Euklid: Stoicheia (Euklids Elemente)

Buch IV.

Über eingefügte Hypertextmarkierungen kann der griechische Text in der Fassung von I. L. Heiberg aufgerufen werden.

Erklärungen.

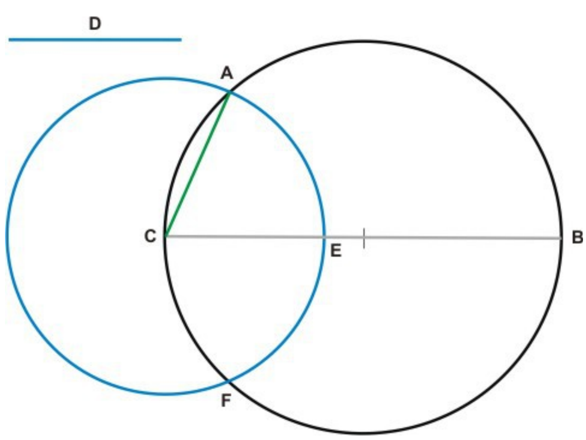
1. Die Ecken einer gradlinigen Figur, der eine andere gradlinige Figur einbeschrieben ist, liegen auf je einer Seite der Figur, der sie einbeschrieben ist,
2. und entsprechend liegt auf je einer Seite einer gradlinigen Figur, die um eine andere beschrieben ist, eine Ecke der Figur, um die sie beschrieben ist.
3. Die Seiten einer gradlinigen Figur, die einem Kreis einbeschrieben ist, sind Sehnen des Kreises.
4. Die Seiten einer gradlinigen Figur, die um einen Kreis beschrieben ist, sind Tangenten des Kreises.
5. Entsprechend ist ein Kreis einer gradlinige Figur einbeschrieben, wenn er jede ihrer Seiten berührt,
6. und ist ein Kreis um eine gradlinige Figur beschrieben, wenn jede ihrer Ecken auf der Kreislinie liegt.
7. Die Endpunkte einer Strecke, einer Sehne, die in einen Kreis eingetragen ist, liegen auf der Kreislinie.

IV.1.

In einen Kreis eine gerade Strecke eintragen, die nicht größer als der Durchmesser ist.

Es sei der Kreis ABC und die Strecke D
gegeben, die nicht größer als der Durchmesser ist. In den Kreis ABC soll eine Strecke eingetragen werden, die gleich D ist.

Es ist der Durchmesser BC des Kreises ABC zu ziehen. Ist D gleich BC, dann ist das Aufgegebene ausgeführt, da in ABC eine Strecke gleich D eingetragen ist.



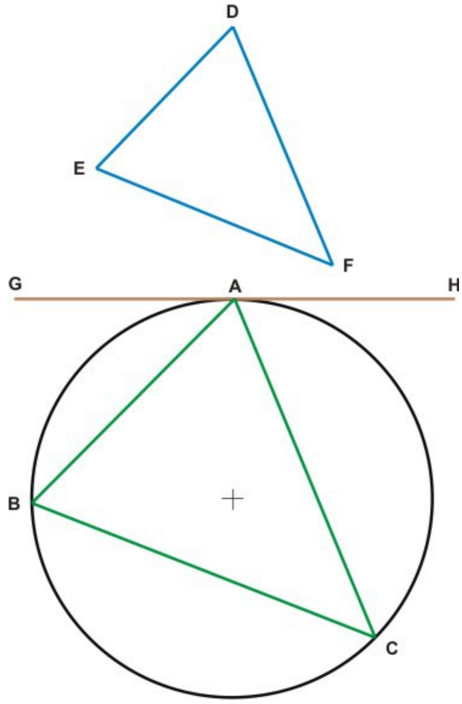
Ist BC größer als D, dann ist eine Strecke CE, die gleich D ist, von BC abzuschneiden, um C mit Radius CE der Kreis EAF zu schlagen und CA zu ziehen. Da C der Mittelpunkt des Kreises EAF ist, sind CA und CE gleich.
DA CE gleich D ist, ist CA gleich D.

Damit ist in den Kreis ABC die Strecke CA eingetragen, die gleich D ist, was aufgegeben war.

IV.2.

In einen Kreis ein Dreieck beschreiben, dessen Winkel einem gegebenen gleich sind.

Es sei der Kreis ABC und das Dreieck DEF gegeben. In den Kreis ABC soll ein Dreieck mit den Winkeln des DEF einbeschrieben werden.



Es im Punkt A auf der Kreislinie von ABC die Tangente GH zu errichten, an A zu AH der dem Winkel DEF gleiche Winkel HAC, sowie zu AG der dem Winkel DFE gleiche Winkel GAB anzulegen und BC zu ziehen.

Da der Kreis ABC von der Tangente AH berührt und der Sekante AC geschnitten wird, ist der Winkel HAC gleich dem Winkel ABC, der im auf AC gegenüber errichteten Sehnendreieck gegenüber liegt.
Da der Winkel HAC gleich DEF ist, ist ABC gleich DEF. Aus den gleichen Gründen ist der Winkel ACB gleich DFE, womit der Winkel BAC gleich EDF ist.
Also hat das Dreieck ABC die dem Dreieck DEF gleichen Winkel.

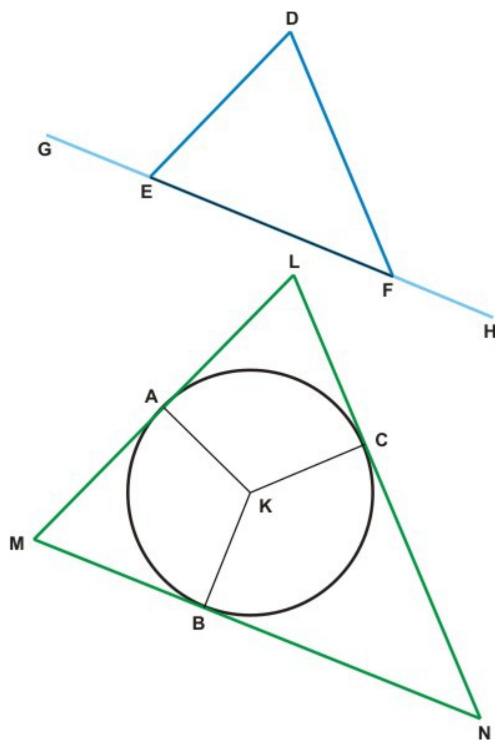
Damit ist einem gegebenen Kreis ein Dreieck einbeschrieben, dessen Winkel einem gegebenem Dreieck gleich sind.

IV.3.

Um einen Kreis ein Dreieck beschreiben, dessen Winkel einem gegebenen gleich sind.

Es sei der Kreis ABC und das Dreieck DEF gegeben. Es soll um den Kreis ein Dreieck beschrieben werden, dessen Winkel denen des DEF gleich sind.

Es ist EF beiderseits bis G und H zu verlängern, vom Mittelpunkt K des Kreises ABC aus ein beliebiger Radius KB zu ziehen, an KB im Punkt K der dem Winkel DEG gleiche Winkel BKA und der dem Winkel DFH gleiche Winkel BKC anzulegen und in den Punkten A, B und C des Kreises ABC die Tangenten LAM, MBN, NCL zu ziehen.



Da LM, MN und NL Tangenten des Kreises ABC in den Punkten A, B und C sind und KA, KB und KC durch die Berührpunkte und den Mittelpunkt K gehen, sind die Winkel in den Punkten A, B und C rechte Winkel.
Da im Viereck AMBK die vier Winkel gleich vier rechten Winkeln sind, wobei KAM und KBM rechte Winkel sind, sind die Winkel AKB und AMB zusammen gleich zwei rechten Winkeln.
Da die Winkel DEG und DEF zusammen gleich zwei rechten Winkeln sind, sind AKB und AMB zusammen gleich DEG und DEF zusammen.

Da BKA gleich DEG ist, ist somit AMB gleich DEF.
Auf gleiche Weise ist zu zeigen, dass der Winkel LNB gleich DFE ist, womit der Winkel MLN gleich EDF ist. Also sind die Winkel des Dreiecks LMN denen des Dreiecks DEF gleich und ist das Dreieck LMN um den Kreis ABC beschrieben.

Damit ist um einen gegebenen Kreis ein Dreieck beschrieben, dessen Winkel einem gegebenen Dreieck gleich sind.

IV.4.

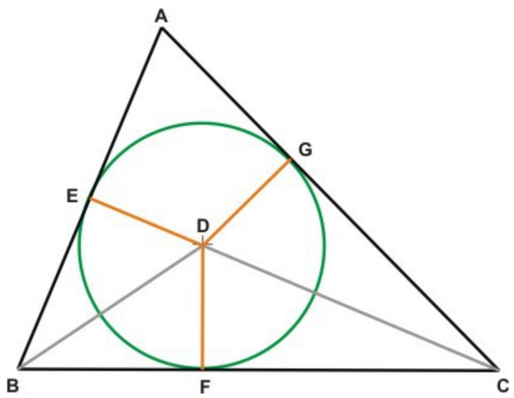
Einem gegebenen Dreieck einen Kreis einbeschreiben.

Es sei das Dreieck ABC gegeben, dem ein Kreis einbeschrieben werden soll.

Es sind die Winkel ABC und ACB jeweils in zwei gleiche Teile zu teilen und damit die Geraden BD und CD zu ziehen, die sich in D schneiden und von D auf AB, BC und CD die Senkrechten DE, DF und DG zu errichten.

Da die Winkel ABD und CBD gleich und die Winkel BED und BFD rechte sind, haben die Dreiecke EBD und FBD zwei gleiche Winkel und die gleiche Seite BD, die dem gleichen Winkel gegenüber liegt, womit die übrigen Seiten und damit DE und DF gleich sind.

Aus den gleichen Gründen sind DG und DF gleich, womit die drei Seiten DE, DF und DG gleich sind. Also ist D der Mittelpunkt eines Kreises mit den Radien DE, DF, DG, der die Seiten AB, BC, CA berührt, auf denen in den Punkten E, F, G Senkrechte stehen, die durch D gehen.
AB, BC und CA schneiden diesen Kreis nicht, da Gerade, die im Endpunkt des Durchmessers senkrecht auf ihm stehen, den Kreis nicht schneiden.



Somit sind die an den Endpunkten der Radien DE, DF, DG senkrecht stehenden Geraden AB, BC, CA Tangenten, die ein Dreieck bilden, dem der Kreis FGE einbeschrieben ist.

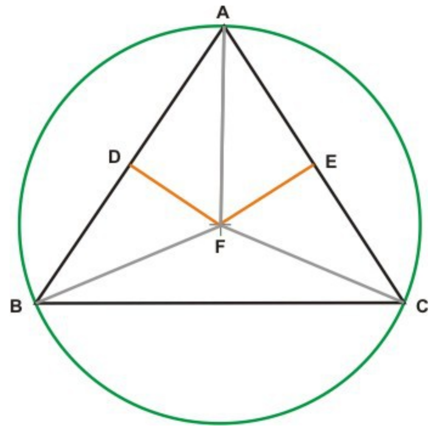
Damit ist dem Dreieck ABC der Kreis FGE einbeschrieben, was auszuführen war.

IV.5.

Um ein gegebenes Dreieck einen Kreis beschreiben.

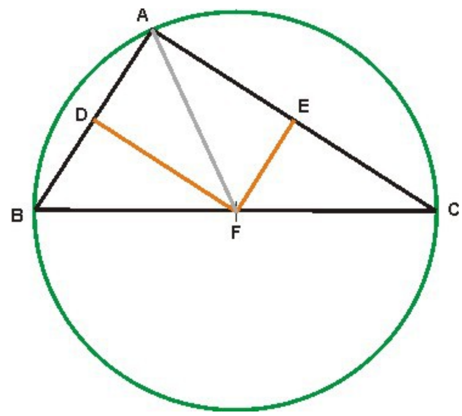
Es sei das Dreieck ABC gegeben, das einem Kreis einbeschrieben werden soll.

Es sind die Seiten AB und AC in zwei gleiche Teile zu teilen um die Punkte D und E zu erhalten, in D und E die zu AB und AC Senkrechten DF und EF zu errichten, die sich entweder innerhalb des Dreiecks ABC, auf BC, oder außerhalb des Dreiecks schneiden.



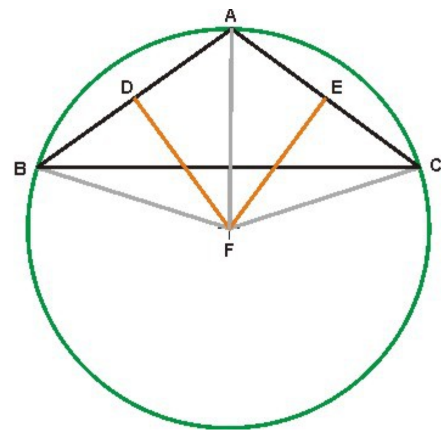
Schneiden sie sich innerhalb des Dreiecks ABC im Punkt F, dann sind FB, FC und FA zu ziehen.

Da AD und DB gleich sind und beide an der Senkrechten DF liegen, ist AF gleich FB.
Ebenso ist zu zeigen, dass CF gleich AF ist, denn FB ist gleich FC, womit FA, FB und FC gleich sind. Also ist um den Mittelpunkt Z ein Kreis zu schlagen, dessen Radien FA, FB, FC sind. Damit ist um das Dreieck ABC der Kreis ABC beschrieben.



Schneiden sich DF und EF auf der Seite BC im Punkt F, dann ist AF zu ziehen. Wie zuvor ist dann zu zeigen, dass F der Mittelpunkt des Kreises ABC ist, der um das Dreieck ABC beschrieben ist.

Schneiden sich DF und EF außerhalb des Dreiecks ABC im Punkt F, dann ist AF, BF und CF zu ziehen.
Da AD und DB gleich sind und an der gemeinsamen Senkrechten DF liegen, ist AF gleich BF.
Ebenso ist zu zeigen, dass CF gleich AF ist, denn BF ist gleich FC.
Also ist um den Mittelpunkt F ein Kreis zu schlagen, dessen Radien FA, FB, FC sind. Damit ist um das Dreieck ABC der Kreis ABC beschrieben.



Damit ist um ein gegebenes Dreieck ein Kreis beschrieben, was auszuführen war.

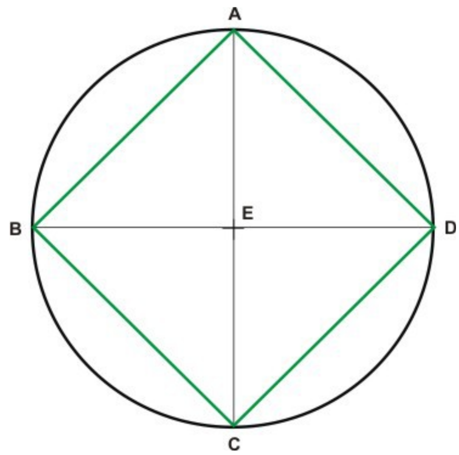
Zusatz: **Offensichtlich liegt ein Sehnendreieck BAC , dessen Umkreismittelpunkt innerhalb des Dreiecks liegt, in einem Kreisabschnitt BAC größer als ein Halbkreis, und sein Winkel BAC ist kleiner als ein rechter Winkel,**
ein Sehnendreieck BAC, dessen Umkreismittelpunkt auf BC liegt, in einem Halbkreis, und sein Winkel BAC ist ein rechter Winkel,
und ein Sehnendreieck BAC, dessen Umkreismittelpunkt außerhalb des Dreiecks liegt, in einem Kreisabschnitt BAC kleiner als ein Halbkreis, wobei sein Winkel BAC größer als ein rechter Winkel ist.

IV.6.

In einen Kreis ein Quadrat einbeschreiben.

Es sei der Kreis ABCD gegeben, in den ein Quadrat einbeschrieben werden soll.

Es sind im Kreis ABCD zwei zueinander senkrechte Durchmesser AC und BD zu errichten und AB, BC, CD und DA zu ziehen.



Ist E der Mittelpunkt des Kreises, dann sind BE und ED gleich und liegen beide an der senkrechten Strecke EA, weshalb AB gleich AD ist.
Aus den gleichen Gründen ist BC gleich AB und CD gleich AD. Somit ist das Viereck ABCD gleichseitig.
Ich sage, es ist auch rechtwinklig.
Da BD ein Durchmesser des Kreises ABCD ist, ist BAD ein Halbkreis und damit der Winkel BAD ein rechter Winkel. Aus den gleichen Gründen sind ABC, BCD und CDA rechte Winkel.
Somit ist das gleichseitige Viereck ABCD rechtwinklig und damit ein Quadrat, das dem Kreis ABCD einbeschrieben ist.

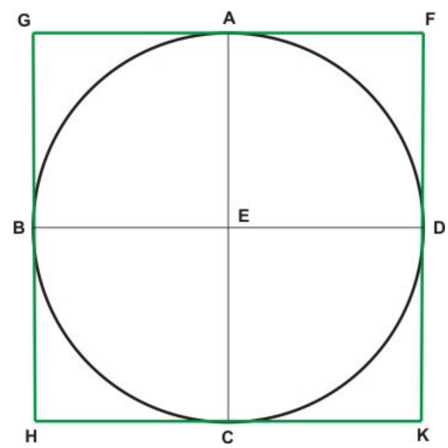
Damit ist dem gegebenen Kreis ABCD ein Quadrat einbeschrieben, was auszuführen war.

IV.7.

Um einen Kreis ein Quadrat beschreiben.

Es sei der Kreis ABCD gegeben, um den ein Quadrat beschrieben werden soll.

Es sind im Kreis ABCD zwei zueinander senkrechte Durchmesser AC und BD zu errichten und in den Punkten A, B, C, D die Tangenten FG, GH, HK, KF anzulegen.



Da FG eine Tangente an den Kreis ABCD ist, bildet die vom Mittelpunkt E zum Berührpunkt A gezogene EA im Punkt A rechte Winkel. Aus den gleichen Gründen sind die Winkel in den Punkten B, C, D rechte Winkel.
Da die Winkel AEB und EBG rechte Winkel sind, ist GH zu AC parallel. Aus den gleichen Gründen ist AC zu FK parallel, denn GH ist zu FK parallel.
Auf gleiche Weise ist zu zeigen, dass GF und HK parallel zu BED sind. Somit sind GK, GC, AK, FB und BK Parallelogramme. Es sind GF und HK gleich, sowie GH und FK. Da die Strecke AC der BD gleich ist, sind AC, GH und FK gleich, ebenso BD, GF und HK.

Also ist das Viereck FGHK gleichseitig. Ich sage, es ist auch rechtwinklig.
Da im Parallelogramm GBEA der Winkel AEB ein rechter ist, ist auch AGB ein rechter Winkel. Ebenso ist zu zeigen, dass die Winkel in den Punkten H, K und F rechte Winkel sind.
Also ist das gleichseitige Parallelogramm rechtwinklig und somit ein Quadrat, das um den Kreis ABCD beschrieben ist.

Damit ist um den gegebenen Kreis ein Quadrat beschrieben, was aufgegeben war.

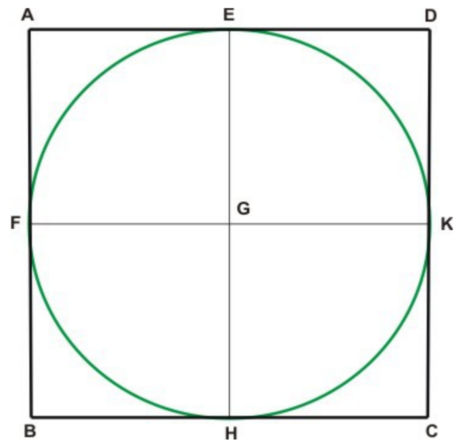
IV.8.

In ein Quadrat einen Kreis einbeschreiben.

Es sei das Quadrat ABCD gegeben, in das ein Kreis einbeschrieben werden soll.

Es sind die senkrechten Seiten AD und AB in zwei gleiche Teile zu teilen um die Punkte E und F zu erhalten, durch E die zu AB und CD parallele EH zu ziehen und durch F die zu AD und BC parallele FK.

AK, KB, AH, HD, AG, GC, BG, GD sind Parallelogramme, deren gegenüber liegende Seiten gleich sind. Da AD gleich AB ist, AE gleich dem halben AD und AF gleich dem halben AB ist, ist AE gleich AF und ebenso sind die gegenüber liegenden Strecken FG und GE gleich. Ebenso ist zu zeigen, dass GH gleich FG und GK gleich GE ist, denn die vier Strecken GE, GF, GH, GK sind gleich.
Mit den Radien GE, GF, GH, GK ist um G ein Kreis zu schlagen, der ihre Endpunkte E, F, H, K berührt, in denen sie rechte Winkel mit AB, BC, CD, DA bilden.



Würden AB, BC, CD, DA den Kreis schneiden, würden sie, obwohl an Endpunkten von Durchmessern senkrecht zu diesen, sich im Innern des Kreises schneiden, was nicht möglich ist [wie III.16.]. Also wird der Kreis um den Mittelpunkt G mit den Radien GE, GF, GH, GK nicht von AB, BC, CD, DA geschnitten, die somit Tangenten des einbeschriebenen Kreises EFHK sind.

Damit ist in ein gegebenes Quadrat ein Kreis einbeschrieben, was auszuführen war.

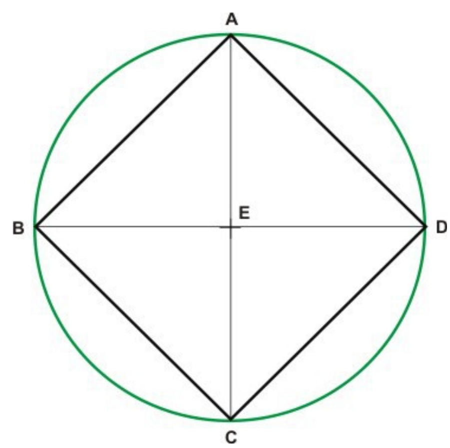
IV.9.

Um ein Quadrat einen Kreis beschreiben.

Es sei das Quadrat ABCD gegeben, um das ein Kreis beschrieben werden soll.

Es sind AC und BD zu ziehen um ihren Schnittpunkt E zu erhalten.
Die Strecken DA und AB sind gleich und liegen an der Strecke AC, also sind die beiden Strecken DA und AC gleich den beiden Strecken BA und AC und schließen den Winkel DAC ein, der gleich BAC ist. Damit ist die Strecke DC gleich BC. Der Winkel DAB wird durch AC in zwei gleiche Teile geteilt.

Es ist der Winkel DAB gleich ABC, der Winkel EAB gleich dem halben DAB und der Winkel EBA gleich dem halben ABC, somit ist der Winkel EAB gleich EBA. Somit ist die Strecke EA gleich EB.



Ebenso ist zu zeigen, dass die Strecke EA gleich ED ist, womit EB gleich EC ist. Also sind die vier Strecken EA, EB, EC, ED gleich. Mit den Radien EA, EB, EC, ED ist um E ein Kreis zu schlagen, der durch ihre Endpunkte geht, die Ecken des Quadrats ABCD sind und um das der Kreis ABCD beschrieben ist.

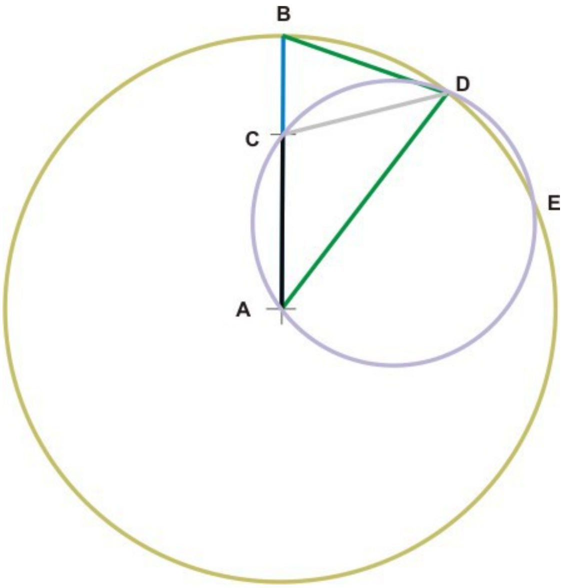
Damit ist um ein gegebenes Quadrat ein Kreis beschrieben, was auszuführen war.

IV.10.

Ein gleichschenkliges Dreieck errichten, dessen Winkel an der Grundseite doppelt so groß sind wie der übrige.

Es ist eine beliebige Strecke AB im Punkt C so zu teilen, dass das Rechteck aus AB mit BC gleich dem Quadrat über CA ist [wie II.11.].
Sodann ist um den Mittelpunkt A mit dem Radius AB der Kreis BDE zu beschreiben und in ihn die Strecke BD einzutragen, die gleich AC und somit nicht größer als der Durchmesser des Kreises BDE ist.
Danach ist AD und DC zu ziehen und um das Dreieck ACD der Kreis ACD zu beschreiben.

Das Rechteck aus AB mit BC ist gleich dem Quadrat über CA und die Strecke AC ist gleich BD, somit ist das Rechteck aus AB mit BC gleich dem Quadrat über BD.
Da vom Punkt B die Geraden BA und BD an den Kreis ACD gelegt sind, wovon die eine schneidet, die andere nur anliegt, und das Rechteck aus AB mit BC gleich dem Quadrat über BD ist, ist BD Tangente des Kreises ACD.



Da der Kreis ACD von BD berührt und von CD geschnitten wird, ist der Winkel BDC gleich dem Winkel DAC, der im auf CD gegenüber errichteten Sehnendreieck der CD gegenüber liegt [wie III.32.].
Wird BDC und DAC der gleiche Winkel CDA hinzugefügt, ist der Winkel BDA gleich den Winkeln CDA und DAC zusammen.

Da die innen gegenüber liegenden Winkel gleich dem außen liegenden Winkel sind, ist BCD gleich den Winkeln CDA und DAC zusammen.
Somit ist BDA gleich BCD.

Da AD gleich AB, ist der Winkel BDA gleich DBA, somit ist DBA gleich BCD.
Also sind die drei Winkel BDA, DBA und BCD gleich.
Der Winkel DBC ist gleich BCD, deshalb ist BD gleich DC und da, wie vorausgesetzt, BD gleich CA ist, ist CA gleich CD.
Es ist der Winkel CDA gleich DAC, somit sind CDA und DAC zusammen gleich dem doppelten DAC. Da BCD gleich den Winkeln CDA und DAC zusammen ist, ist BCD gleich dem doppelten CAD.
Die Winkel BCD, BDA und DBA sind gleich, also sind BDA und DBA doppelt so groß wie DAB.

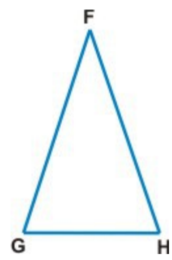
Damit ist ein gleichschenkliges Dreieck ABD errichtet, dessen beide Winkel an der Grundseite DB doppelt so groß sind wie der übrige, was auszuführen war.

IV.11.

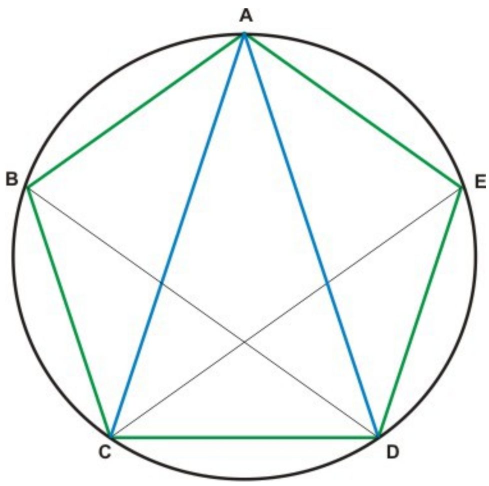
In einen Kreis ein gleichseitiges und gleichwinkliges Fünfeck einbeschreiben.

Es sei der Kreis ABCDE gegeben, in den ein gleichwinkliges und gleichseitiges Fünfeck einbeschrieben werden soll.

Es ist ein gleichschenkliges Dreieck FGH zu errichten, dessen Winkel in den Punkten G und H doppelt so groß sind wie in F. Sodann ist in den Kreis ABCDE ein Dreieck ACD, dessen Winkel denen des FGH gleich sind, so zu beschreiben, dass der Winkel CDA dem in den Punkten G und H gleich ist.
Die Winkel ACD und CDA, die gleich dem doppelten CAD sind, sind mit den Strecken CE und DB zu halbieren, sodann sind AB, BC, DE und EA zu ziehen.



Es sind dann die Winkel DAC, ACE, ECD, CDB und BDA gleich.
Da gleiche Winkel auf gleichen Kreisbögen stehen, sind die Kreisbögen AB, BC, CD, DE und EA gleich. Da gleiche Kreisbögen gleiche Strecken überspannen, sind die Strecken AB, BC, CD, DE und EA gleich.
Das Fünfeck ABCDE ist somit gleichseitig.



Ich sage, es ist auch gleichwinklig.
Es sind die Kreisbögen AB und DE gleich.
Wird ihnen der gleiche Kreisbogen BCD hinzugefügt, dann sind die Kreisbögen ABCD und EDCB gleich, ebenso die Kreisbögen AED und BCD, die gleiche Winkel BAE und AED überspannen.
Aus den gleichen Gründen ist jeder der Winkel ABC, BCD, CDE einem der Winkel BAE, AED ist.
Also ist das Fünfeck ABCDE gleichwinklig und, wie bereits gezeigt, auch gleichseitig.

Damit ist einem gegebenen Kreis ein gleichwinkliges und gleichseitiges Fünfeck einbeschrieben, was auszuführen war.

IV.12.

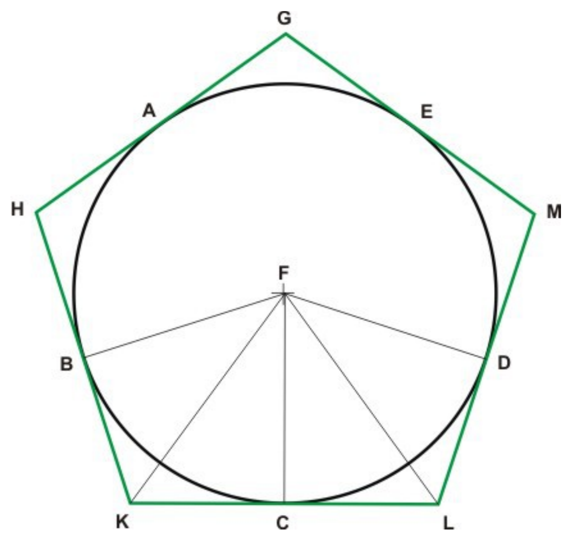
Um einen Kreis ein gleichseitiges und gleichwinkliges Fünfeck beschreiben.

Es sei der Kreis ABCDE gegeben, um den ein gleichwinkliges und gleichseitiges Fünfeck beschrieben werden soll.

Sind A, B, C, D, E die Ecken eines in den Kreis einbeschriebenen Fünfecks mit gleichen Kreisbögen AB, BC, CD, DE, EA und sind in den Punkten A, B, C, D, E die Tangenten GH, HK, KL, LM, MG an den Kreis ABCDE mit Mittelpunkt F gelegt, dann sind FB, FK, FC, FL und FD zu ziehen.

Da KL Tangente des Kreises ABCDE ist und von F zum Berührpunkt C die Strecke FC gezogen ist, steht FC senkrecht auf KL. Damit sind die Winkel im Punkt C rechte Winkel.
Aus den gleichen Gründen sind die Winkel in den Punkten B und D rechte Winkel.
Da FCK ein rechter Winkel ist, ist das Quadrat über FK gleich den Quadraten über FC und CK zusammen.

Aus den gleichen Gründen ist das Quadrat über FK gleich den Quadraten über FB und BK zusammen. Somit sind die Quadrate über FC und CK zusammen gleich den Quadraten über FB und BK zusammen.
Da das Quadrat über FC gleich dem über FB ist, ist das Quadrat über CK gleich dem über BK. Also ist BK gleich CK.
Da FB und FC gleich sind und beide an der Strecke FK liegen, sind die beiden Strecken BF und FK gleich den beiden Strecken CF und FK und ist BK gleich CK.
Da die Winkel BFK und KFC und ebenso BKF und FKC gleich sind, ist der Winkel BFC gleich dem doppelten KFC und der Winkel BKC gleich dem doppelten FKC.
Aus dem gleichen Grund ist der Winkel CFD gleich dem doppelten CFL und ist der Winkel DCL gleich dem doppelten FLC.



Da der Kreisbogen BC gleich dem Kreisbogen CD ist, sind die Winkel BFC und CFD gleich und ist der Winkel BFC gleich dem doppelten KFC, ebenso ist der Winkel DFC gleich dem doppelten LFC. Somit ist der Winkel KFC gleich LFC.

Es ist der Winkel FCK gleich FCL, somit haben die beiden Dreiecke FKC und FLC zwei gleiche Winkel und die gleiche Seite FC gemeinsam, womit auch die übrigen Seiten und Winkel gleich sind. Damit ist KC gleich CL und der Winkel FKC gleich FLC.
Da KC gleich CL, ist KL gleich dem doppelten KC.
Aus gleichen Gründen ist HK gleich dem doppelten BK und BK gleich KC.
Ebenso ist zu zeigen dass jede der Strecken HG, GM, ML einer der Strecken HK, KL gleich ist. Also ist das Fünfeck GHKLM gleichseitig.

Ich sage, es ist auch rechtwinklig.
Da der Winkel FKC gleich FLC ist, und, wie gezeigt, der Winkel HKL gleich dem doppelten FKC ist und der Winkel KLM gleich dem doppelten FLC ist, sind die Winkel HKL und KLM gleich.
Ebenso ist zu zeigen dass jeder der Winkel KHG, HGM, GML einem der Winkel HKL, KLM gleich ist. Somit sind die fünf Winkel GHK, HKL, KLM, LMG und MGH gleich.
Also ist das Fünfeck GHKLM gleichwinklig und, wie gezeigt, auch gleichseitig und ist dem Kreis ABCDE umbeschrieben

Damit ist um einen gegebenen Kreis ein gleichseitiges und gleichwinkliges Fünfeck beschrieben, was auszuführen war.

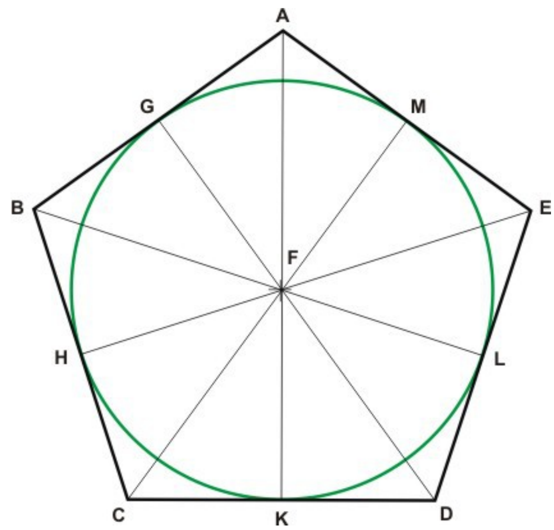
IV.13.

In ein gleichseitiges und gleichwinkliges Fünfeck einen Kreis einbeschreiben.

Es sei das gleichseitige und gleichwinklige Fünfeck ABCDE gegeben, in das ein Kreis einbeschrieben werden soll.

Es sind die Winkel BCD und CDE in zwei gleiche Teile zu teilen, zu ihrem Schnittpunkt F die Strecken CF und DF, sowie FB, FA und FE zu ziehen.

Da BC und CD gleich sind und beide an der Strecke CF liegen, sind die beiden Stecken BC und CF gleich den beiden Strecken DF und CF und da sie auch die gleichen Winkel BCF und DCF einschließen, ist BF gleich DF, womit in den Dreiecken BCF und DCF auch die übrigen Seiten und Winkel gleich sind. Somit ist der Winkel CBF gleich CDF.
Es ist der Winkel CDE gleich dem doppelten CDF, der Winkel CDE gleich ABC, der Winkel CDF gleich CBF und der Winkel ABA gleich dem doppelten CBF, damit ist der Winkel ABF gleich FBC. Also wird der Winkel ABC durch BF in zwei gleiche Teile geteilt.
Ebenso ist zu zeigen, dass die Winkel BAE und AED durch FA und FE in zwei gleiche Teile geteilt sind.



Es sind vom Punkt F die Senkrechten FG, FH, FK, FL, FM auf den Seiten AB, BC, CD, DE, EA zu errichten.
Da die Winkel HCF und KCF, sowie die Winkel FHC und FKC gleich sind und an der gleichen Strecke FC liegen, sind in den Dreiecken FHC und FKC auch die übrigen Seiten und Winkel gleich. Somit ist die Strecke FH gleich FK.
Ebenso ist zu zeigen dass jede der Strecken FL, FM, FG einer der Strecken FH, FK gleich ist. Also sind die fünf Strecken FG, FH, FK, FL, FM gleich.

Der um F mit den Radien FG, FH, FK, FL und FM geschlagene Kreis berührt die Seiten AB, BC, CD, DE, EA in den Endpunkten G, H, K, L, M der Radien. Die Seiten berühren den Kreis ohne ihn zu schneiden, denn würden sie den Kreis schneiden, würden sie, obwohl an Endpunkten von Durchmessern senkrecht zu diesen, sich im Innern des Kreises schneiden, was nicht möglich ist [wie III.16.].

Also sind AB, BC, CD, DE, EA Tangenten an den Kreis GHKLM um F mit den Radien FG, FH, FK, FL, FM.

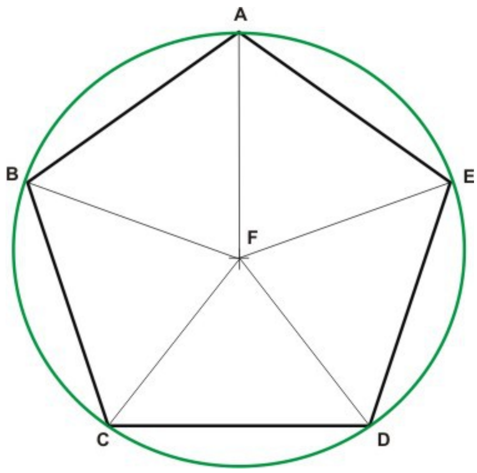
Damit ist einem gegebenem gleichseitigen und gleichwinkligen Fünfeck ein Kreis einbeschrieben, was auszuführen war.

IV.14.

Um ein gleichseitiges und gleichwinkliges Fünfeck einen Kreis beschreiben.

Es sei das gleichseitige und gleichwinklige Fünfeck ABCD gegeben, um das ein Kreis beschrieben werden soll.

Es sind die nebeneinander liegenden Winkel BCD und CDE in zwei gleiche Teile zu teilen und damit die Geraden CF und DF zu ziehen, die sich im Punkt F schneiden. Ebenso sind durch die Punkte B, A, E die Geraden FB, FA, FE zu ziehen, womit die Winkel CBA, BAE, AED in zwei gleiche Teile geteilt werden.



Da der Winkel BCD gleich CDE, der Winkel FCD die Hälfte des Winkels BCD und der Winkel CDF die Hälfte des Winkels CDE ist, ist der Winkel FCD gleich FDC und die Strecke FC gleich FD.
Ebenso ist zu zeigen dass jede der Strecken FB, FA, FE einer der Strecken FC, FD gleich ist.
Also sind die fünf Strecken FA, FB, FC, FD, FE gleich.
Somit geht der Kreis, der um F mit den Radien FA, FB, FC, FD, FE zu schlagen ist, durch deren Endpunkte, die Ecken des Fünfecks sind, um das deshalb der Kreis ABCDE beschrieben ist.

Damit ist um ein gegebenes gleichseitiges und gleichwinkliges Fünfeck ein Kreis beschrieben, was auszuführen war.

IV.15.

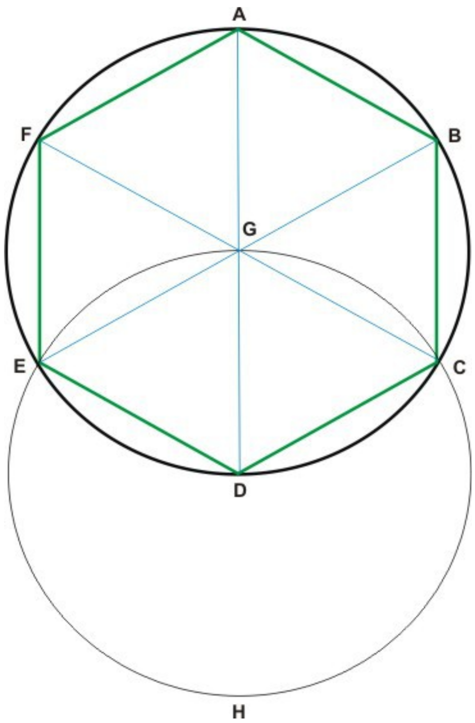
In einen Kreis ein gleichseitiges und gleichwinkliges Sechseck einbeschreiben.

Es sei der Kreis ABCDEF gegeben, in den ein gleichseitiges und gleichwinkliges Sechseck einbeschrieben werden soll.

Es ist der Durchmesser AD des Kreises ABCDEF zu ziehen, der Mittelpunkt G des Kreises aufzusuchen, mit der Radius DG um den Punkt D der Kreis EGCH zu schlagen, die Geraden EG und CG zu ziehen und bis B und F zu verlängern und die Strecken AB, BC, CD, DE, EF, FA zu ziehen. Ich sage, dann ist das Sechseck ABCDEF gleichseitig und gleichwinklig.

Denn da G der Mittelpunkt des Kreises ABCDEF ist, sind GE und GD gleich.
Da D der Mittelpunkt des Kreises GCH ist, sind DE und DG gleich, somit ist GE gleich GD.
Da das Dreieck EGD gleichseitig ist, sind GE und ED gleich und auch die Winkel EGD, GDE, DEG, denn in gleichwinkligen Dreiecken sind die Seiten gleich.
Da im Dreieck die drei Winkel zwei rechten Winkeln gleich sind, ist der Winkel EGD ist das Drittel zweier rechter Winkel.
Aus gleichen Gründen ist der Winkel DGC das Drittel zweier rechter Winkel.
Da die beiden Winkel, die CG mit der Geraden EB bildet, nämlich die Winkel EGC und CGB, sind zusammen gleich zwei rechten Winkeln und es ist deshalb CGB das Drittel zweier rechter Winkel.
Die Winkel EGD, DGC, CGB sind gleich, da sie jeweils an gleichen Strecken liegen, und somit auch die Winkel BGA, AGF, FGE.

Damit sind die sechs Winkel EGD, DGC, CGB, BGA, AGF, FGE gleich und werden von gleichen Kreisbögen überspannt.



Da die sechs Kreisbögen AB, BC, CD, DE, EF, FA gleich sind und gleiche Kreisbögen gleiche Strecken überspannen, sind die von ihnen überspannten Seiten gleich. Also ist das Sechseck ABCDEF gleichseitig.

Ich sage, es ist auch gleichwinklig.
Denn die Kreisbögen FA und ED sind gleich; jeweils zusammen mit dem gleichen Kreisbogen ABCD sind somit die Kreisbögen FABCD und EDCBA gleich. Der Kreisbogen FABCD überspannt den Winkel FED und der Kreisbogen EDCBA den Winkel AFE, damit sind auch die Winkel AFE und DEF gleich.
Ebenso ist zu zeigen dass die übrigen Winkel des Sechsecks ABCDEF einem der Winkel AFE, FED gleich sind, womit das Sechseck ABCDEF gleichwinklig ist.
Es ist auch gezeigt dass es gleichseitig ist und dem Kreis ABCDEF einbeschrieben ist.

Damit ist einem gegebenen Kreis ein gleichseitiges und gleichwinkliges Sechseck einbeschrieben, was auszuführen war.

Zusatz: **Offensichtlich sind die Seiten eines gleichseitigen und gleichwinkligen Sechsecks gleich dem Radius des umbeschriebenen Kreises.**

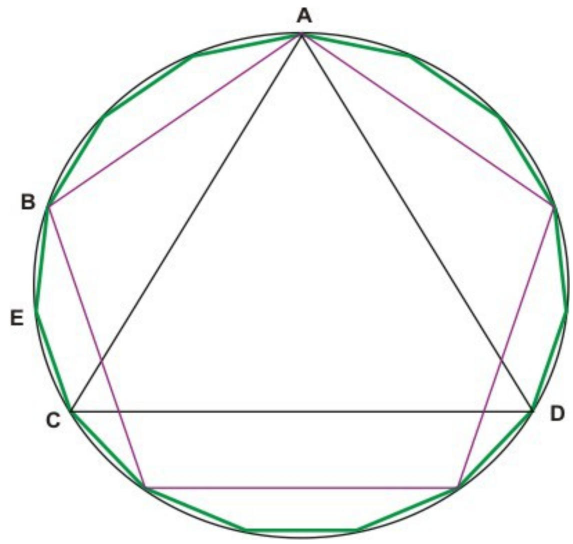
Ebenso wie beim Fünfeck wird um einen Kreis ein gleichseitiges und gleichwinkliges Sechseck beschrieben, wenn in den Berührpunkten des einbeschriebenen Sechsecks Tangenten an den Kreis gelegt werden. Auf gleiche Weise wie beim Fünfeck, wird einem Sechseck ein Kreis einbeschrieben oder umbeschrieben, was auszuführen ist.

IV.16.

In einen Kreis ein gleichseitiges und gleichwinkliges Fünfzehneck einbeschreiben.

Es sei der Kreis ABCD gegeben, in den ein gleichseitiges und gleichwinkliges Fünfzehneck einbeschrieben werden soll.

Es sei in den Kreis ABCD ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite AC und ein gleichseitiges Fünfeck mit der Seite AB einbeschrieben.



Ist die Kreislinie ABCD in fünfzehn gleiche Kreisbögen aufgeteilt, dann enthält der Kreisbogen ABC, da ein Drittel des Ganzen, fünf dieser Teile und der Kreisbogen AB, da ein Fünftel des Ganzen, davon drei dieser Teile und der andere Kreisbogen BC zwei dieser Teile.

Wird BC im Punkt E in zwei gleiche Teile geteilt, dann sind die Kreisbögen BE und EC je ein Fünfzehntel des ganzen Kreises ABCD.
Es sind dann die Strecken BE und EC zu ziehen und weitere, diesen gleiche, Strecken rundum innerhalb des ganzen Kreises ABCD.

Damit ist dann dem Kreis ein gleichseitiges und gleichwinkliges Fünfzehneck einbeschrieben, was auszuführen war.

Ebenso wie beim Fünfeck wird um einen Kreis ein gleichseitiges und gleichwinkliges Fünfzehneck beschrieben, wenn in den Berührpunkten des einbeschriebenen Fünfzehnecks Tangenten an den Kreis gelegt werden.

Auch auf gleiche Weise wie beim Fünfeck, wird einem Fünfzehneck ein Kreis einbeschrieben oder umbeschrieben, was auszuführen ist.