Euklid: Stoicheia (Euklids Elemente)

Buch III.

Über eingefügte Hypertextmarkierungen kann der griechische Text in der Fassung von I. L. Heiberg aufgerufen werden.

Erklärungen.

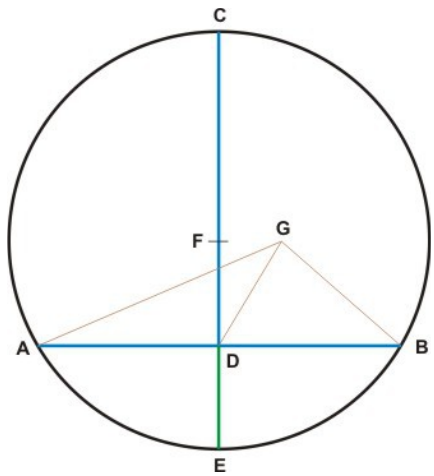
1. Kreise mit gleichen Durchmessern oder gleichen Radien sind gleich.
2. Eine Tangente ist eine Gerade, die einen Kreis berührt und in der Verlängerung nicht schneidet.
3. Kreise berühren sich, wenn sie aneinander liegen, aber nicht schneiden.
4. Gerade sind dann vom Mittelpunkt eines Kreises gleich weit entfernt, wenn senkrechte Strecken zum Mittelpunkt gleich sind;
5. weiter entfernt ist diejenige, von der die senkrechte Strecke zum Mittelpunkt größer ist.
6. Kreisabschnitte werden von der Kreislinie und der Strecke auf einer schneidenden Geraden begrenzt.
7. Der Kreisbogen ist die Kreislinie des Kreisabschnitts.
8. Der Winkel des Kreisabschnitts wird von Geraden durch die Schnittpunkte der den Kreis schneidenden Geraden, den Endpunkten der Grundseite, gebildet, die sich in einem Punkt des Kreisbogens treffen.
9. Gerade, die einen Winkel bilden und einen Kreisbogen abschneiden, sagt man, stehen auf dem Kreisbogen des Kreisabschnitts.
10. Ein Kreissektor wird von einem Kreisbogen und von Geraden begrenzt die, auf dem Kreisbogen stehend, einen Winkel im Kreismittelpunkt bilden.
11. In ähnlichen Kreisabschnitten sind die Winkel des Kreisabschnitts gleich.

III.1.

Den Mittelpunkt eines gegebenen Kreises auffinden.

Es sei der Kreis ABC gegeben; es soll sein Mittelpunkt gefunden werden.

Wird eine beliebige Gerade AB durch den Kreis ABC gelegt und im Punkt D zwischen den Schnittpunkten in zwei gleiche Teile geteilt, im Punkt D die Senkrechte CD errichtet und bis E verlängert, schließlich CE in F in zwei gleiche Teile geteilt, dann, sage ich, ist F der Mittelpunkt. Denn ist er es nicht, dann ist es anderer Punkt G und es GA, GD und GB zu ziehen.



Da AD und DB gleich sind und die Senkrechte DG gemeinsam haben, sind die einen beiden Strecken AD und DG gleich den anderen beiden GD und DB.
Somit sind GA und GB gleiche Radien und auch der Winkel ADG ist gleich GDB. Wenn eine auf einer anderen errichteten Strecke gleiche Winkel mit ihr bildet, dann sind dies rechte Winkel. Also ist GDB ein rechter Winkel.
Es ist auch FDB ein rechter Winkel, somit ist der Winkel FDB gleich GDB, der größere dem kleineren, was nicht möglich ist.
So wie gezeigt ist, dass G nicht der Mittelpunkt des Kreises ABC ist, so kann auch gezeigt werden, dass kein anderer Punkt als F Mittelpunkt ist.

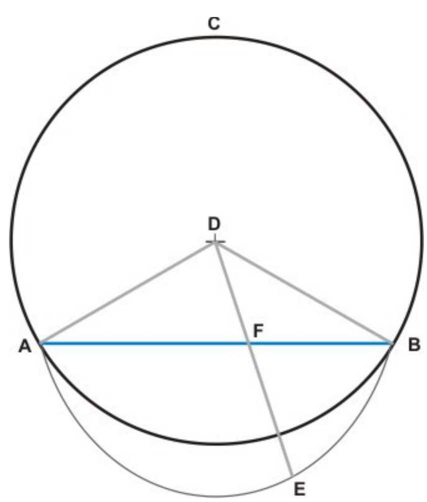
Deshalb ist der Punkt F der Mittelpunkt des Kreises ABC.
Was auszuführen war.

Zusatz: **Offenbar liegt im Kreis auf einer Geraden, die eine schneidende Gerade zwischen den Schnittpunkten in zwei gleiche Teile teilt und mit ihr rechte Winkel bildet, der Mittelpunkt des Kreises.**

III.2.

Punkte auf einer geraden Strecke zwischen zwei Punkten auf einer Kreislinie liegen innerhalb des Kreises.

Werden auf einer Kreislinie ABC beliebig zwei Punkte A und B gesetzt, dann, sage ich, liegt jeder Punkt auf der geraden Strecke zwischen A und B innerhalb des Kreises.



Denn liegt er da nicht, dann liegt er auf einer Linie AEB außerhalb des Kreises.
Durch den Mittelpunkt D des Kreises ABC sind DA und DB zu legen und ist die Gerade DFE zu ziehen.
Da DA gleich DB ist und im gleichschenkligen Dreieck die Winkel auf der Grundseite gleich sind, ist dann der Winkel DAE gleich DBE.
Da in DAE die Seite AE bis B verlängert und der außen liegende Winkel größer als der innen gegenüber liegende ist, ist somit der Winkel DEB größer als DAE.
Da aber DAE und DBE gleich sind, ist dann der Winkel DEB größer als DBE.

Da dem größeren Winkel auch die größere Seite gegenüber liegt, ist dann DB größer als DE. Aber DB ist gleich DF, somit DF dann größer als DE, die kleinere größer als die größere, was nicht möglich ist.
Also liegt ein Punkt zwischen A und B nicht auf einer Linie außerhalb des Kreises.
Ebenso kann gezeigt werden, dass dieser Punkt auch nicht auf der Kreislinie liegen kann.
Also liegt er innerhalb des Kreises.

Deshalb liegt jeder Punkt einer Strecke zwischen zwei beliebigen Punkten auf einer Kreislinie innerhalb des Kreises, was zu zeigen war.

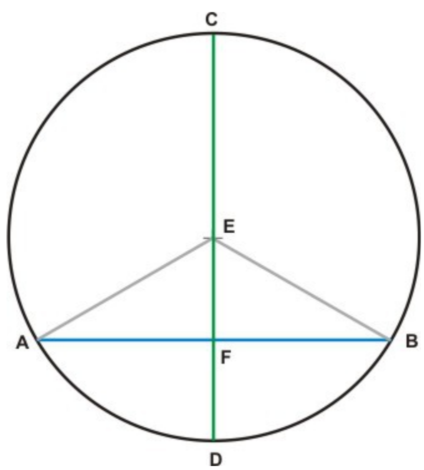
III.3.

Teilt eine durch den Mittelpunkt gehende Gerade den Abschnitt einer schneidende Gerade, die nicht durch den Mittelpunkt geht, zwischen den Schnittpunkten in zwei gleiche Teile, dann bildet sie mit ihr rechte Winkel und bildet sie rechte Winkel, dann teilt sie den Abschnitt einer schneidende Gerade zwischen den Schnittpunkten, nämlich die Sehne, in zwei gleiche Teile.

Wenn in einem Kreis ABC die durch den Mittelpunkt gehende Gerade CD die Sehne AB, die nicht durch den Mittelpunkt geht, in zwei gleiche Teile teilt, dann, sage ich, schneidet sie rechtwinklig.

Es ist der Mittelpunkt des Kreises ABC zu suchen; es sei dies E, und EA und EB zu ziehen.

Da AF und FB gleich sind und die Seite FE gemeinsam haben, auch EA und EB gleich sind, sind auch die Winkel AFE und BFE gleich.
Wenn eine auf einer anderen errichteten Strecke gleiche Winkel mit ihr bildet, dann sind dies rechte Winkel.
Also sind AFE und BFE rechte Winkel.
Deshalb teilt die Gerade CD, die durch den Mittelpunkt geht, die Sehne AB in zwei gleiche Teile und schneidet sie rechtwinklig.



Wenn die CD die AB rechtwinklig schneidet, dann, sage ich, teilt sie auch in zwei gleiche Teile AF und FB.

Da EA gleich EB ist, sind die Winkel EAF und EBF gleich.
Es sind nun auch die Winkel AFE und BFE gleich.
In den Dreiecken EAF und EFB sind also zwei Winkel und eine gemeinsame Seite, die dem gleichen Winkel gegenüber liegt, gleich und damit sind auch die übrigen Seiten und Winkel gleich. Also ist AF gleich FB.

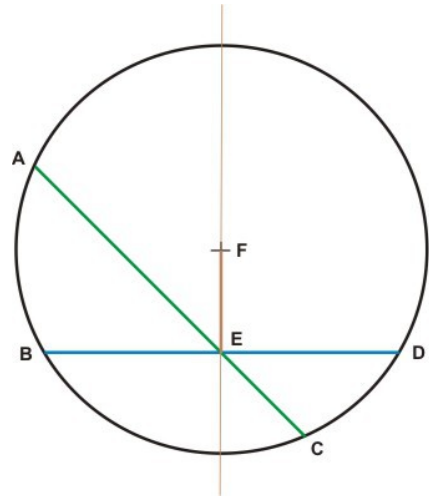
Deshalb schneidet eine durch den Mittelpunkt gehende Gerade eine Sehne rechtwinklig, wenn sie die Sehne in zwei gleiche Teile teilt und sie teilt in zwei gleiche Teile, wenn sie rechtwinklig schneidet, was zu zeigen war.

III.4.

Schneiden sich zwei Sehnen, die nicht durch den Mittelpunkt gehen, sind sie dadurch nicht beide in zwei gleiche Teile geteilt.

Wenn im Kreis ABCD die beiden Sehnen AC und BD nicht durch den Mittelpunkt gehen und sich im Punkt E schneiden, dann, sage ich, sind sie dadurch nicht beide in zwei gleiche Teile geteilt.

Denn wenn sie beide in zwei gleiche Teile geteilt sind, dann ist AE gleich EC und BE gleich ED. Es sei der Mittelpunkt des Kreises F und es ist FE zu ziehen.



Da eine Gerade, die durch den Mittelpunkt geht und eine Sehne, die nicht durch den Mittelpunkt geht, in zwei gleiche Teile teilt, diese rechtwinklig teilt, teilt FE, die durch den Mittelpunkt geht, die Sehne AC, die nicht durch den Mittelpunkt geht, in zwei gleiche Teile und mit rechten Winkeln. FEA ist dann ein rechter Winkel.
Da dann auch BD in zwei gleiche Teile geteilt wird, ist auch FEB ein rechter Winkel.

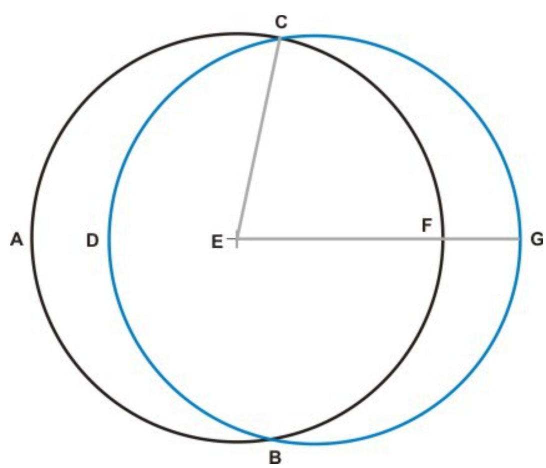
Also ist dann FEA gleich FEB, der kleinere gleich dem größeren, was nicht möglich ist. Also sind AC und BD hierbei nicht beide in zwei gleiche Teile geteilt.

Deshalb sind zwei sich schneidende Sehnen, die nicht durch den Mittelpunkt gehen, dadurch nicht beide in zwei gleiche Teile geteilt, was zu zeigen war.

III.5.

Zwei Kreise, die sich schneiden, haben nicht denselben Mittelpunkt.

Wenn sich die Kreise ABC und CDG sich in den Punkten B und C schneiden, dann, sage ich, haben sie nicht denselben Mittelpunkt.



Wenn sie ihn haben, es dies E, dann sind EC und die durchgehende EFG zu ziehen.

Da E der Mittelpunkt des Kreises ABC ist, sind dann EC und EF gleich.
Da E auch der Mittelpunkt des Kreises CDG ist, sind dann auch EC und EG gleich.
Es ist dann EF gleich EG, das kleinere gleich dem größeren, was nicht möglich ist.
Also ist E nicht der gemeinsame Mittelpunkt der Kreise ABC und CDG.

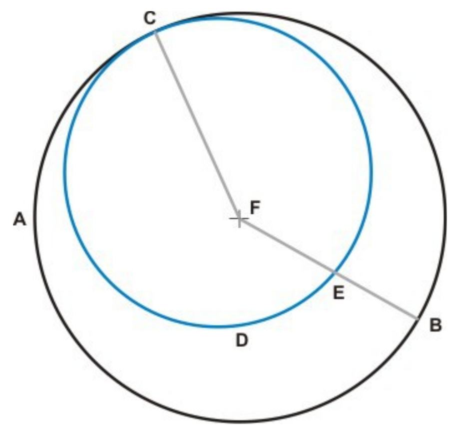
Deshalb haben zwei Kreise, die sich schneiden, nicht denselben Mittelpunkt, was zu zeigen war.

III.6.

Zwei Kreise, die sich berühren, haben nicht denselben Mittelpunkt.

Wenn sich zwei Kreise ABC und CDE im Punkt C berühren, dann, sage ich, haben sie nicht denselben Mittelpunkt.

Wenn sie ihn haben, es sei dies F, dann ist die durchgehende FEB zu ziehen.



Da dann F der Mittelpunkt des Kreises ABC ist, sind FC und FB gleich. Da dann F auch Mittelpunkt des Kreises CDE ist, sind auch FC und FE gleich.
Dann ist FE gleich FB, das kleinere gleich dem größeren, was nicht möglich ist. Also ist F nicht der gemeinsame Mittelpunkt von ABC und CDE.

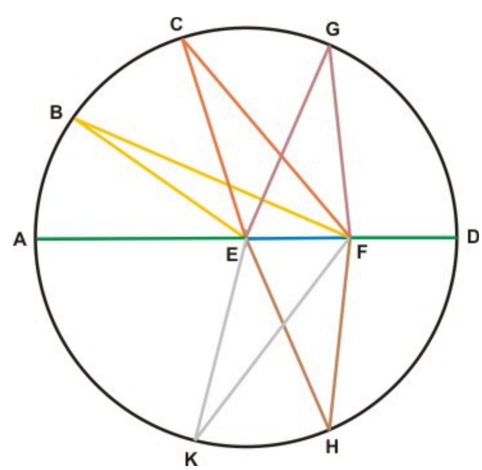
Deshalb haben zwei Kreise, die sich berühren, nicht denselben Mittelpunkt.

III.7.

Unter den Strecken, die von einem, vom Mittelpunkt verschiedenen, Punkt auf dem Durchmesser zu Punkten auf der Kreislinie gezogen sind, ist die Strecke von diesem Punkt durch den Mittelpunkt die größte und der Rest des Durchmessers die kleinste. Unter den anderen Strecken ist diejenige, die der großen Strecke auf dem Durchmesser näher ist, größer als die entferntere und nur jeweils eine Strecke ist unter ihnen, die kürzer als die größte sind, einer anderen gleich.

Wenn vom Punkt F, der nicht der Mittelpunkt ist, auf dem Durchmesser AD des Kreises ABCD die Strecken FB, FC und FG zu Punkten auf der Kreislinie gezogen sind, dann, sage ich, ist FA die größte, FD die kleinste und unter den übrigen ist FB größer als FC und FC größer FG.

Es sind BE, CE und GE zu ziehen.
Da im Dreieck zwei Seiten zusammen größer sind als die dritte, sind EB und EF zusammen größer als BF. AE ist gleich BE, also ist AF größer als BF.
BE und CE sind gleich und bilden mit der gleichen Strecke FE Dreiecke, in denen die zwei Seiten BE und EF gleich den Seiten CE und EF sind, aber der Winkel BEF größer als CEF ist, weshalb BF größer als CF ist.
Aus den gleichen Gründen ist CF größer als GF.



Da GF und FE zusammen größer als EG sind, aber EG gleich ED ist, sind GF und FE zusammen größer als ED. Von beidem das gleiche EF weggenommen, ist GF größer als FD. Also ist FA die größte und FD die kleinste Strecke, auch ist FB größer als FC und FC größer als FG.

Ich sage sodann, es gibt im Kreis ABCD vom Punkt F zu Punkten auf der Kreislinie nur eine Strecke die gleich FG ist.

Es ist im Punkt E auf EF der dem Winkel GEF gleiche Winkel FEH anzulegen und FH zu ziehen. GE und EH sind dann gleich und bilden mit der gleichen Strecke FE Dreiecke, in denen die zwei Seiten GE und EF gleich den Seiten HE und EF und die Winkel GEF und HEF gleich sind. Also ist FG gleich FH.

Ich sage auch, es ist keine andere Strecke, vom Punkt F aus, der FG gleich.
Denn ist es eine andere, dann sei dies FK. Da FK dann gleich FG ist und FH gleich FG, ist FK gleich FH, die nähere gleich der entfernteren, was nicht möglich ist.
Ebenso ist zu zeigen, dass unter den kleineren Strecken keine größere der FG gleich ist als FH.
Also ist unter den Strecken vom Punkt F aus keine andere Strecke der FG gleich, als FH, und diese ist die einzige.

Deshalb ist unter den Strecken, die von einem, vom Mittelpunkt verschiedenen, Punkt auf dem Durchmesser zu Punkten auf der Kreislinie gezogen sind, die Strecke von diesem Punkt durch den Mittelpunkt die größte und der Rest des Durchmessers die kleinste. Unter den anderen Strecken, die kürzer als die größte sind, ist die, der großen Strecke auf dem Durchmesser nähere, größer als die entferntere, und nur jeweils eine Strecke unter ihnen ist einer anderen gleich, was zu zeigen war.

III.8.

Unter den Geraden, die von einem Punkt außerhalb eines Kreises durch den Kreis gelegt werden, ist die Strecke, die die Kreislinie vom Punkt aus von innerhalb des Kreises trifft, auf der am größten, die durch den Mittelpunkt geht, unter den andern ist die Strecke auf der ihr näheren größer und auf der entfernteren kleiner. Die Strecke, die die Kreislinie vom Punkt aus von außen trifft, aber ist auf der Geraden durch den Mittelpunkt am kleinsten und unter den andern ist diese Strecke auf der ihr näheren kleiner und die auf der entfernteren größer, und nur jeweils eine Strecke ist unter ihnen, die größer als die kleinste sind, einer anderen gleich.

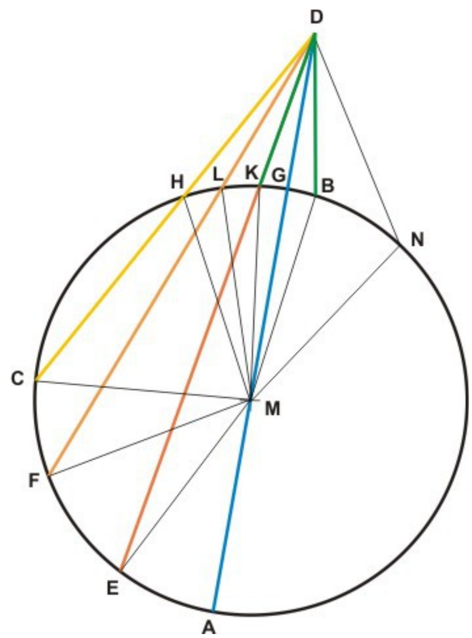
Wenn vom Punkt D außerhalb eines Kreises ABC die Geraden DA, DE, DF, DC durch den Kreis gelegt sind und DA durch den Mittelpunkt geht, dann, sage ich, unter den Strecken zu den Punkten A, E, F und C ist DA die größte und unter den anderen sind diejenigen größer, die DA näher sind, dass also DE größer ist als DF und DF größer als DC, aber unter den Strecken außerhalb des Kreises zu den Punkten G, K, L und H ist DG die kleinste und unter den anderen sind diejenigen kleiner, die DG näher sind und größer diejenigen, die entfernter sind, dass also DK kleiner ist als DL und DL kleiner als DH.

Es sind zunächst vom Mittelpunkt M des Kreises ABC aus die Strecken ME, MF, MC, MG, MK und ML zu ziehen.

Es ist AM gleich EM und, beiden das gleiche MD hinzugefügt, AD gleich EM und MD zusammen. Da EM und MD zusammen größer sind als ED ist AD größer als ED.
ME ist gleich MF und, beiden das gleiche MD hinzugefügt, sind die einen beiden Strecken EM und MD gleich den andern FM und MD; da der Winkel EMD größer ist als FMD, ist ED größer FD.

Auf gleiche Weise ist zu zeigen, dass FD größer als CD ist. Also ist DA die größte Strecke und unter den anderen ist DE größer als DF und DF größer als DC.

Da MK und KD zusammen größer sind als MD, und MG und MK gleich sind, ist, beidem das gleiche MG weggenommen, KD größer als DG, somit ist GD kleiner als KD.
Da die Dreiecke MLD und MKD die Seite MD gemeinsam haben und MK und KD zusammen kleiner sind als ML und LD zusammen, wobei MK gleich ML ist, ist DK kleiner als DL.
Auf gleiche Weise ist zu zeigen, dass DL kleiner ist als DH. Also ist DG die kleinste Strecke und unter den anderen ist DK ist kleiner als DL und DL ist kleiner als DH.



Ich sage auch, vom Punkt D zu einem Punkt auf der Kreislinie gezogen, ist nur jeweils eine Strecke einer anderen, die größer als DG ist, gleich.

Wird an MD im Punkt M der dem Winkel KMD gleiche Winkel DMB angelegt und DB gezogen, dann ist MK gleich MB. Mit der gemeinsamen Seite MD sind die beiden Seiten KM und MD gleich den beiden Seiten BM und MD. Da die Winkel KMD und DMB gleich sind, sind auch KD und DB gleich.

Ich sage sodann, keine andere Strecke von D zu einem Punkt auf der Kreislinie ist gleich DK.

Denn ist es eine andere, dann sei DN diese Strecke.
Da dann DK gleich DN ist und DK gleich DB, ist DB gleich DN, die nähere zu DH gleich der entfernteren, was nicht möglich ist.
Also ist keine andere Strecke vom Punkt D zu einem Punkt auf der Kreislinie ABC gleich DK.

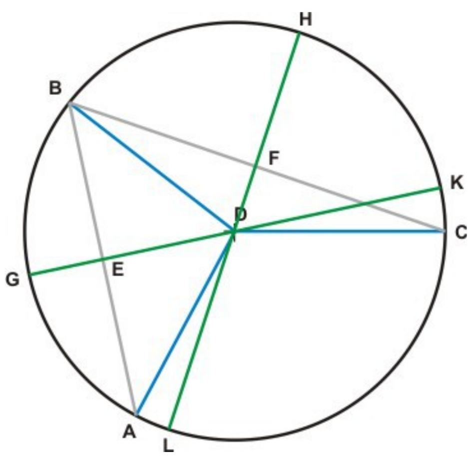
Deshalb ist unter den Geraden, die von einem Punkt außerhalb eines Kreises durch den Kreis gelegt werden, die Strecke, die die Kreislinie vom Punkt aus von innen trifft, auf der am größten, die durch den Mittelpunkt geht, unter den andern ist diese Strecke auf der, der größten, näheren größer und auf der entfernteren kleiner. Die Strecke, die die Kreislinie vom Punkt aus von außen trifft, aber ist auf der Geraden durch den Mittelpunkt am kleinsten und unter den andern ist diese Strecke auf der ihr näheren kleiner und die auf der entfernteren größer, und nur jeweils eine Strecke ist unter ihnen, die größer als die kleinste sind, einer anderen gleich, was zu zeigen war.

III.9.

Gehen von einem Punkt innerhalb eines Kreises mehr als zwei gleiche Strecken zu Punkten auf der Kreislinie, dann ist dieser Punkt der Mittelpunkt.

Wenn von einem Punkt D im Kreis ABC mehr als zwei gleiche Strecken, nämlich DA, DB und DC, zu den Punkten A, B und C auf der Kreislinie gehen, dann, sage ich, ist D der Mittelpunkt des Kreises ABC.

Es sind die Strecken AB und BC zu ziehen und in zwei gleiche Teile in den Punkten E und F zu teilen, sodann durch E, D und F, D die Geraden KG und HL zu legen.



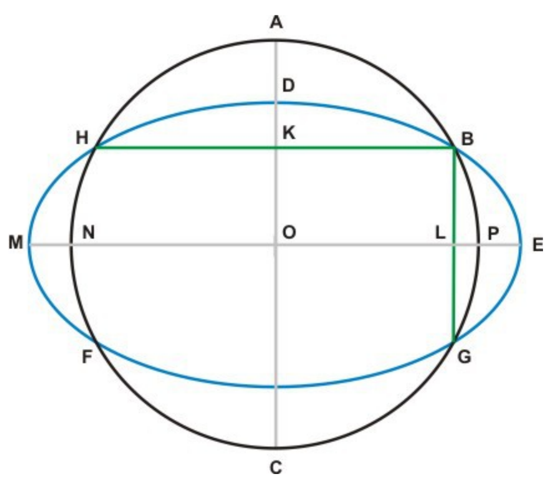
Da AE und EB gleich sind und an der gleichen Strecke ED liegen, sind die Seiten AE und ED gleich den BE und ED. Da DA gleich DB ist, sind die Winkel AED und BED gleich und damit rechte Winkel. Also teilt GK die Strecke AB rechtwinklig in zwei gleiche Teile. Auf der Strecke, die eine andere im Kreis rechtwinklig in zwei gleiche Teile teilt, liegt der Mittelpunkt, somit auf GK. Auf gleiche Weise ist zu zeigen, dass der Mittelpunkt des Kreises ABC auch auf HL liegt. Da GK und HL keinen anderen Punkt gemeinsam haben als D, ist D der Mittelpunkt des Kreises ABC.

Deshalb ist der Punkt, von dem aus im Kreis mehr als zwei gleiche Strecken zu Punkten auf der Kreislinie gehen, der Mittelpunkt des Kreises, was zu zeigen war.

III.10.

Ein Kreis schneidet einen anderen in nicht mehr als zwei Punkten.

Wenn andernfalls der Kreis ABC den Kreis DEF in mehr als zwei Punkten, nämlich in B, G, F und H schneidet, dann sind BH und BG zu ziehen und in K und L in zwei gleiche Teile zu teilen, auf BH und BG in K und L die Senkrechten KC und LM zu errichten, die in A und E die Kreise schneiden.



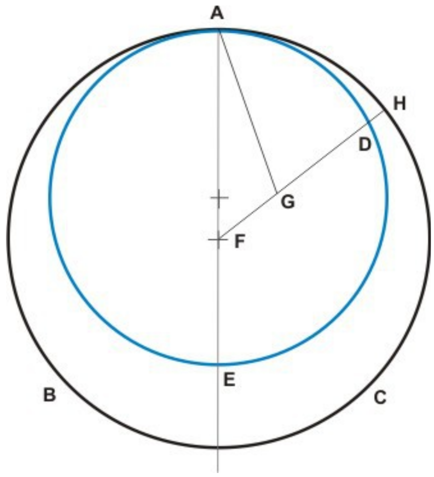
Da im Kreis ABC die BH von AC rechtwinklig in zwei gleiche Teile geteilt wird, liegt der Mittelpunkt auf AC. Da im Kreis ABC auch die BG von NP rechtwinklig in zwei gleiche Teile geteilt wird, liegt der Mittelpunkt auch auf NP. Da AC und NP keinen anderen Punkt gemeinsam haben als O, ist O dann der Mittelpunkt des Kreises ABC. Auf gleiche Weise kann gezeigt werden, dass O dann auch Mittelpunkt des Kreises DEF ist. Die sich schneidenden Kreise ABC und DEF haben dann den gemeinsamen Mittelpunkt O, was nicht möglich ist.

Deshalb schneidet ein Kreis einen anderen in nicht mehr als zwei Punkten, was zu zeigen war.

III.11.

Berühren sich zwei Kreise von innen, dann geht die Gerade durch die beiden Mittelpunkte durch den Berührpunkt.

Wenn sich zwei Kreise ABC und ADE sich von innen im Punkt A berühren, wobei ABC den Mittelpunkt F und ADE den Mittelpunkt G hat, dann, sage ich, geht die Gerade durch G und F auch durch den Berührpunkt A.



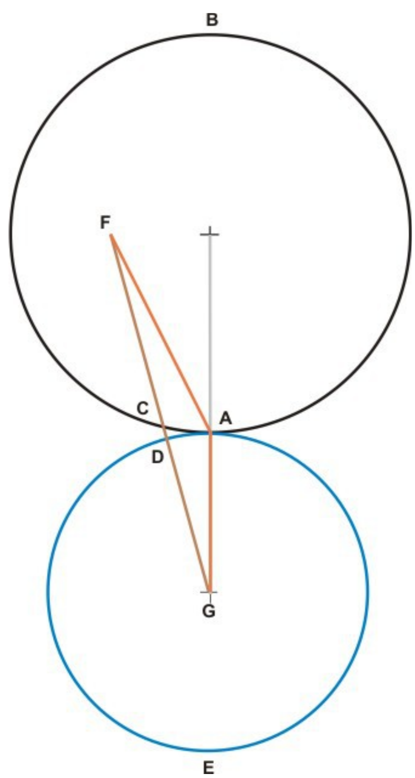
Denn geht sie nicht durch A, sondern durch einen davon verschiedenen Punkt H, dann kann FGH, sowie AF und AG gezogen werden.
Im Kreis ABC ist dann FA gleich FH. Da AG und GF zusammen größer als FA sind, sind dann AG und FG zusammen auch größer als FH.
Beidem das gleiche FG weggenommen, ist dann AG größer als GH. Im Kreis ABC ist AG gleich GD, also ist dann GD größer als GH, die kleinere größer als die größere, was nicht möglich ist.
Also geht die Gerade durch F und G durch keinen anderen Punkt als A, in dem sich die Kreise berühren.

Deshalb geht die Gerade durch die Mittelpunkte zweier Kreise, die sich von innen berühren, durch den Berührpunkt, was zu zeigen war.

III.12.

Berühren sich zwei Kreise von außen, dann geht die Gerade durch die beiden Mittelpunkte durch den Berührpunkt.

Wenn sich zwei Kreise ABC und ADE von außen im Punkt A berühren, wobei ABC den Mittelpunkt F und ADE den Mittelpunkt G hat, dann, sage ich, geht die Gerade durch F und G auch durch A.



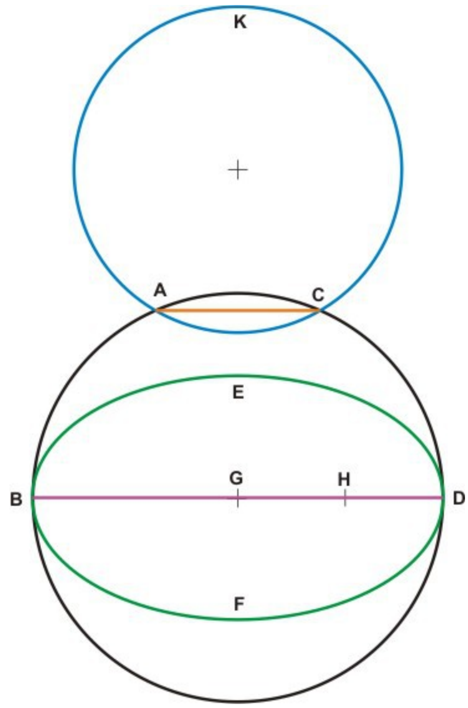
Denn geht sie nicht durch A, dann durch F, C, D und G.
Da F der Mittelpunkt des Kreises ABC ist, ist dann AF gleich FC. Da G der Mittelpunkt des Kreises ADE ist, ist dann AG gleich GD.
Also sind dann FA und AG zusammen gleich FC und DG zusammen. Da dann FC und DG zusammen kleiner als FG sind, sind dann auch FA und AG zusammen kleiner als FG, was aber, da FA und AG im Dreieck zusammen größer als FG sind, nicht möglich ist.
Also geht die Gerade durch F und G durch keinen von A verschiedenen Punkt. Also geht sie durch A.

Deshalb geht die Gerade durch die Mittelpunkte zweier Kreise, die sich von außen berühren, durch den Berührpunkt, was zu zeigen war.

III.13.

Kreise berühren sich in nicht mehr als einem Punkt, ob von innen oder von außen.

Wenn der Kreis ABCD den Kreis EBFD von innen nicht nur im Punkt D, sondern auch im Punkt B berührt und der Kreis ABCD den Mittelpunkt G und der Kreis EBFD den Mittelpunkt H hat, dann geht die Gerade durch G und H auch durch den Berührpunkt B, aber auch durch D.
Da G der Mittelpunkt des Kreises ABCD ist, ist BG gleich GD, deshalb ist BG größer als HD und noch mehr BH größer als HD. Da aber H der Mittelpunkt des Kreises EBFD ist, ist BH gleich HD, was nicht möglich ist.
Also berühren sich Kreise von innen nicht in mehr als einem Punkt.



Ich sage dann, Kreise berühren sich von außen in nicht mehr als einem Punkt.
Wenn andernfalls der Kreis ACK den Kreis ABCD von außen im Punkt A, aber auch in C berührt, dann ist die Gerade AC zu ziehen.
Da A und C Punkte auf der Kreislinie ABCD sind, liegen Punkte auf AC innerhalb des Kreises ABCD und außerhalb des Kreises ACK. Da A und C aber auch Punkte auf der Kreislinie ACK sind, liegen Punkte auf AC innerhalb des Kreises ACK und außerhalb des Kreises ABCD, was dem widerspricht.
Also berühren sich Kreise von außen nicht in mehr als einem Punkt.

Deshalb berühren sich Kreise nicht in mehr als einem Punkt, ob von innen oder von außen, was zu zeigen war.

III.14.

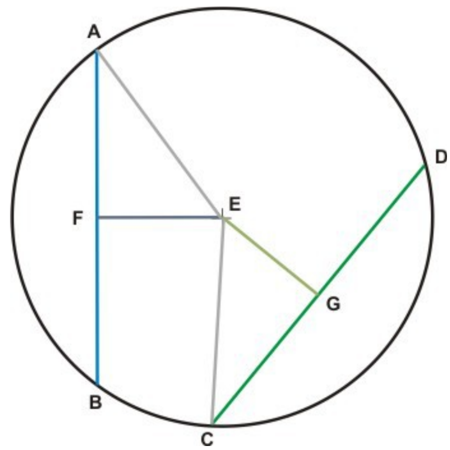
Gleiche Sehnen sind vom Mittelpunkt gleich weit entfernt und vom Mittelpunkt gleich weit entfernte Sehnen sind gleich.

Wenn im Kreis ABCD die Sehnen AB und CD gleich sind, dann, sage ich, sind AB und CD gleich weit vom Mittelpunkt des Kreises entfernt.

Denn ist E der Mittelpunkt des Kreises ABCD und werden von E die Senkrechten EF und EG auf AB und CD errichtet, dann sind AE und EC zu ziehen.

Da EF durch den Mittelpunkt geht und auf AB, die nicht durch den Mittelpunkt geht, mit rechten Winkeln steht, wird AB in F in zwei gleiche Teile geteilt und es ist AF gleich FB. Also ist AB gleich der doppelten AF. Aus den gleichen Gründen ist CD gleich der doppelten CG. Es ist AB gleich CD und damit AF gleich CG.
Da AE gleich EC, ist auch das Quadrat über AE gleich dem Quadrat über EC. Da AFE ein rechter Winkel ist, sind die Quadrate über AF und FE zusammen gleich dem Quadrat über AE. Ebenso sind, da CGE ein rechter Winkel ist, die Quadrate über EG und GC zusammen gleich dem Quadrat über EC.
Also sind die Quadrate über AF und FE zusammen gleich den Quadraten über EG und GC zusammen.

Da AF gleich CG, ist das Quadrat über AF gleich dem Quadrat über CG. Also ist das Quadrat über FE gleich dem Quadrat über EG und damit auch FE gleich EG.
Sind die auf zwei Sehnen errichteten Senkrechten durch den Mittelpunkt gleich, dann sind die Sehnen gleich weit vom Mittelpunkt entfernt, somit sind AB und CD gleich weit vom Mittelpunkt entfernt.



Sind nun AB und CD gleich weit vom Mittelpunkt entfernt, sind also EF und EG gleich, dann, sage ich, ist AB gleich CD.
Wie bereits gezeigt, ist AB gleich der doppelten AF und CD gleich der doppelten CG.
Da AE und CE gleich sind, sind auch die Quadrate über AE und CE gleich.
Es sind die Quadrate über EF und FA zusammen gleich dem Quadrat über AE, auch sind die Quadrate über EG und GC zusammen gleich dem Quadrat über EC.
Also sind die Quadrate über EF und FA zusammen gleich den Quadraten über EG und GC zusammen.
Da das Quadrat über EF gleich dem über EG ist, ist auch EF gleich EG. Ebenso ist auch das Quadrat über AF gleich dem über CG und somit AF gleich CG.
Weil AB gleich dem doppelten AF ist und CD gleich dem doppelten CG, ist AB gleich CD.

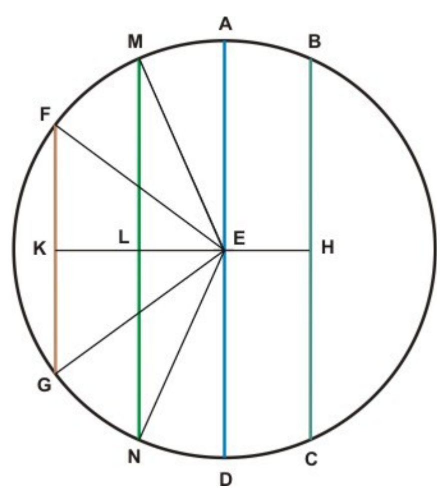
Deshalb sind gleiche Sehnen gleich weit vom Mittelpunkt entfernt und sind Sehnen gleich, die gleich weit vom Mittelpunkt entfernt sind, was zu zeigen war.

III.15.

Unter den Strecken im Kreis ist der Durchmesser die größte und unter den Sehnen ist diejenige, die dem Mittelpunkt näher ist, größer als die entferntere.

Wenn im Kreis ABCD mit dem Mittelpunkt E und dem Durchmesser AD die Sehne BC näher dem Mittelpunkt liegt als die entferntere FG, dann, sage ich, ist AD die größte Strecke im Kreis und BC größer als FG.

Es sind vom Mittelpunkt E auf BC und FG die senkrechten EH und EK zu errichten.
Da BC näher am Mittelpunkt liegt als FG, ist EK größer als EH.



Wird auf KE im Punkt L, so dass EL gleich EH ist, die Senkrechte LM errichtet und bis N verlängert, dann sind ME, EN, FE und EG zu ziehen.
Da EH gleich EL ist, ist BC gleich MN.

Da die Radien AE und EM, sowie ED und EN gleich sind, ist AD gleich ME und EN zusammen.
ME und EN zusammen sind größer als MN, wobei MN gleich BC ist, also ist AD größer als BC.

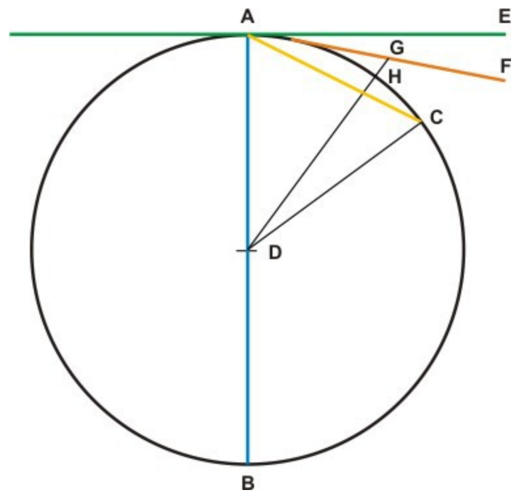
Da die Seiten ME und EN den Seiten FE und EG gleich sind, ist der Winkel MEN größer als FEG und damit ist MN größer als FG. MN ist gleich BC, somit ist BC größer als FG. AD aber ist die größte Strecke.

Deshalb ist der Durchmesser im Kreis die größte Strecke und ist unter den Sehnen diejenige, die dem Mittelpunkt näher ist, größer als die entferntere, was zu zeigen war.

III.16.

Die am Endpunkt eines Durchmessers errichtete Senkrechte fällt außerhalb des Kreises; es kann zwischen ihr und dem Kreis keine Gerade außerhalb des Kreises gezogen werden; der Winkel zwischen Kreislinie und Durchmesser ist größer und der Winkel zwischen Kreislinie und Senkrechter kleiner als jeder spitze Winkel.

Hat der Kreis ABC mit Mittelpunkt D den Durchmesser AB, dann, sage ich, fällt die im Punkt A auf AB errichtete Senkrechte AE außerhalb des Kreises.



Denn sollte es möglich sein, dass sie in den Kreis fällt wie AC, dann kann DC gezogen werden.
Da dann DA gleich DC ist, sind auch die Winkel DAC und ACD gleich. Da DAC ein rechter Winkel ist, ist dann auch ACD ein rechter Winkel.
Das Dreieck ACD hat dann zwei rechte Winkel, was nicht möglich ist. Also fällt die im Punkt A auf AB errichtete Senkrechte nicht in den Kreis.

Zwischen AE und den Kreisbogen CHA, sage ich, kann keine Gerade außerhalb des Kreises gezogen werden.

Denn sollte dies möglich sein, dann ist FA und im Punkt D die zu FA senkrechte DG zu ziehen.
Da der Winkel AGD ein rechter ist, ist DAG kleiner als ein rechter und AD größer als DG. DA ist gleich DH, also ist DH größer als DG, die kleinere größer als die größere, was nicht möglich ist. Also kann zwischen Senkrechte und Kreisbogen keine andere Gerade außerhalb des Kreises gezogen werden.

Ich sage nun, der Winkel zwischen Kreisbogen CHA und Durchmesser BA ist größer als jeder spitze Winkel und der Winkel zwischen Kreisbogen und der Senkrechten AE kleiner.
Denn gibt es einen gradlinigen Winkel größer als der zwischen BA und dem Kreisbogen CHA und kleiner als der Winkel zwischen dem Kreisbogen CHA und der Geraden AE, dann fällt eine Gerade, die solche Winkel mit dem Kreisbogen CHA einschließt, zwischen die Senkrechte AE und den Kreisbogen CHA, was nicht möglich ist.
Also ist kein spitzer Winkel größer als der zwischen der Geraden BA und dem Kreisbogen CHA und keiner kleiner als der zwischen CHA und der Geraden AE.
Was zu zeigen war.

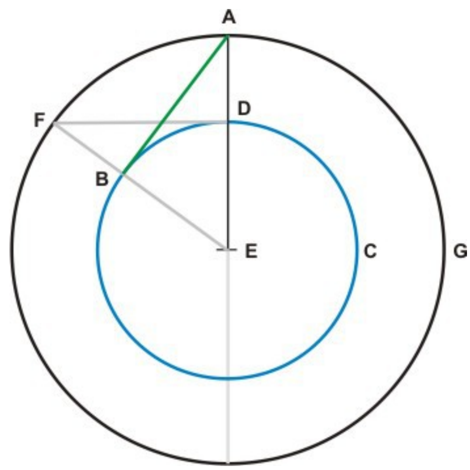
Zusatz: **Offensichtlich ist die Senkrechte im Endpunkt des Durchmessers eine Tangente, diese berührt den Kreis in nicht mehr als einem Punkt.**

III.17.

An einen Kreis von einem gegebenen Punkt aus die Tangente anlegen.

Es seien der Punkt A und der Kreis BCD gegeben; es soll die Tangente vom Punkt A aus an den Kreis BCD gelegt werden.

Wird durch den Mittelpunkt E des Kreises BCD und den Punkt A die Gerade EA gelegt, mit dem Radius EA um E der Kreis AFG geschlagen, im Punkt D auf AE die Senkrechte DF errichtet und werden EF und AB gezogen, dann, sage ich, ist vom Punkt A aus die Tangente AB an den Kreis BCD gelegt.



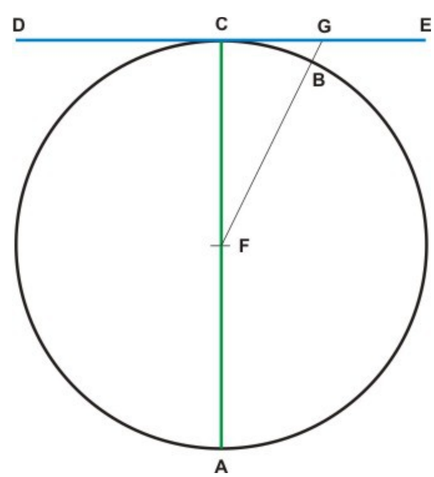
Da E der Mittelpunkt der Kreise BCD und AFG ist, sind EA und AF gleich und ist ebenso ED gleich EB. Deshalb sind die beiden Strecken AE und EB gleich
den beiden Strecken FE und ED, die den gleichen Winkel BED einschließen
Also sind DF und AB gleich und ebenso die restlichen Winkel der Dreiecke DEF und EBA.
Der Winkel EDF ist damit gleich EBA.
EDF ist ein rechter Winkel, somit auch EBA.
EB ist der Radius des Kreises und da die am Endpunkt des Durchmessers errichtete Senkrechte eine an den Kreis angelegte Tangente ist, ist AB die an den Kreis BCD angelegte Tangente.

Damit ist vom Punkt A aus die Tangente AB an den Kreis BCD gelegt, was auszuführen war.

III.18.

Die durch den Berührpunkt einer Tangenten und den Mittelpunkt gelegte Gerade steht senkrecht auf der Tangenten.

Wenn die Tangente DE im Punkt C an den Kreis ABC mit dem Mittelpunkt F gelegt und eine Gerade durch F und C gezogen ist, dann, sage ich, steht FC senkrecht auf DE.



Denn wenn nicht, ist vom Punkt F auf DE die Senkrechte FG zu errichten.

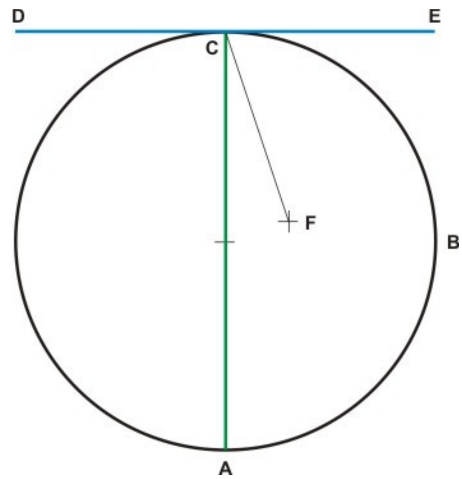
Da FGC dann ein rechter Winkel ist, ist FCG dann ein spitzer Winkel. Dem größeren Winkel liegt die größere Seite gegenüber, womit FC dann größer als FG ist.
Da FC gleich FB, ist dann FB größer als FG, die kleinere größer als die größere, was nicht möglich ist.
Also ist FG keine Gerade, die auf DE senkrecht steht, und, wie auf gleiche Weise gezeigt werden kann, ist dies auch keine andere als FC.
Also steht FC senkrecht auf DE.

Deshalb steht die durch den Berührpunkt einer Tangenten und den Mittelpunkt gelegte Gerade senkrecht auf der Tangenten, was zu zeigen war.

III.19.

Auf der Senkrechten, die am Berührpunkt einer Tangenten auf ihr errichtet ist, liegt der Mittelpunkt des Kreises.

Wenn die Tangente DE im Punkt C an den Kreis ABC gelegt ist und in C auf DE die Senkrechte CA errichtet ist, dann, sage ich, liegt auf ihr der Mittelpunkt des Kreises.



Denn liegt er da nicht, sondern auf einem anderen Punkt F, dann kann CF gezogen werden.
Da im Kreis ABC die Gerade DE mit der Geraden durch Berührpunkt und Mittelpunkt FC einen rechten Winkel bildet, steht dann FC senkrecht auf DE. Also ist dann der Winkel FCE ein rechter Winkel, damit auch ACE.
Der Winkel FCE ist dann gleich ACE, der kleinere gleich dem größeren, was nicht möglich ist.
Damit liegt der Mittelpunkt des Kreises nicht auf F.
Für andere Gerade als AC ist ebenso zu zeigen, dass der Mittelpunkt des Kreises nicht auf ihnen liegt.
Also liegt der Mittelpunkt des Kreises auf AC.

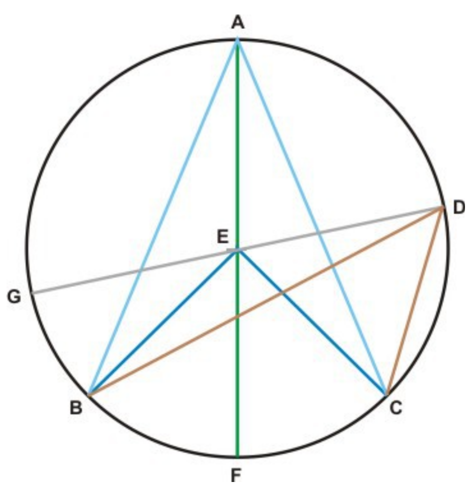
Deshalb liegt auf der Senkrechten, die am Berührpunkt einer Tangenten auf ihr errichtet ist, der Mittelpunkt des Kreises, was zu zeigen war.

III.20.

Der Winkel im Mittelpunkt über einem Kreisbogen ist das Doppelte des Winkels in einem Punkt auf der Kreislinie.

Wenn im Kreis ABC im Mittelpunkt der Winkel BEC und in einem Punkt auf der Kreislinie der Winkel BAC über dem gleichen Kreisbogen stehen, dann, sage ich, ist BEC gleich dem doppelten BAC.

Denn wird der Radius EA bis F verlängert, dann ist EA gleich EF, somit ist der Winkel EAB gleich EBA und deshalb die Winkel EAB und EBA zusammen gleich dem doppelten EAB.
Da am Dreieck EAB der äußere Winkel gleich den beiden innen gegenüber liegenden Winkeln zusammen ist, ist der Winkel BEF gleich den Winkeln EAB und EBA zusammen. Also ist der Winkel BEF gleich dem doppelten EAB. Aus den gleichen Gründen ist der Winkel FEC gleich dem doppelten EAC und ist BEC gleich dem doppelten BAC.



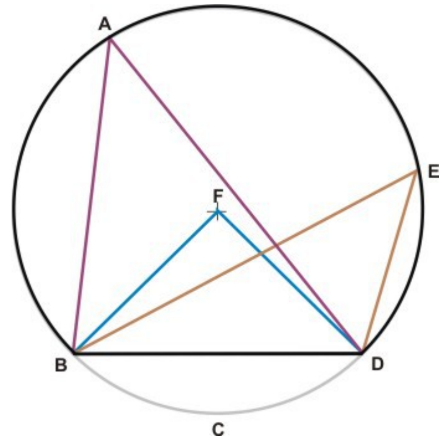
Wird nun der Winkel BDC am Punkt D der Kreislinie angelegt und DE bis G verlängert, dann ist ebenso zu zeigen, dass der Winkel GEC gleich dem doppelten GDC ist. Also ist dann der Winkel GEB gleich dem doppelten GDB und damit ist BEC gleich dem doppelten BDC.

Deshalb ist der Winkel im Mittelpunkt über einem Kreisbogen gleich dem doppelten Winkel in einem Punkt auf der Kreislinie, was zu zeigen war.

III.21.

Die Winkel des gleichen Kreisabschnitts sind gleich.

Wenn im Kreis ABCD die Winkel BAD und BED Winkel des Kreisabschnitts BAED sind, dann, sage ich, sind BAD und BED gleich.



Denn ist F der Mittelpunkt des Kreises ABCD, dann kann BF und FD gezogen werden.
Da die Schenkel der Winkel BFD und BAD auf dem gleichen Kreisbogen BCD stehen, ist der Winkel BFD gleich dem doppelten BAD. Aus dem gleichen Grund ist BFD gleich dem doppelten BED. Also ist BAD gleich BED.

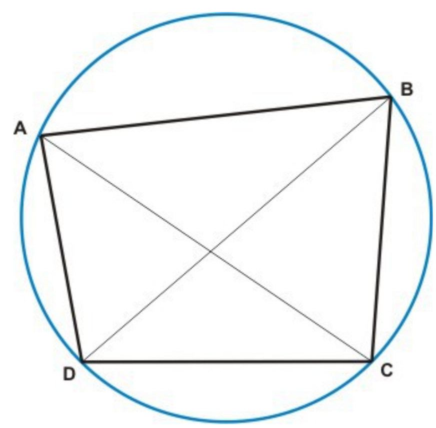
Deshalb sind die Winkel des gleichen Kreisabschnitts gleich, was zu zeigen war.

III.22.

Im Viereck aus Sehnen sind gegenüber liegende Winkel gleich zwei rechten Winkeln.

Wenn dem Kreis ABCD ein Sehnenviereck ABCD eingeschrieben ist, dann, sage ich, sind gegenüber liegende Winkel gleich zwei rechten Winkeln.

Es ist AC und BD zu ziehen. Da im Dreieck die drei Winkel gleich zwei rechten sind, sind die Winkel CAB, ABC und BCA zusammen gleich zwei rechten.



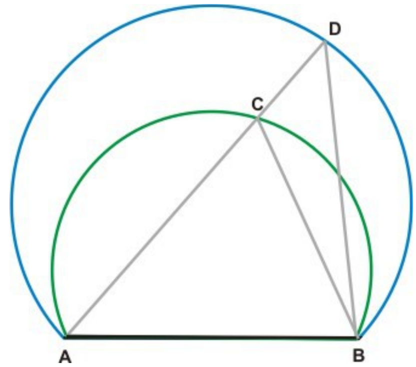
Da CAB und BDC Winkel im selben Kreisabschnitt BADC sind, sind sie gleich.
Da ACB und ADB Winkel im selben Kreisabschnitt ADCB sind, sind auch sie gleich.
ADC ist somit gleich den Winkeln BAC und ACB zusammen. Zu beidem der gleiche Winkel ABC hinzugenommen, sind die Winkel ABC, BAC und ACB zusammen gleich ABC und ADC zusammen.
Da ABC, BAC und ACB zusammen gleich zwei rechten Winkeln sind, sind auch ABC und ADC zusammen gleich zwei rechten.
Ebenso ist zu zeigen, dass BAD und DCB zusammen gleich zwei rechten Winkeln sind.

Deshalb sind im Viereck aus Sehnen gegenüber liegende Winkel gleich zwei rechten, was zu zeigen war.

III.23.

Über derselben Strecke können ähnliche, aber ungleiche Kreisbögen nicht errichtet sein.

Wenn aber doch, dann seien über der Strecke AB zwei Kreisbögen ACB und ADB geschlagen und die Geraden ACD, sowie CB und BD gezogen.



Da die Kreisbögen ACB und ADB ähnlich sind, sind die Kreisabschnitte ACB und ADB ähnlich, also sind die Winkel ACB und ADB gleich, der dem Kreisbogen ACB innere gleich dem ihm äußeren, was nicht möglich ist.

Deshalb können über derselben Strecke ähnliche, aber ungleiche Kreisbögen nicht errichtet sein, was zu zeigen war.

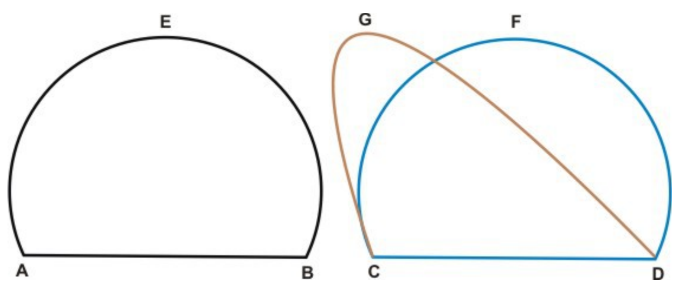
III.24.

Ähnliche Kreisabschnitte mit gleichen Grundseiten sind gleich.

Wenn auf gleichen Grundseiten AB und CD ähnliche Kreisabschnitte AEB und CFD errichtet sind, dann, sage ich, ist der Kreisabschnitt AEB gleich CFD.

Wie wenn die Kreisabschnitte AEB und CFD übereinander gelegt würden, sieht man, dass wenn der Punkt A mit C und die Strecke AB mit CD übereinstimmt, dann auch der Punkt B mit D übereinstimmt.
Es stimmt aber dann auch der Kreisbogen AEB mit dem Kreisbogen CFD überein.

Denn wenn nicht, liegt der Kreisbogen CFD dann ganz oder teilweise innerhalb oder außerhalb von AEB. Liegt der Kreisbogen CFD ganz innerhalb oder außerhalb AEB, können, da sie ähnlich sind, die Kreisabschnitte AEB und CFD, somit die Grundseiten AB und CD nicht gleich sein. Da AB gleich CD ist, liegt der Kreisbogen CFD nicht innerhalb oder außerhalb von AEB.



Liegt der Kreisbogen CFD teilweise innerhalb und teilweise außerhalb von AEB, wie in CGD, dann schneiden sich die Kreise in mehr als zwei Punkten, was nicht möglich ist.
Stimmen also die Grundseiten AB und CD überein, dann stimmen auch die Kreisbögen AEB und CFD über. Da sie übereinstimmen, sind sie auch gleich.

Deshalb sind ähnliche Kreisabschnitte über gleichen Grundseiten gleich, was zu zeigen war.

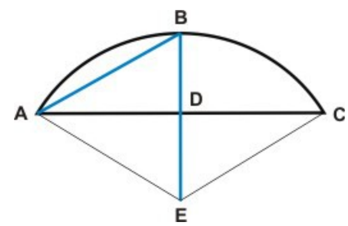
III.25.

Einen Kreisabschnitt zu dem Kreis ergänzen, von dem er Abschnitt ist.

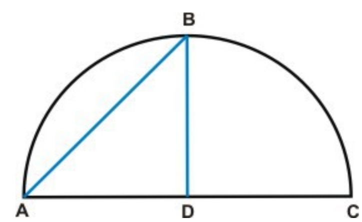
Der Kreisabschnitt ABC soll zu dem Kreis ergänzt werden, von dem er Abschnitt ist.

Es ist die Strecke AC in D in zwei gleiche Teile zu teilen und im Punkt D die zu AC senkrechte DB zu errichten, sodann die Gerade AB zu ziehen. Es ist dann der Winkel ABD größer, gleich oder kleiner als der Winkel BAD.

Ist er größer, dann ist an BA im Punkt A der dem Winkel ABD gleiche Winkel BAE anzulegen, DB bis E zu verlängern und EC zu ziehen.
Da der Winkel ABE gleich BAE ist, sind EB und EA gleich.
Da AD und DE gleich sind und an der gleichen Strecke DE liegen, sind die beiden Strecken AD und DE gleich den beiden Strecken CD und DE. Somit ist der Winkel ADE gleich CDE, die deshalb rechte Winkel sind.
Es ist AE gleich BE und BE gleich CE und damit sind die Strecken AE, EB, und EC gleich.
Somit ist E der Mittelpunkt des Kreises und AE, EB und EC sind Radien. Es ist somit der Kreis um E zu schlagen.
Offensichtlich ist der Kreisabschnitt ABC dabei kleiner als ein Halbkreis, da der Mittelpunkt E außerhalb des Kreisabschnitts ABC liegt.

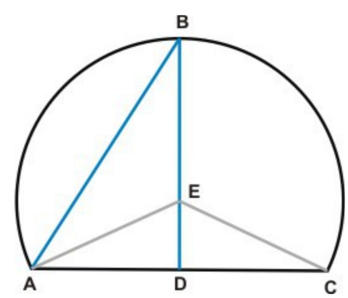


Ist nun der Winkel ABD gleich BAD und sind die drei Strecken DA, DB und DC gleich, dann ist D Mittelpunkt des Kreises und ABC ein Halbkreis.



Ist der Winkel ADB kleiner als BAD, dann ist an BA im Punkt A der dem Winkel ABD gleiche Winkel BAE anzulegen und EC zu ziehen. Da dann AE, EB und EC gleich sind, ist E Mittelpunkt des Kreises und der Kreisabschnitt ABC größer als ein Halbkreis.

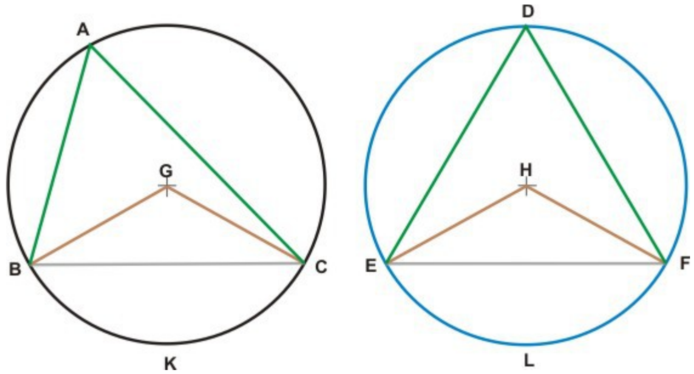
Damit ist der gegebene Kreisabschnitt zu dem Kreis ergänzt, von dem er Abschnitt ist, was aufgegeben war.



III.26.

In gleichen Kreisen stehen gleiche Winkel am Mittelpunkt und gleiche Winkel an Punkten der Kreislinie auf gleichen Kreisbögen.

Wenn in den gleichen Kreisen ABC und DEF die Winkel BGC und EHF an den Mittelpunkten oder die Winkel BAC und EDF an Punkten der Kreislinie gleich sind, dann, sage ich, sind die Kreisbögen BKC und ELF gleich.



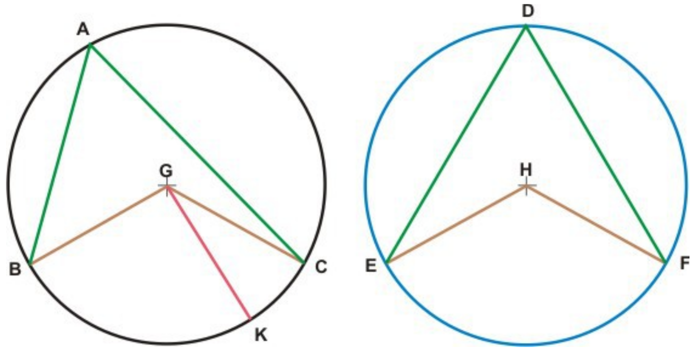
Denn werden BC und EF gezogen, dann sind sie Sehnen in gleichen Kreisen. Die Strecken BG und GC sind den Strecken EH und HF gleich, so wie ihr Winkel an G dem an H gleich ist. Deshalb sind BC und EF gleich. Da damit auch der Winkel an A dem an D gleich ist, sind die Kreisabschnitte BAC und EDF ähnlich und haben gleiche Grundseiten. Es sind ähnliche Kreisabschnitte mit gleichen Grundseiten gleich, damit auch die Kreisabschnitte BAC und EDF. Da der Kreis ABC gleich dem Kreis DEF ist, sind auch die verbleibenden Kreisbögen BKC und ELF gleich.

Deshalb stehen in gleichen Kreisen gleiche Winkel am Mittelpunkt und gleiche Winkel an Punkten der Kreislinie auf gleichen Kreisbögen, was zu zeigen war.

III.27.

In gleichen Kreisen sind die auf gleichen Kreisbögen stehenden Winkel gleich, die im Mittelpunkt und die an Punkten der Kreislinie.

Wenn in den gleichen Kreisen ABC und DEF auf gleichen Kreisbögen BC und EF die Winkel BGC und EHF an den Mittelpunkten G und H errichtet sind, so wie die Winkel BAC und EDF an Punkten der Kreislinie, dann, sage ich, ist der Winkel BAC gleich dem Winkel EDF.



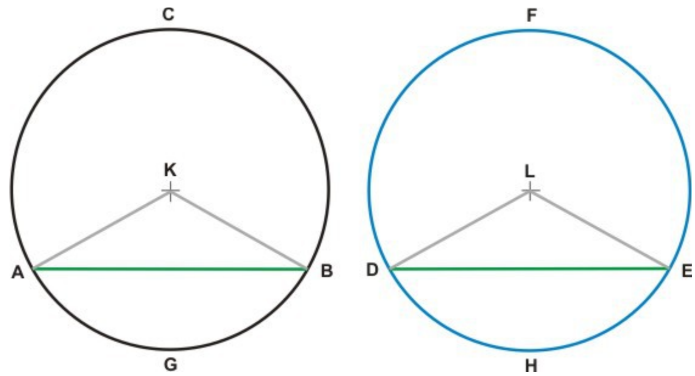
Denn wenn die Winkel BGC und EHF nicht gleich sind, dann ist einer größer. Ist dies BGC, dann ist auf BG im Punkt G der dem Winkel EHF gleiche Winkel BGK anzulegen. Gleiche Winkel am Mittelpunkt stehen auf gleichen Kreisbögen, also sind dann die Kreisbögen BK und EF gleich.
Da die Kreisbögen EF und BC gleich sind, sind dann auch die Kreisbögen BK und BC gleich, der kleinere gleich dem größeren, was nicht möglich ist. Da nicht ungleich, sind die Winkel BGC und EHF gleich. Der Winkel im Punkt A, wie der Mittelpunktswinkel BGC, der Winkel im Punkt D, wie der Mittelpunktswinkel EHF stehen über gleichen Kreisbögen. Also sind die Winkel in den Punkten A und D gleich.

Deshalb sind die in gleichen Kreisen auf gleichen Kreisbögen stehenden Winkel gleich, die im Mittelpunkt und die an Punkten der Kreislinie, was zu zeigen war.

III.28.

In gleichen Kreisen schneiden gleiche Sehnen gleiche Kreisbögen ab, und es ist der größere dem größeren und der kleinere dem kleineren gleich.

Wenn in den gleichen Kreisen ABC und DEF die Sehnen AB und DE die größeren Kreisbögen ACB und DFE und die kleineren Kreisbögen AGB und DHE abschneiden, dann, sage ich, ist ACB gleich DFE und AGB gleich DHE.



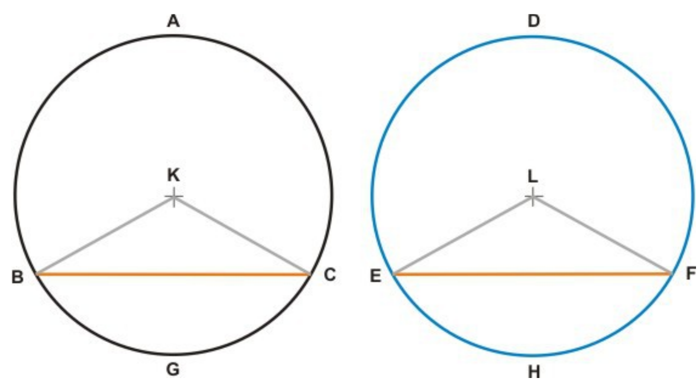
Es sind von den Mittelpunkten K und L aus die Strecken AK, KB, DL und LE zu ziehen, die Radien gleicher Kreise und damit gleich sind.
Die beiden Strecken AK und KB sind gleich den beiden Strecken DL und LE und da AB gleich DE ist, sind auch die Winkel AKB und DLE gleich.
Gleiche Mittelpunktswinkel stehen auf gleichen Kreisbögen, also sind die Kreisbögen AGB und DHE gleich. Da die Kreise ABC und DEF gleich sind, sind auch die verbleibenden Kreisbögen ACB und DFE gleich.

Deshalb schneiden in gleichen Kreisen gleiche Sehnen gleiche Kreisbögen ab, der größere gleich dem größeren und der kleinere gleich dem kleineren, was zu zeigen war.

III.29.

Die Strecken zwischen den Endpunkten gleicher Kreisbögen sind in gleichen Kreisen gleich.

Wenn in den gleichen Kreisen ABC und DEF die gleichen Kreisbögen BGC und EHF abgeteilt und die Sehnen BC und EF gezogen sind, dann, sage ich, sind BC und EF gleich.



Denn sind K und L die Mittelpunkte der Kreise und werden BK, KC, EL und LF gezogen, dann sind, da die Kreisbögen BGC und EHF gleich sind, die Mittelpunktswinkel BKC und ELF gleich.
Da die Kreise und ihre Radien gleich sind, sind die beiden Strecken BK und KC gleich den beiden Strecken EL und LF und sind die von ihnen eingeschlossenen Winkel gleich. Damit sind auch BC und EF gleich.

Deshalb sind die Strecken zwischen den Endpunkten gleicher Kreisbögen in gleichen Kreisen gleich, was zu zeigen war.

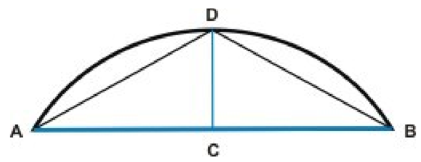
III.30.

Einen Kreisbogen in zwei gleiche Teile teilen.

Es ist der Kreisbogen ADB gegeben. ADB soll in zwei gleiche Teile geteilt werden.

Es ist die Strecke AB zu ziehen, AB in C in zwei gleiche Teile zu teilen, in C die zu AB senkrechte CD zu errichten und AD und DB zu ziehen.

Da AC und CB gleich sind und an der gleichen Strecke CD liegen, sind die beiden Strecken AC und CD gleich den beiden Strecken BC und CD und sind die von ihnen eingeschlossenen Winkel ACD und BCD gleich.
Damit sind auch die übrigen Seiten AD und DB gleich.
Da gleiche Sehnen in gleichen Kreisen gleiche Kreisbögen abschneiden, dabei der größere gleich dem größeren und der kleinere gleich dem kleineren ist, und die Kreisbögen AD und DB kleiner als Halbkreisbögen sind,
sind AD und DB gleich.



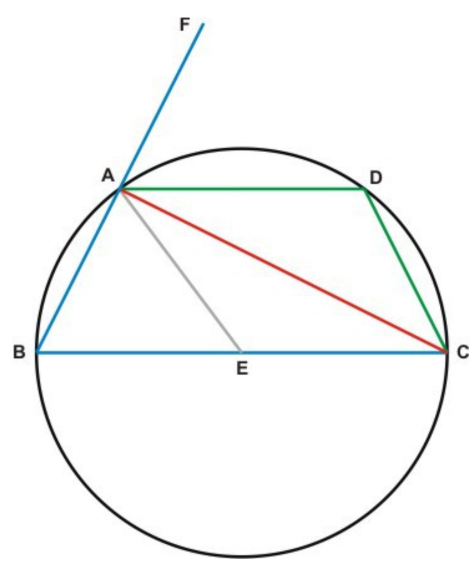
Damit ist der gegebene Kreisbogen in D in zwei gleiche Teile geteilt, was aufgegeben war.

III.31.

Der Winkel des Halbkreises ist ein rechter Winkel, der Winkel eines größeren Kreisabschnitts ist kleiner, der eines kleineren Kreisabschnitts größer als ein rechter Winkel, der Winkel des Kreisbogens mit der Grundseite ist im größeren Kreisabschnitt größer und im kleineren Kreisabschnitt kleiner als ein rechter Winkel.

Wenn im Kreis ABCD der Durchmesser BC und der Mittelpunkt E ist, sowie BA, AC, AD und DC gezogen sind, dann sage ich, der Winkel BAC im Halbkreis BAC ist ein rechter, der Winkel ABC gegenüber der Grundseite AC des Kreisabschnitts ABC ist kleiner und der Winkel ADC gegenüber der Grundseite AC des Kreisabschnitts ADC ist größer als ein rechter Winkel.

Wird AE gezogen und BA bis F verlängert, dann ist BE gleich EA und der Winkel ABE gleich BAE [wie I.5.]. Da CE gleich EA, ist der Winkel ACE gleich CAE, deshalb ist der Winkel BAC gleich ABC und ACB zusammen.
Der Außenwinkel zum Dreieck ABC ist FAC; er ist gleich den innen gegenüber liegenden Winkeln ABC und ACB zusammen [wie I.32.].
Also sind BAC und FAC gleich und rechte Winkel.
Somit ist BAC ein rechter Winkel im Halbkreis BAC.



Da im Dreieck ABC die beiden Winkel ABC und BAC kleiner als zwei rechte sind [wie I.17.] und BAC ein rechter Winkel ist, ist der Winkel ABC kleiner als ein rechter Winkel gegenüber der Grundseite AC im Kreisabschnitt BAC, der größer als ein Halbkreis ist.

Da ABCD ein Sehnenviereck ist, im Sehnenviereck zwei gegenüber liegende Winkel gleich zwei rechten Winkeln sind und ABC kleiner als ein rechter Winkel ist, ist ADC größer als ein rechter Winkel gegenüber der Grundseite AC im Kreisabschnitt ADC, der kleiner als ein Halbkreis ist.

Ich sage auch, mit der Grundseite AC bildet der Kreisbogen ABC einen größeren als einen rechten Winkel und der Kreisbogen ADC einen kleineren als einen rechten Winkel, was sofort ersichtlich ist, da die Strecken BA und AC einen rechten Winkel bilden und der Winkel des Kreisbogens ABC mit der Grundseite AC größer als dieser ist.
Da auch AC und AF einen rechten Winkel bilden, ist der Winkel, den der Kreisbogen ADC mit der Grundseite AC bildet, kleiner als ein rechter Winkel.

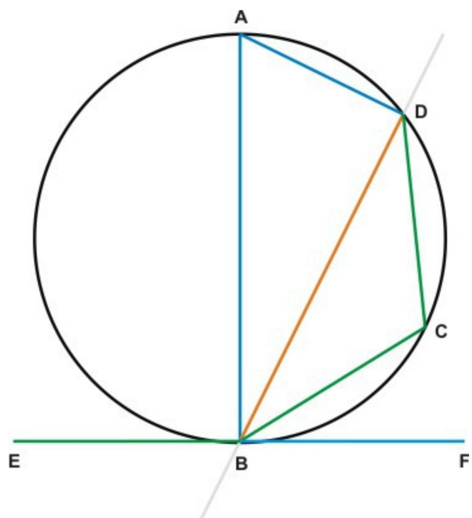
Deshalb ist der Winkel des Halbkreises ein rechter Winkel, ist der Winkel eines größeren Kreisabschnitts kleiner, ist der eines kleineren Kreisabschnitts größer als ein rechter Winkel und der Winkel des Kreisbogens mit der Grundseite im größeren Kreisabschnitt größer, im kleineren Kreisabschnitt aber kleiner als ein rechter Winkel, was zu zeigen war.

III.32.

Schneidet eine Gerade einen Kreis, dann ist ihr Winkel mit der Tangente im Schnittpunkt gleich dem der schneidenden Strecke gegenüber liegenden Winkel im Sehnendreieck, das über der schneidenden Strecke gegenüber errichtet ist.

Wenn die Gerade EF den Kreis ABCD im Punkt B berührt und eine Gerade durch B und D den Kreis ABCD schneidet, dann, sage ich, ist der von EF und BD gebildete Winkel gleich dem der BD gegenüber liegenden Winkel im Dreieck, das auf BD mit einem Punkt auf dem Kreisbogen gegenüber errichtet ist, also der Winkel FBD gleich BAD und der Winkel EBD gleich DCB.

Denn wird auf EF in B die Senkrechte BA errichtet, AD gezogen und zu einem Punkt C auf dem Kreisbogen BD die Strecken DC und CB gezogen, dann liegt auf dem Durchmesser BA der Mittelpunkt des Kreises ABCD.
Da der Winkel ADB im Halbkreis über BA liegt und ein rechter ist, sind die übrigen Winkel BAD und ABD zusammen gleich einem rechten Winkel.
Da ABF ein rechter Winkel ist, ist ABF gleich BAD und ABD zusammen. Beidem der gleiche Winkel ABD weggenommen, ist DBF gleich dem Winkel BAD, der der schneidenden Strecke gegenüber liegt.



Da im Sehnenviereck ABCD gegenüber liegende Winkel zusammen gleich zwei rechten sind und auch DBF und DBE zusammen gleich zwei rechten Winkeln sind, sind DBF und DBE zusammen gleich BAD und BCD zusammen.
Der Winkel DBF ist, wie gezeigt, gleich BAD und damit ist DBE gleich dem Winkel DCB, der der schneidenden Strecke gegenüber liegt.

Deshalb ist der, der schneidenden Strecke gegenüber liegende, Winkel im Sehnendreieck, das auf der schneidenden Strecke gegenüber errichtet ist, gleich dem Winkel den die Schneidende mit der Tangente im Schnittpunkt bildet, was zu zeigen war.

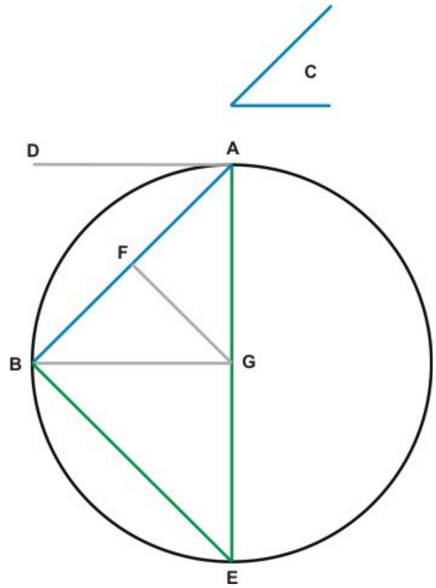
III.33.

Auf einer Strecke einen Kreisabschnitt mit gegebenem Winkel errichten.

Es seien eine Strecke AB und ein Winkel im Punkt C gegeben. Es soll ein Kreisabschnitt auf AB errichtet werden, dessen Winkel gleich dem in C ist.

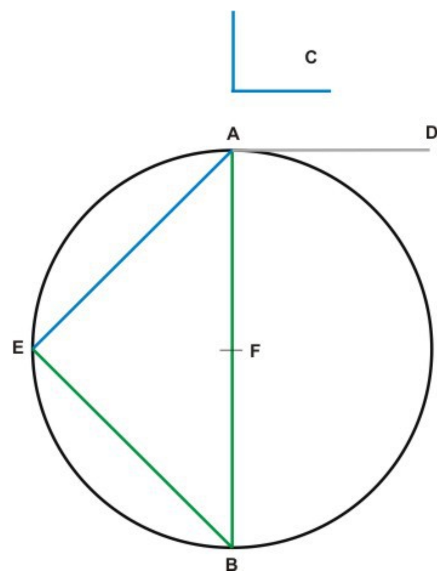
Im Punkt C ist ein spitzer Winkel, ein rechter Winkel oder ein stumpfer Winkel gegeben.

Ist es ein spitzer Winkel, dann ist an AB im Punkt A der Winkel BAD anzulegen, der gleich dem in C ist, auf AD im Punkt A die Senkrechte AE zu errichten, AB im Punkt F in zwei gleiche Teile zu teilen, auf AB im Punkt F die Senkrechte FG zu errichten und GB zu ziehen.



Da AF und FB gleich sind und an der Strecke FG liegen, sind die beiden Stecken AF und FG gleich den beiden Stecken BF und FG und da der Winkel AFG gleich BFG ist, ist AG gleich BG. Der um G mit dem Radius GA beschriebene Kreis durch B sei ABE und es ist EB zu ziehen. Die Gerade DA ist Tangente am Kreis ABE im Punkt A, und steht senkrecht auf dem Durchmesser in A. Da der Winkel einer Tangente mit einer Sehne im Berührpunkt gleich demjenigen ist, der im auf der Sehne gegenüber errichteten Sehnendreieck der Sehne gegenüber liegt, ist der Winkel DAB gleich AEB.
AEB ist damit gleich dem Winkel im Punkt C und ist der Winkel des Kreisabschnitts AEB.

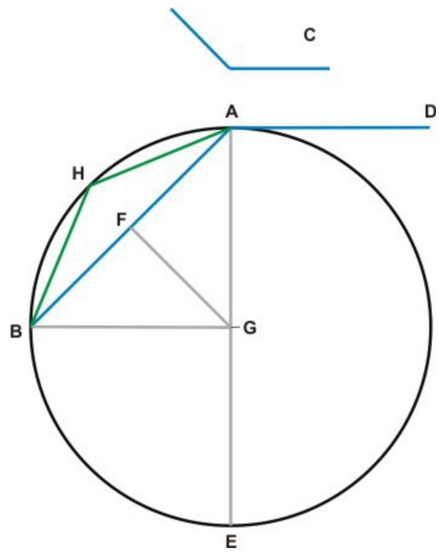
Ist der im Punkt C gegebene Winkel ein rechter und ist über AB ein Kreisabschnitt zu errichten, dessen Winkel gleich dem in C ist, dann ist an AB im Punkt A der rechte Winkel BAD, der dem in C gleich ist, anzulegen, AB im Punkt F in zwei gleiche Teile zu teilen und im Punkt F mit dem Radius FA, der gleich FB ist, der Kreis AEB zu schlagen.



Da DA eine Tangente an den Kreis AEB im Punkt A ist, die senkrecht auf dem Durchmesser AB steht, und durch deren Berührpunkt A die Sehne AB geht, ist der Winkel BAD gleich dem gegenüber liegenden Winkel im auf AB gegenüber errichteten Sehnendreieck und damit gleich AEB.
Der Winkel BAD ist gleich dem in C, deshalb ist auch der Winkel AEB gleich dem in C. Also ist der Winkel des auf AB errichteten Kreisabschnitts AEB gleich dem in C.

Ist der im Punkt C gegebene Winkel ein stumpfer Winkel und ist an AB im Punkt A der, dem in C gleiche, Winkel BAD anzulegen, auf AD im Punkt A die Senkrechte AE zu errichten, AB im Punkt F in zwei gleiche Teile zu teilen, dort die Senkrechte FG zu errichten und GB zu ziehen.

Da AF und FB gleich sind und an der gleichen Strecke FG liegen, sind die beiden Strecken AF und FG gleich den beiden Strecken BF und FG, und da die Winkel AFG und BFG gleich sind, sind auch AG und BG gleich. Es ist um den Punkt G mit Radius GA der Kreis AEB zu beschreiben.



Den Kreis AEB schneidet im Punkt A die Sehne AB und berührt die Tangente AD, die senkrecht auf dem Durchmesser AE steht.
Somit ist der Winkel DAB, der gleich dem in C ist, gleich dem im, auf AB gegenüber errichteten, Sehnendreieck AHB gegenüber liegenden Winkel AHB.

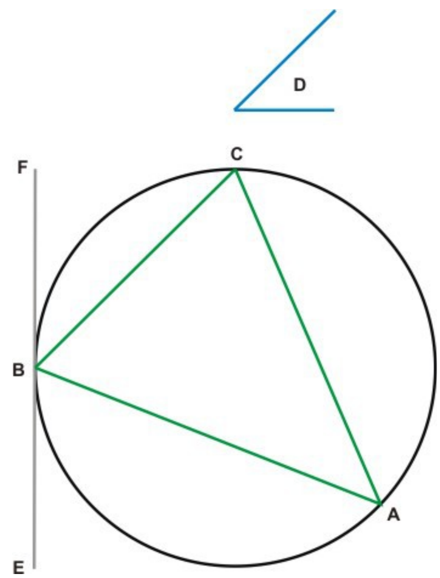
Also ist der Winkel des auf AB errichteten Kreisabschnitts AHB gleich dem in C, was auszuführen war.

III.34.

Von einem Kreis einen Kreisabschnitt mit gegebenem Winkel schneiden.

Es seien der Kreis ABC und ein Winkel im Punkt D gegeben. Es soll von ABC ein Kreisabschnitt geschnitten werden, dessen Winkel dem in D gleich ist.

Es ist im Punkt B die Tangente EF an den Kreis ABC zu legen und in B an FB der Winkel FBC anzulegen, der dem in D gleich ist.



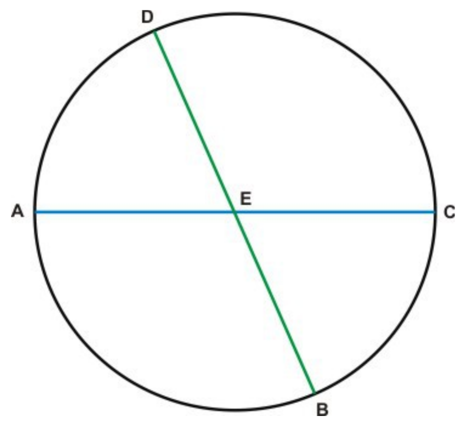
Da der Kreis ABC in B von EF berührt und von BC geschnitten wird, ist der Winkel FBC gleich dem der BC gegenüber liegenden Winkel im, auf BC gegenüber errichteten, Sehnendreieck.
Also ist der Winkel FBC gleich BAC. Der Winkel des Kreisabschnitts BAC ist deshalb gleich dem in C.

Damit ist vom Kreis ABC der Kreisabschnitt BAC mit dem in C gegebenen Winkel geschnitten, was aufgegeben war.

III.35.

Das Rechteck aus den Abschnitten einer Geraden, die im Kreis von einer anderen geschnitten wird, ist gleich dem aus den Abschnitten der anderen Geraden.

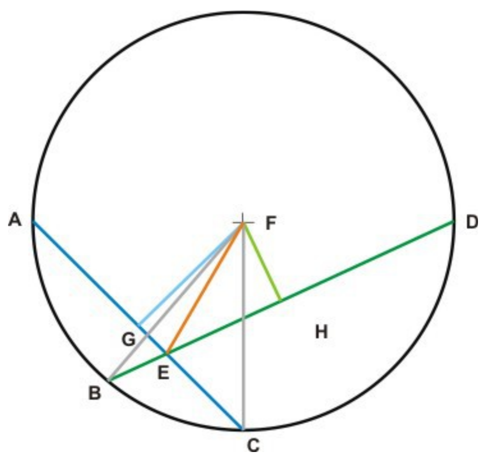
Wenn im Kreis ABCD die Gerade AC im Punkt E die Gerade BD schneidet, dann, sage ich, ist das Rechteck aus AE mit EC gleich dem Rechteck aus DE mit EB.



Denn schneiden sich AC und BD im Mittelpunkt E des Kreises ABCD, dann ergibt AE mit EC das gleiche was DE mit EB ergibt, denn AE, EC, DE und EB sind gleich.

Schneiden sich AC und BD nicht im Mittelpunkt F des Kreises ABCD, sondern im Punkt E, dann sind von F aus die Senkrechten FG und FH auf AC und BD zu errichten und FB, FC und FE zu ziehen.

Da die Senkrechte durch den Mittelpunkt, auf einer Geraden, die nicht durch den Mittelpunkt geht, die Gerade in zwei gleiche Teile teilt, ist AG gleich GC.
Da AC in G in zwei gleiche und in E in zwei ungleiche Teile geteilt ist, ist das Rechteck aus AE mit EC zusammen mit dem Quadrat über GE gleich dem Quadrat über GC [wie II.5.].
Beidem das gleiche Quadrat über GF hinzugefügt, ist das Rechteck aus AE mit EC zusammen mit den Quadraten über GE und GF gleich den Quadraten über CG und GF zusammen.



Es ist das Quadrat über FE gleich den Quadraten über EG und GF zusammen und es ist das Quadrat über FC gleich den Quadraten über FG und GC zusammen.
Also ist das Rechteck aus AE mit EC zusammen mit dem Quadrat über FE gleich dem Quadrat über FC.
Da FC und FB gleich sind, ist das Rechteck aus AE mit EC zusammen mit dem Quadrat über EF gleich dem Quadrat über FB.
Aus den gleichen Gründen ist das Rechteck aus DE mit EB zusammen mit dem Quadrat über FE gleich dem Quadrat über FB.
Also ist das Rechteck aus AE mit EC und das Quadrat über FE zusammen gleich dem Rechteck aus DE mit EB und das Quadrat über FE zusammen.
Beidem das gleiche Quadrat über FE weggenommen, ist das Rechteck aus AE mit EC gleich dem Rechteck aus DE mit EB.

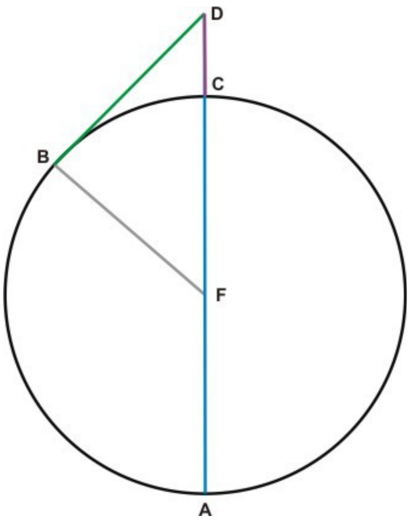
Deshalb ist das Rechteck aus den Abschnitten einer Geraden, die im Kreis von einer anderen geschnitten wird, gleich dem Rechteck aus den Abschnitten der anderen Geraden, was zu zeigen war.

III.36.

Das Quadrat über dem Abschnitt auf der Tangente, die von einer Geraden außerhalb des Kreises geschnitten wird, ist gleich dem Rechteck aus dem äußeren Abschnitt auf der schneidenden Geraden mit dem aus dem inneren und äußeren zusammengesetzten.

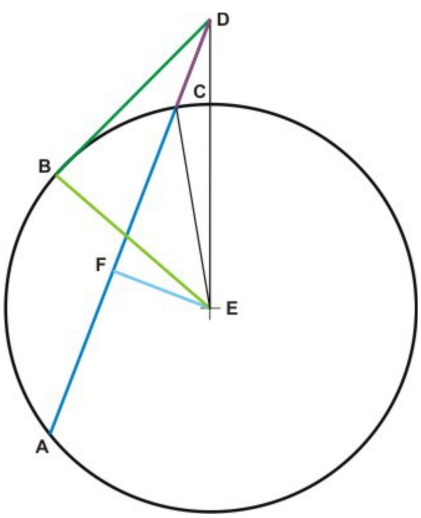
Ist von einem Punkt D außerhalb des Kreises ABC eine ihn schneidende Gerade DCA und eine Tangente BD gezogen, dann, sage ich, ist das Quadrat über DB gleich dem Rechteck aus AD mit DC.

Die Gerade DCA geht nun durch den Mittelpunkt oder nicht. Geht sie durch den Mittelpunkt F des Kreises ABC, dann ist FB zu ziehen. Der Winkel FBD ist ein rechter. AC wird in F in zwei gleiche Teile geteilt und ist um CD verlängert, deshalb ist das Rechteck aus AD mit DC zusammen mit dem Quadrat über FC gleich dem Quadrat über FD [wie II.6.].
FC ist gleich FB und das Quadrat über FD ist gleich den Quadraten über FB und BD zusammen. Also ist das Rechteck aus AD mit DC zusammen mit dem Quadrat über FD gleich den Quadraten über FB und BD zusammen. Beidem das gleiche Quadrat über FB weggenommen, ist das Rechteck aus AD mit DC gleich dem Quadrat über BD.



Geht die Gerade DCA nicht durch den Mittelpunkt E des Kreises ABC, dann ist von E die Senkrechte EF auf AC zu errichten und sind EB, EC und ED zu ziehen. Da der Winkel EBD ein rechter ist und da eine Gerade durch den Mittelpunkt eine andere, die nicht durch den Mittelpunkt geht, rechtwinklig teilt, diese dann in zwei gleiche Teile teilt, deshalb ist AF gleich FC.

Da AC in F in zwei gleiche Teile geteilt ist und um CD verlängert ist, ist das Rechteck aus AD mit DC zusammen mit dem Quadrat über FC gleich dem Quadrat über FD. Beidem das gleiche Quadrat über FE hinzugefügt, ist das Rechteck aus AD mit DC zusammen mit den Quadraten über FC und FE gleich den Quadraten über FD und FE zusammen. Das Quadrat über EC ist gleich den Quadraten über CF und FE zusammen.
Der Winkel EFC ist ein rechter und somit ist das Quadrat über ED gleich den Quadraten über DF und FE zusammen. Also ist das Rechteck aus AD mit DC zusammen mit dem Quadrat über EC gleich dem Quadrat über ED.
EC ist gleich EB und das Quadrat über ED ist gleich den Quadraten über EB und BD zusammen, das der Winkel EBD ein rechter ist.



Damit ist das Rechteck aus AD mit DC zusammen mit dem Quadrat über EB gleich den Quadraten über EB und BD zusammen. Beidem das gleiche Quadrat über EB weggenommen, ist das Rechteck aus AD mit DC gleich dem Quadrat über DB.

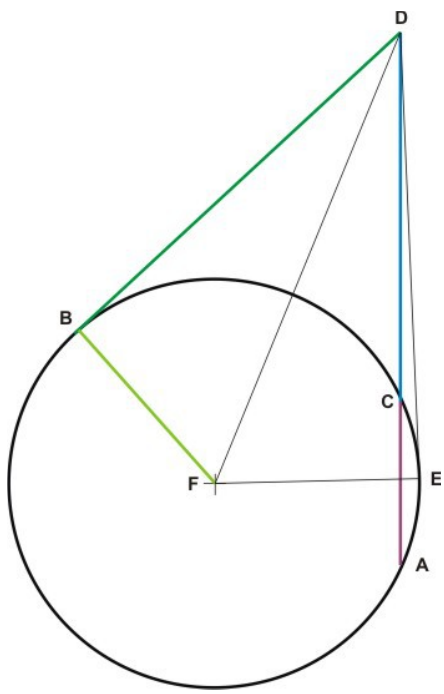
Deshalb ist das Quadrat über dem Abschnitt auf der Tangente, die von einer Geraden außerhalb eines Kreises geschnitten wird, gleich dem Rechteck aus dem äußeren Abschnitt der Geraden mit dem aus dem inneren und äußeren zusammengesetzten, was zu zeigen war.

III.37.

Wird eine schneidende Gerade, nämlich eine Sekante, außerhalb des Kreises von einer Geraden geschnitten, die einen Punkt auf der Kreislinie trifft und ist das Quadrat über ihrem Abschnitt gleich dem Rechteck aus dem äußeren Abschnitt der Sekante mit dem aus dem inneren und äußeren zusammengesetzten Abschnitt der Sekante, dann ist diese Gerade eine Tangente.

Ist vom Punkt D außerhalb des Kreises ABC eine Sekante DCA gezogen und zum Punkt B auf der Kreislinie eine Gerade DB und ist das Rechteck aus AD mit DC gleich dem Quadrat über DB, dann, sage ich, ist DB eine Tangente.

Es ist vom Punkt D aus an den Kreis ABC die Tangente DE anzulegen, die den Kreis im Punkt E berührt, und vom Mittelpunkt F des Kreises FE, FB und FD zu ziehen.



Da der Winkel FED ein rechter ist, DE Tangente und DCA Sekante ist, ist das Rechteck aus AD mit DC gleich dem Quadrat über DE.
Es ist das Rechteck aus AD mit DC auch gleich dem Quadrat über DB, weshalb das Quadrat über DE dem über DB gleich ist. Also ist DE gleich DB.
Da FE gleich FB ist, auch die beiden Strecken DE und EF gleich den beiden Strecken DB und BF sind und an der gleichen Strecke FD liegen, sind die Winkel DEF und DBF gleich.
Der Winkel DEF ist ein rechter, damit auch DBF.
FB geht durch den Mittelpunkt des Kreises.
Eine den Kreis treffende Gerade, deren Senkrechte im Punkt auf der Kreislinie durch den Mittelpunkt geht, ist eine Tangente.
Also ist DB eine Tangente.
Auf gleiche Weise kann gezeigt werden, dass DB Tangente ist, wenn AC durch den Mittelpunkt geht.

Deshalb ist dann, wenn eine Sekante außerhalb des Kreises von einer Geraden geschnitten wird, die einen Punkt auf der Kreislinie trifft, wobei das Quadrat über ihrem Abschnitt gleich dem Rechteck aus dem äußeren Abschnitt der Sekante mit dem aus dem inneren und äußeren zusammengesetzten Abschnitt der Sekante ist, diese Gerade eine Tangente, was zu zeigen war.