Euklid: Stoicheia

(Die Elemente des Euklid)

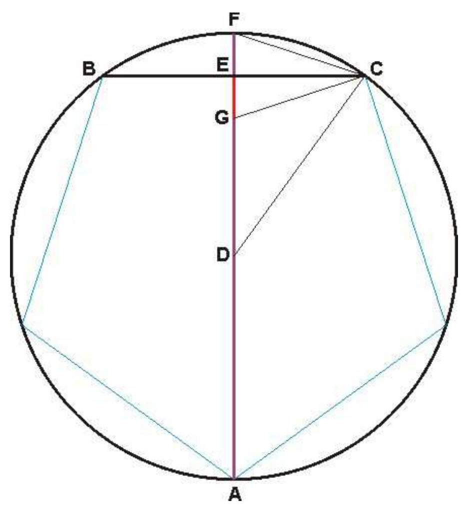
Buch XIV.

Über eingefügte Hypertextverknüpfungen kann der griechische Text in der Fassung von F. Peyrard aufgerufen werden.

XIV.1.

Die senkrechte Strecke von der Seite eines Fünfecks zum Mittelpunkt des Kreises, dem es einbeschrieben ist, ist die Hälfte der Strecke aus den Seiten eines Sechsecks und eines Zehnecks zusammen, die demselben Kreis einbeschrieben sind.

Wenn in den Kreis ABC mit dem Mittelpunkt D das Fünfeck ABC mit der Seite BC einbeschrieben und auf BC die senkrechte DE durch D errichtet und um EF und DA verlängert ist, dann, sage ich, ist DE die Hälfte der Strecke aus den Seiten eines Sechsecks und eines Zehnecks zusammen, die demselben Kreis einbeschrieben sind.



Es sind DC, CF zu ziehen, es ist GE, das gleich EF ist, abzutragen und es ist vom Punkt G bis C die GC einzutragen. Da der ganze Kreisumfang das Fünffache des Kreisbogens BFC, da ACF die Hälfte des Kreisumfangs und da FC die Hälfte des Kreisbogens BFC ist, ist ACF das Fünffache des Kreisbogens FC und ist AC das Vierfache des Kreisbogens FC.

Es verhält sich der Kreisbogen AC zum Kreisbogen FC wie der Winkel ADC zum Winkel FDC [wie VI.33.]. Der Winkel ADC ist damit das Vierfache des Winkels FDC und der Winkel ADC das Doppelte des Winkels AFC [wie III.20.].

Der Winkel CGF ist gleich dem Winkel GFC, also ist der Winkel EFC gleich dem Winkel EGC. Damit ist der Winkel EGC gleich dem doppelten Winkel GDC und ist DG gleich GC.

Es ist CG gleich CF, denn es ist GE gleich EF, und somit ist DG gleich FC.

Es ist deshalb DE gleich EF, FC zusammen und, beidem DE hinzugefügt, ist DF, FC zusammen gleich der doppelten DE.

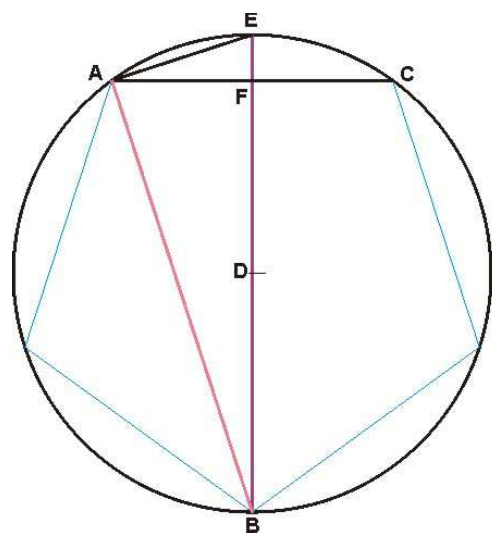
Da DF die Seite eines einbeschriebenen Sechsecks und FC die Seite eines einbeschriebenen Zehnecks ist, ist DE die Hälfte der Strecke aus der Seite eines Sechsecks und eines Zehnecks zusammen, die demselben Kreis einbeschrieben sind, was zu zeigen war.

Lemma XIV.2.

Das Quadrat über der Sehne unter zwei Seiten eines gleichseitigen und gleichwinkligen Fünfecks zusammen mit dem Quadrat über einer Seite des Fünfecks ist gleich dem fünffachen Quadrat über dem Radius des Kreises, dem es einbeschrieben ist.

Wenn in den Kreis ABC mit dem Mittelpunkt D das Fünfeck ABC einbeschrieben, auf dessen Seite AC die senkrechte DF zu errichten und bis B, E zu verlängern und AB gezogen ist, dann, sage ich, ist das Quadrat über BA zusammen mit dem Quadrat über AC gleich fünffachen Quadrat über DE.

Denn wenn AE gezogen wird, ist AE eine Seite eines einbeschriebenen Zehnecks.
Da BE gleich der doppelten ED ist, ist das Quadrat über BE gleich dem vierfachen Quadrat über ED.



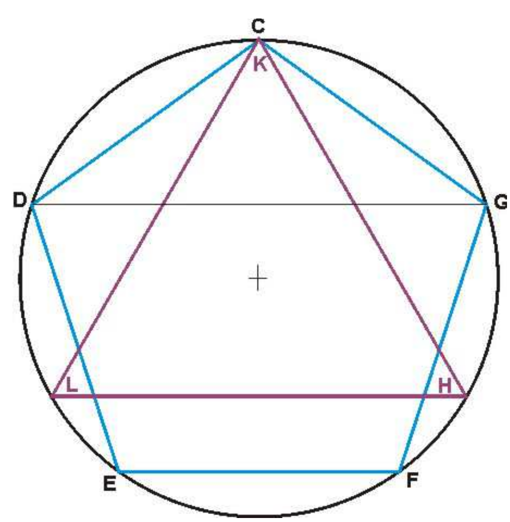
Da das Quadrat über BA zusammen mit dem Quadrat über AE gleich dem Quadrat über BE ist, sind die Quadrate über BA, AE zusammen gleich dem vierfachen Quadrat über DE und sind die Quadrate über BA, AE, ED zusammen gleich dem fünffachen Quadrat über DE.

Es ist das Quadrat über AC gleich den Quadraten über DE, EA zusammen [wie XIII.10.], somit sind die Quadrate über AB, AC zusammen gleich dem fünffachen Quadrat über DE, was zu zeigen war.

XIV.2.

Die fünfeckige Seitenfläche eines Dodekaeders und die dreieckige Seitenfläche eines Ikosaeders, die derselben Kugel einbeschrieben sind, haben den gleichen Umkreis.

Wenn in eine Kugel mit dem Durchmesser AB ein Dodekaeder mit der fünfeckigen Seitenfläche CDEFG und ein Ikosaeder mit der dreieckigen Seitenfläche KLH einbeschrieben sind, dann, sage ich, haben deren Umkreise den gleichen Radius und es ist das Fünfeck CDEFG und das Dreieck KLH dem gleichen Kreis einzubeschreiben.

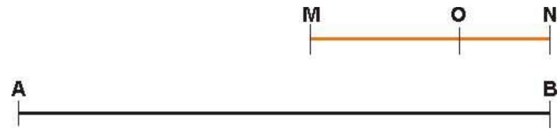


Denn wenn DG gezogen wird, ist DG die Kante eines der Kugel einbeschriebenen Würfels [wie in XIII.17.].

Es ist dann eine Strecke MN so anzulegen, dass das Quadrat über AB gleich dem fünffachen Quadrat über MN ist.

Es ist das Quadrat über dem Durchmesser der Kugel gleich dem fünffachen Quadrat über dem Radius des Kreises, über dem ein der Kugel einbeschriebenes Ikosaeder errichtet ist [wie XIII.16. Zusatz].

Damit ist MN gleich dem Radius des Kreises, über dem das Ikosaeder errichtet ist.



Wird MN in O in stetiger Teilung so geteilt, dass MO der größere Teil ist, dann ist MO die Seite eines diesem Kreis einbeschriebenen Zehnecks [wie XIII.10.].

Da das Quadrat über AB gleich dem fünffachen Quadrat über MN und da das Quadrat über BA gleich dem dreifachen Quadrat über DG ist [wie XIII.15.], ist das dreifache Quadrat über DG gleich dem fünffachen Quadrat über MN.

Somit verhält sich das dreifache Quadrat über DG zum dreifachen Quadrat über CG wie das fünffache Quadrat über MN zum fünffachen Quadrat über MO.
Da das fünffache Quadrat über MO zusammen mit dem fünffachen Quadrat über MN gleich dem fünffachen Quadrat über KL ist [wie XIII.10.], ist das fünffachen Quadrat über KL gleich dem dreifachen Quadrat über CG zusammen mit dem dreifachen Quadrat über DG.

Das fünffache Quadrat über KL ist gleich dem fünfzehnfachen Quadrat über dem Radius des Kreises, dem das Dreieck HKL einbeschrieben ist [wie XIII.12.].

Das dreifache Quadrat über DG zusammen mit dem dreifachen Quadrat über CG ist gleich dem fünfzehnfachen Quadrat über dem Radius des Kreises, dem das Fünfeck CDEFG einbeschrieben ist [wie XIV.2. Lemma], denn wie gezeigt, ist das Quadrat über DG zusammen mit dem Quadrat über CG gleich dem fünffachen Quadrat über dem Radius des Kreises, dem das Fünfeck CDEFG einbeschrieben ist.

Da die fünfzehnfachen Quadrate über den erwähnten Radien gleich sind, ist der Durchmesser des Kreises der gleiche.

Deshalb haben die fünfeckige Seitenfläche eines Dodekaeders und die dreieckige Seitenfläche eines Ikosaeders, die derselben Kugel einbeschrieben sind, den gleichen Umkreis, was zu zeigen war.

Anmerkung:

Die Seite a_5 eines Fünfecks, das einem Kreis mit Radius r einbeschrieben ist, $a_5 = r \cdot 10^{½} / (5 + 5^{½})^{½}$
der Radius R der Kugel mit einbeschriebenem Dodekaeder, dessen Kante $k_{12} = a_5$ ist,

$$R = k_{12} \cdot 3^{½} \cdot (1 + 5^{½}) / 4$$
$$R = r \cdot 6^{½} \cdot 5^{½} \cdot (1 + 5^{½}) / (4 \cdot (5 + 5^{½})^{½})$$
$$R = r \cdot 6^{½} \cdot (5 + 5^{½})^{½} / 4$$

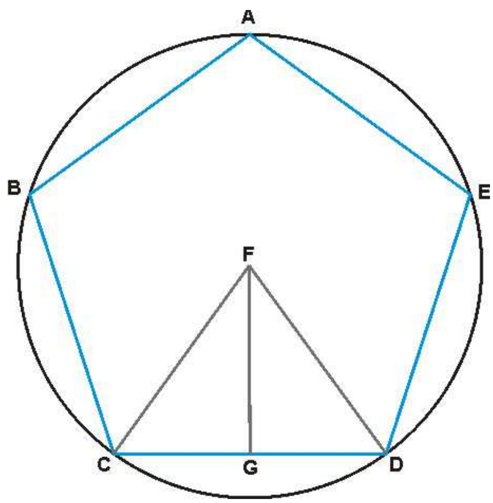
Die Seite a_3 eines Dreiecks, das einem Kreis mit Radius r einbeschrieben ist, $a_3 = r \cdot 3^{½}$
der Radius R der Kugel mit einbeschriebenem Ikosaeder, dessen Kante $k_{20} = a_3$ ist,

$$R = k_{20} \cdot 2^{½} \cdot (5 + 5^{½})^{½} / 4$$
$$R = r \cdot 6^{½} \; (5 + 5^{½})^{½} / 4.$$

XIV.3.

Das dreissigfache Rechteck aus der senkrechten Strecke von der Seite eines gleichseitigen und gleichwinkligen Fünfecks zum Mittelpunkt des Kreises, dem es einbeschrieben ist, mit einer Seite des Fünfecks ist gleich der Oberfläche dessen Dodekaeders.
Das dreissigfache Rechteck aus der senkrechten Strecke von der Seite eines gleichseitigen und gleichwinkligen Dreiecks zum Mittelpunkt des Kreises, dem es einbeschrieben ist, mit einer Seite des Dreiecks ist gleich der Oberfläche dessen Ikosaeders.

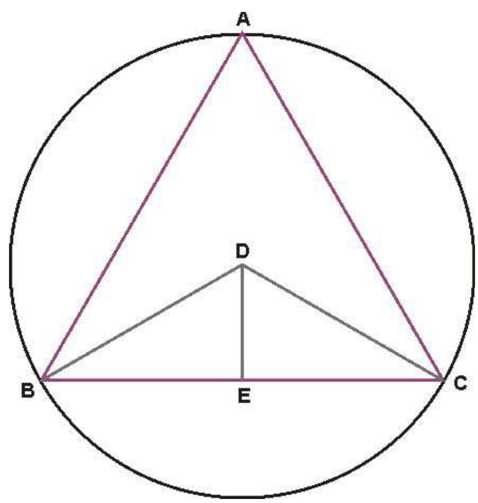
Wenn das gleichseitige und gleichwinklige Fünfeck ABCDE dem Kreis ACD mit dem Mittelpunkt F einbeschrieben und von F auf CD die senkrechte FG errichtet ist, dann, sage ich, ist das dreissigfache Rechteck aus CD mit FG gleich dem zwölffachen Fünfeck ABCDE.



Denn wenn CF, FD gezogen werden, ist das Rechteck aus CD mit FG gleich dem doppelten Dreieck CDF und ist das fünffache Rechteck aus CD mit FG gleich dem zehnfachen Dreieck CDF.

Da das zehnfache Dreieck dem doppelten Fünfeck gleich ist, ist, jeweils versechsfacht, das dreissigfache Rechteck aus CD mit FG gleich der Oberfläche des Dodekaeders aus zwölf Fünfecken ABCDE.

Auf gleiche Weise ist zu zeigen, dass das dreissigfache Rechteck aus der senkrechten Strecke DE von der Seite BC eines gleichseitigen und gleichwinkligen Dreiecks ABC zum Mittelpunkt D des Kreises ABC, dem es einbeschrieben ist, mit BC gleich der Oberfläche dessen Ikosaeders ist.



Denn wenn BD, CD gezogen werden, ist das Rechteck aus DE mit BC gleich dem doppelten Dreieck DBC und ist das dreifache Rechteck aus DE mit BC gleich dem sechsfachen Dreieck DBC.

Da das sechsfache Dreieck DBC gleich dem doppelten Dreieck ABC ist, ist, jeweils verzehnfacht, das dreissigfache Rechteck aus DE mit BC gleich der Oberfläche des Ikosaeders aus zwanzig Dreiecken ABC, was zu zeigen war.

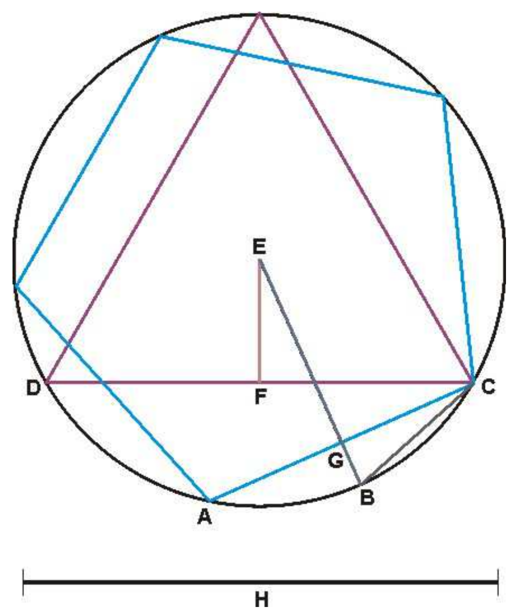
Zusatz XIV.3:

Offensichtlich verhält sich die Oberfläche eines Dodekaeders zur Oberfläche eines Ikosaeders wie das Rechteck aus der senkrechten Strecke von der Seite eines gleichseitigen und gleichwinkligen Fünfecks zum Mittelpunkt des Kreises mit einer Seite des Fünfecks zum Rechteck aus der senkrechten Strecke von der Seite eines gleichseitigen und gleichwinkligen Dreiecks zum Mittelpunkt des Kreises, dem sie einbeschrieben sind, mit einer Seite des Dreiecks.

XIV.4.

Die Oberfläche eines Dodekaeders verhält sich zur Oberfläche eines Ikosaeders wie die Kante eines Würfels zur Kante des Ikosaeders.

Wenn ABC der Umkreis eines Fünfecks des Dodekaeders und eines Dreiecks des Ikosaeders ist, die der gleichen Kugel einbeschrieben sind, wobei CD die Kante des Ikosaeders und somit die Seite eines gleichseitigen Dreiecks ist, das dem Kreis ABC mit dem Mittelpunkt E einbeschrieben ist, und wobei AC die Kante des Dodekaeders ist, und wenn von E senkrecht zu DC, CA die Strecken EF, EG gezogen, EG um GB verlängert, BC eingetragen und die Kante H des der Kugel einbeschriebenen Würfels ist, dann, sage ich, verhält sich die Oberfläche des Dodekaeders zur Oberfläche des Ikosaeders wie H zu CD.



Denn da die Strecke aus BE, BC zusammen in stetiger Teilung geteilt ist, wobei BE der größere Teil ist [wie XIII.9.], da EG gleich der halben Strecke aus EB, BC zusammen ist [wie 14.1.] und da EF gleich der halben BE ist [wie in XIII.12.], ist die Strecke EG in stetiger Teilung geteilt, wobei EF der größere Teil ist.

Wird H in stetiger Teilung geteilt, wobei CA der größere Teil ist [wie XIII.17. Zusatz], dann verhält sich H zu CA wie EG zu EF [wie Lemma XIV.4.].

Da dann das Rechteck aus FE mit H gleich dem Rechteck aus CA mit EG ist [wie VI.16.], verhält sich H zu CD wie wie das Rechteck aus FE mit H zum Rechteck aus CD mit FE [wie VI.1.]. Das Rechteck aus CA mit EG ist gleich dem Rechteck aus FE mit H, also verhält sich H zu CD wie das Rechteck aus CA mit EG zum Rechteck aus CD mit FE.

Damit verhält sich die Kante des Würfels zur Kante des Ikosaeders wie die Oberfläche des Dodekaeders zur Oberfläche des Ikosaeders [wie XIV.3. Zusatz], was zu zeigen war..

Anmerkung:

Die Kanten regulärer Polyeder, in eine Kugel mit Radius R einbeschrieben, sind:

Würfel $k_6 = 2 \cdot R / 3^{1/2}$,

Ikosaeder $k_{20} = 4 \cdot R / (2 \cdot (5 + 5^{1/2}))^{1/2}$.

Die Oberflächen der Polyeder sind:

Dodekaeder $O_{12} = 8 \cdot R^2 \cdot (5 \cdot (5 + 2 \cdot 5^{1/2}))^{1/2} / (3 + 5^{1/2})$

Ikosaeder $O_{20} = 40 \cdot R^2 \cdot 3^{1/2} / (5 + 5^{1/2})$

Es ist $O_{12} / O_{20} = 8 \cdot R^2 \cdot (5 \cdot (5 + 2 \cdot 5^{1/2}))^{1/2} \cdot (5 + 5^{1/2}) / ((3 + 5^{1/2}) \cdot 40 \cdot R^2 \cdot 3^{1/2})$

$= k_6 / k_{20} = 2 \cdot R \cdot (2 \cdot (5 + 5^{1/2}))^{1/2} / (4 \cdot R \cdot 3^{1/2})$

denn $2 \cdot (5 \cdot (5 + 2 \cdot 5^{1/2}))^{1/2} \cdot (5 + 5^{1/2}) / ((3 + 5^{1/2}) \cdot 5) = (2 \cdot (5 + 5^{1/2}))^{1/2}$,

beide Seiten quadriert und durch 2 geteilt:

$$10 \cdot (5 + 2 \cdot 5^{1/2}) \cdot (5 + 5^{1/2})^2 / ((3 + 5^{1/2})^2 \cdot 25) = (5 + 2 \cdot 5^{1/2}) \cdot (6 + 2 \cdot 5^{1/2}) / (7 + 3 \cdot 5^{1/2})$$

$$= (50 + 22 \cdot 5^{1/2}) / (7 + 3 \cdot 5^{1/2}) = 5 + 5^{1/2},$$

da $(5 + 5^{1/2}) \cdot (7 + 3 \cdot 5^{1/2}) = 50 + 22 \cdot 5^{1/2}$.

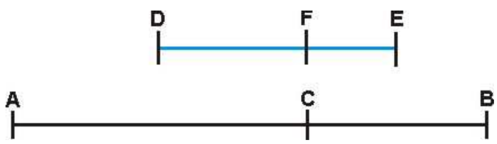
Lemma XIV.4.

Sind zwei Strecken in stetiger Teilung geteilt, dann verhält sich die eine Strecke zu ihrem größeren Teil wie die andere Strecke zu ihrem größeren Teil.

Wenn AB in C so in stetiger Teilung geteilt ist, dass AC der größere Teil ist, und wenn DE in F so in stetiger Teilung geteilt ist, dass DF der größere Teil ist, dann, sage ich, verhält sich AB zu AC wie DE zu DF.

Denn da das Rechteck aus AB mit BC gleich dem Quadrat über AC und da das Rechteck aus DE mit EF gleich dem Quadrat über DF ist [wie VI.17.], verhält sich das Rechteck aus AB mit BC zum Quadrat über AC wie das Rechteck aus DE mit EF zum Quadrat über DF und verhalten sich vier Rechtecke aus AB mit BC zum Quadrat über AV wie vier Rechtecke aus DE mit EF zum Quadrat über DF.

In vergrößerten Verhältnissen verhalten sich somit vier Rechtecke aus AB mit BC zusammen mit dem Quadrat über AC zum Quadrat über AC wie vier Rechtecke aus DE mit EF zusammen mit dem Quadrat über DF zum Quadrat über DF.



Damit verhält sich das Quadrat über der Strecke aus AB, BC zusammen zum Quadrat über AC wie das Quadrat über der Strecke aus DE, EF zusammen zum Quadrat über DF [wie II.8.].

Also verhält sich die Strecke aus AB, BC, AC zusammen zu AC wie die Strecke aus DE, EF, DF zusammen zu DF, somit verhält sich die doppelte AB zu AC wie die doppelte DE zu DF und verhält sich AB zu AC wie DE zu DF, was zu zeigen war.

XIV.5.

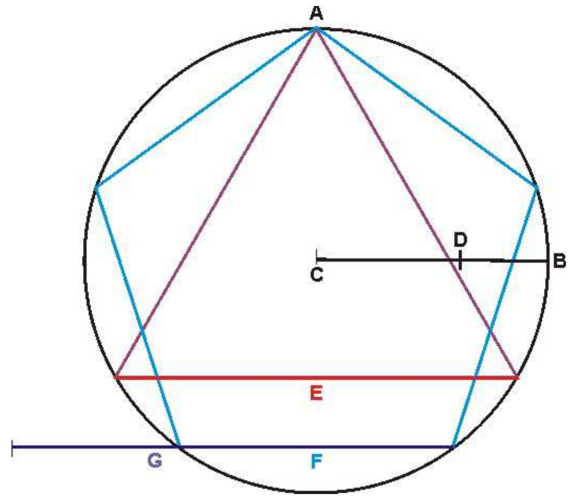
Die Seite des Quadrats, das dem Quadrat über einer in stetiger Teilung geteilten Strecke zusammen mit dem Quadrat über dessen größeren Teil gleich ist, verhält sich zur Seite des Quadrats, das dem Quadrat über der ganzen Strecke zusammen mit dem Quadrat über dem kleineren Teil gleich ist, wie die Kante eines Würfel zur Kante eines Ikosaeders.

Wenn AB der Umkreis eines Fünfecks des Dodekaeders und eines Dreiecks des Ikosaeders ist, die der gleichen Kugel einbeschrieben sind, und zum Mittelpunkt C der Radius CB gezogen und in D in stetiger Teilung so geteilt ist, dass CD der größere Teil ist, dann ist CD die Seite eines Zehnecks, das demselben Kreis einbeschrieben ist.

Ist E die Kante des Ikosaeders, F die Kante des Dodekaeders und G die Kante des Würfels, dann ist E die Seite eine gleichseitigen Dreiecks und F die Seite eines Fünfecks, die demselben Kreis einbeschrieben sind. Der größere Teil der in stetiger Teilung geteilten Kante G des Würfels ist dann die Kante F des Dodekaeders [wie XIII.17. Zusatz].

Da E die Seite eines gleichseitigen Dreiecks ist und da das Quadrat über der Seite eines gleichseitigen Dreiecks, das einem Kreis einbeschrieben ist, gleich dem dreifachen Quadrat über dem Radius ist [wie XIII.12.], somit das Quadrat über CB zusammen mit dem Quadrat über BD gleich dem dreifachen Quadrat über CD ist [wie XIII.4.], verhält sich das Quadrat über E zum Quadrat über CB wie die Quadrate über CB, BD zusammen zum Quadrat über CD.

Nach Umordnung [wie V.16.], verhält sich das Quadrat über E zu den Quadraten über CB, BD zusammen wie das Quadrat über CB zum Quadrat über CD und wie das Quadrat über G zum Quadrat über F, denn F ist der größere Teil der Strecke G.



Damit verhält sich das Quadrat über E zu den Quadraten über CB, BD zusammen wie das Quadrat über G zum Quadrat über F und, nach Umordnung, verhält sich das Quadrat über G zum Quadrat über E wie das Quadrat über F zu den Quadraten über CB, BD zusammen.

Da die Quadrate über BC, CD zusammen gleich dem Quadrat über F ist, denn das Quadrat über der Seite eines einem Kreis einbeschriebenen Fünfecks ist gleich den Quadraten über den Seiten des diesem Kreis einbeschriebenen Sechsecks und Zehnecks zusammen [wie XIII.10.], verhält sich das Quadrat über G zum Quadrat über E wie die Quadrate über BC, CD zusammen zu den Quadraten über CB, BD zusammen.

Also verhält sich das Quadrat über G zum Quadrat über E wie die Seite des Quadrats, das den Quadraten über einer in stetiger Teilung geteilten Strecke zusammen mit dem Quadrat über dessen größeren Teil gleich ist, zur Seite des Quadrats, das dem Quadrat über der ganzen Strecke zusammen mit dem Quadrat über dem kleineren Teil gleich ist.
Dabei ist G die Kante eines Würfels und E die Kante eines Ikosaeders.

Deshalb verhält sich die Seite des Quadrats, das dem Quadrat über einer in stetiger Teilung geteilten Strecke zusammen mit dem Quadrat über dessen größeren Teil gleich ist, zur Seite des Quadrats, das dem Quadrat über der ganzen Strecke zusammen mit dem Quadrat über dem kleineren Teil gleich ist, wie die Kante eines Würfels zur Kante eines Ikosaeders, die der gleichen Kugel einbeschrieben sind, was zu zeigen war.

Anmerkung:

Die Kanten regulärer Polyeder, in eine Kugel mit Radius R einbeschrieben, sind:

Würfel $k_6 = 2 \cdot R / 3^{½}$

Ikosaeder $k_{20} = 4 \cdot R / (2 \cdot (5 + 5^{½}))^{½}$.

Der größere Teil x einer in stetiger Teilung geteilten Strecke mit Länge 1 ist $x = (5^{½} – 1) / 2$
und der kleinere Teil y ist $y = (3 – 5^{½}) / 2$.

Damit ist $x^2 = (3 – 5^{½}) / 2$ und $y^2 = (7 – 3 \cdot 5^{½}) / 2$.

Es ist $(x^2 + 1)^{½} / (y^2 + 1)^{½} = (5 – 5^{½})^{½} / (9 – 3 \cdot 5^{½})^{½} = k_6 / k_{20} = (2 \cdot (5 + 5^{½}))^{½} / (2 \cdot 3^{½})$

denn, beide Seiten quadriert,

$(5 – 5^{½}) / (9 – 3 \cdot 5^{½}) = (5 + 5^{½}) / 6$

da $(9 – 3 \cdot 5^{½}) \cdot (5 + 5^{½}) = 6 \cdot (5 – 5^{½})$.

XIV.6.

Das Volumen eines Dodekaeders verhält sich zum Volumen eines Ikosaeders wie die Kante eines Würfels zur Kante eines Ikosaeders.

Die Umkreise des Fünfecks des Dodekaeders und des Dreiecks des Ikosaeders, die der gleichen Kugel einbeschrieben sind, sind gleich [wie XIV.2.]. Gleiche Kreise auf der Oberfläche einer Kugel sind gleich weit von deren Mittelpunkt entfernt, denn die senkrechten Strecken vom Mittelpunkt der Kugel zu den Ebenen, in denen die Kreise liegen, sind gleich und gehen durch die Mittelpunkte der Kreise. Also verhalten sich die Pyramiden, deren eine Grundfläche das Fünfeck des Dodekaeders und deren andere Grundfläche das Dreieck des Ikosaeders ist, wobei ihre Spitzen der Mittelpunkt der Kugel ist, wie ihre Grundflächen, denn ihre Höhen sind gleich und Pyramiden gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen [wie XII.6.].

Damit verhält sich das Fünfeck zum Dreieck wie die Pyramide, deren Grundfläche das Fünfeck, zur Pyramide, deren Grundfläche das Dreieck ist, wobei ihre Spitze jeweils der Mittelpunkt der Kugel ist.

Es verhalten sich damit zwölf Fünfecke zu zwanzig Dreiecken wie zwölf Pyramiden, deren Grundflächen gleich dem Fünfeck, zu zwanzig Pyramiden, deren Grundflächen gleich dem Dreieck sind.

Da zwölf Fünfecke die Oberfläche des Dodekaeders und zwanzig Dreiecke die Oberfläche des Ikosaeders sind, verhält sich die Oberfläche des Dodekaeders zur Oberfläche des Ikosaeders wie zwölf Pyramiden, deren Grundflächen gleich dem Fünfeck, zu zwanzig Pyramiden, deren Grundflächen gleich dem Dreieck sind. Dabei haben zwölf Pyramiden, deren Grundflächen gleich dem Fünfeck sind, das Volumen des Dodekaeders und haben zwanzig Pyramiden, deren Grundflächen gleich dem Dreieck sind, das Volumen des Ikosaeders.

Somit verhält sich die Oberfläche des Dodekaeders zur Oberfläche des Ikosaeders wie das Volumen des Dodekaeders zum Volumen des Ikosaeders.
Wie gezeigt, verhält sich die Oberfläche eines Dodekaeders zur Oberfläche eines Ikosaeders wie die Kante eines Würfels zur Kante des Ikosaeders [wie XIV.4.].

Deshalb verhält sich die Kante eines Würfels zur Kante des Ikosaeders wie das Volumen des Dodekaeders zum Volumen des Ikosaeders.

Anmerkung:

Die Volumen der Polyeder, die einer Kugel mit Radius R einbeschrieben sind:

Dodekaeder $V_{12} = 8 \cdot R^3 \cdot (15 + 7 \cdot 5^{1/2}) / (12 \cdot 3^{1/2} \cdot (2 + 5^{1/2}))$

Ikosaeder $V_{20} = 8 \cdot R^3 \cdot 5 \cdot (3 + 5^{1/2}) / (3 \cdot (5 + 5^{1/2}) \cdot (2 \cdot (5 + 5^{1/2}))^{1/2})$

Wie in XIV.5. ist das Verhältnis der Kante des Würfels zur Kante des Ikosaeders:

$$k_6 / k_{20} = (2 \cdot (5 + 5^{1/2}))^{1/2} / (2 \cdot 3^{1/2})$$

Es ist

$$\begin{aligned} V_{12} / V_{20} &= (15 + 7 \cdot 5^{1/2}) \cdot 3 \cdot (5 + 5^{1/2}) \cdot (2 \cdot (5 + 5^{1/2}))^{1/2} / (60 \cdot 3^{1/2} \cdot (2 + 5^{1/2}) \cdot (3 + 5^{1/2})) \\ &= 30 \cdot (11 + 5 \cdot 5^{1/2}) \cdot (2 \cdot (5 + 5^{1/2}))^{1/2} / (60 \cdot 3^{1/2} \cdot (11 + 5 \cdot 5^{1/2})) \\ &= (2 \cdot (5 + 5^{1/2}))^{1/2} / (2 \cdot 3^{1/2}). \end{aligned}$$

Zusatz XIV.6.:

Es verhält sich die Seite des Quadrats, das dem Quadrat über einer in stetiger Teilung geteilten Strecke zusammen mit dem Quadrat über dessen größeren Teil gleich ist, zur Seite des Quadrats, das dem Quadrat über der ganzen Strecke zusammen mit dem Quadrat über dem kleineren Teil gleich ist, wie die Kante eines Würfel zur Kante eines Ikosaeders [wie XIV.5.].

Wie gezeigt, verhält sich die Oberfläche eines Dodekaeders zur Oberfläche eines Ikosaeders wie die Kante eines Würfels zur Kante des Ikosaeders [wie XIV.4.].

Das Volumen eines Dodekaeders verhält sich zum Volumen eines Ikosaeders wie die Kante eines Würfels zur Kante eines Ikosaeders [wie XIV.6.], wobei das Fünfeck des Dodekaeders und das Dreieck des Ikosaeders dem gleichen Kreis und Dodekaeder und Ikosaeder der gleichen Kugel einbeschrieben sind, und diese verhalten sich wie die Seite des Quadrats, das dem Quadrat über einer beliebigen in stetiger Teilung geteilten Strecke zusammen mit dem Quadrat über dessen größeren Teil gleich ist, zur Seite des Quadrats, das dem Quadrat über der ganzen Strecke zusammen mit dem Quadrat über dem kleineren Teil gleich ist.

Deshalb verhält sich ein Dodekaeder zu einem Ikosaeder, der der gleichen Kugel einbeschrieben ist, wie die Seite des Quadrats, das dem Quadrat über einer beliebigen in stetiger Teilung geteilten Strecke zusammen mit dem Quadrat über dessen größeren Teil gleich ist, zur Seite des Quadrats, das dem Quadrat über der ganzen Strecke zusammen mit dem Quadrat über dem kleineren Teil gleich ist.
