Mit sechs Winkeln gleicher, gleichseitiger und gleichwinkliger Dreiecke, die in einem Punkt zusammenstoßen, kann kein Raumwinkel gebildet werden, denn je drei dieser Winkel sind gleich zwei rechten Winkeln, somit sind sechs dieser Winkel gleich vier rechten Winkeln. Damit einen Raumwinkel zu bilden ist nicht möglich, denn die ebenen Winkel, die einen Raumwinkel bilden, sind zusammen kleiner als vier rechte Winkel [wie XI.21.], aber auch aus mehr als sechs solcher Winkel kann, aus den gleichen Gründen, kein Raumwinkel gebildet werden.

Mit drei Winkeln gleicher Quadrate wird der Raumwinkel des Würfels gebildet. Mit vier solcher Winkel einen Raumwinkel zu bilden ist nicht möglich, da es vier rechte Winkel sind.

Mit drei Winkeln gleicher, gleichseitiger und gleichwinkliger Fünfecke wird der Raumwinkel des Dodekaeders gebildet. Mit vier solcher Winkel den Raumwinkel eines Polyeders zu bilden ist nicht möglich, denn der Winkel eines gleichseitigen Fünfecks ist gleich einem und einem Fünftel eines rechten Winkels, womit vier dieser Winkel größer als vier rechte Winkel sind.

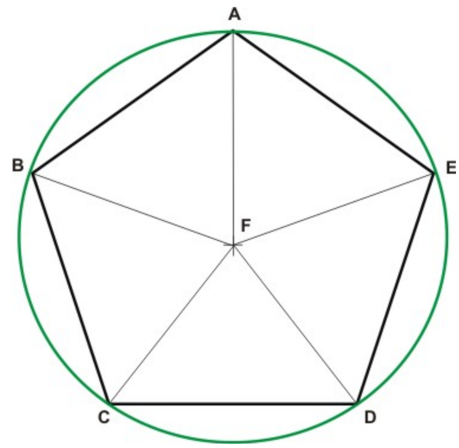
Aus den gleichen Gründen ist es nicht möglich, aus den Winkeln anderer Polygone einen Winkel eines Polyeders zu bilden.

Deshalb gibt es außer den fünf erwähnten Körpern keinen Körper, der von gleichen, gleichseitigen und gleichwinkligen Polygonen begrenzt wird, was zu zeigen war.

Lemma XIII.18.

Der Winkel eines gleichseitigen und gleichwinkligen Fünfecks ist gleich einem und einem Fünftel eines rechten Winkels.

Es ist um das gleichseitige und gleichwinklige Fünfeck ABCDE der Kreis ABCDE mit dem Mittelpunkt F zu beschreiben [wie IV.14.] und es sind FA, FB, FC, FD, FE zu ziehen, durch die die Winkel an A, B, C, D, E in zwei gleiche Teile geteilt werden.



Da die fünf Winkel an F gleich und gleich vier rechten Winkeln sind, ist jeder dieser Winkel, damit AFB, gleich einem weniger einem Fünftel eines rechten Winkels.

Damit sind die Winkel FAB, ABF zusammen gleich einem und einem Fünftel eines rechten Winkels.

Es ist der Winkel FAB gleich dem Winkel FBC, deshalb ist der daraus zusammengesetzte Winkel ABC gleich einem und einem Fünftel eines rechten Winkels, was zu zeigen war.