Euklid: Stoicheia (Euklids Elemente)

Buch V.

Über eingefügte Hypertextmarkierungen kann der griechische Text in der Fassung von I. L. Heiberg aufgerufen werden.

Erklärungen.

1. Ein genaues Teil ist das Kleinere vom Größeren, wenn dieses in das Kleinere aufteilbar ist.
2. Ein Vielfaches ist das Größere vom Kleineren, wenn es in das Kleinere aufteilbar ist.
3. Ein Verhältnis ist die Beziehung zweier vergleichbarer Dinge der Größe nach.
4. Ein Verhältnis gibt an, wie oft die erste Größe die zweite übertrifft, wenn es mit der zweiten vervielfacht wird.
5. Im gleichen Verhältnis steht die erste zur zweiten Größe wie die dritte zur vierten dann, wenn von den gleichen Vielfachen der ersten und der dritten, stets entweder beide kleiner als gleiche Vielfache der zweiten und vierten sind, oder beide größer, oder beide gleich.
6. Stehen Größen in gleichen Verhältnissen, heißt ihre Beziehung eine Proportion.
7. Ist das Vielfache der ersten Größe größer als das Vielfache der zweiten, obwohl die dritte vervielfacht wie die erste nicht größer ist als die vierte vervielfacht wie die zweite, dann steht die erste zur zweiten in einem größeren Verhältnis wie die dritte zur vierten.
8. In einer fortlaufenden Proportion stehen drei aufeinander folgende Größen im gleichen Verhältnis.
9. Stehen drei Größen in einer fortlaufend gleichen Proportion, dann steht die erste zur dritten in dem Verhältnis wie die mit sich multiplizierte erste zur mit sich multiplizierten zweiten.
10. Stehen vier Größen in fortlaufend gleicher Proportion, dann steht die erste zur vierten in dem Verhältnis wie die erste dreimal als Faktor genommen zur zweiten dreimal als Faktor genommen. Und so ein Faktor jedesmal mehr, wenn eine weitere Größe im gleichen Verhältnis zur letzten hinzukommt.
11. Entsprechende Größen einer Proportion sind die Vorderglieder und die Hinterglieder, jeweils des einen und des anderen Verhältnisses.
12. Nach Umordnung einer Proportion stehen die entsprechenden Größen einer Proportion im gleichen Verhältnis zu einander.
13. Im umgekehrten Verhältnis zu einem anderen steht das Hinterglied an der Stelle des Vorderglieds und das Vorderglied an der Stelle des Hinterglieds des anderen.
14. Ein Verhältnis wird vergrößert, indem das Hinterglied zum Vorderglied gezählt wird und das Hinterglied dasselbe bleibt.
15. Ein Verhältnis wird verkleinert, indem das Hinterglied vom Vorderglied subtrahiert wird und das Hinterglied dasselbe bleibt.
16. Im ergänzenden Verhältnis zu einem anderen steht der Überschuss des Hinterglieds über das Vorderglied an der Stelle des Vorderglieds.

17. In Proportion aufgrund Gleichheit stehen die ersten und letzten mehrerer Größen zu den ersten und letzten gleich vieler Größen, die in fortlaufenden Proportionen stehen, oder, anders gesagt, sie stehen in Proportion unter Weglassung der Glieder dazwischen.

18. In kreuzweiser Proportion stehen drei Größen zu drei anderen Größen, wenn die erste und die zweite der ersten drei im gleichen Verhältnis stehen wie die zweite und dritte der andern drei und die zweite und dritte der ersten drei im gleichen Verhältnis stehen wie die erste und zweite der andern drei.

Anmerkungen:

zu 1 und 2: Sind A und B Größen und $A < B$,
dann ist A ein genaues Teil von B, wenn es eine natürliche Zahl n gibt so, dass $B = n \cdot A$,
und B ist dann ein Vielfaches von A.

zu 3: Sind A und B zwei Größen, dann ist ihr Verhältnis $A : B$.

zu 4: Zu $A : B$ ist das B-fache von $A : B$ gleich A. Es stehen nur endliche Größen in einem Verhältnis.

zu 5: Sind A, B, C, D Größen und gilt für beliebige n, m, k dass
wenn $n \cdot A > B$, dann auch $n \cdot C > D$, und
wenn $m \cdot A = B$, dann auch $m \cdot C = D$, und
wenn $k \cdot A < B$, dann auch $k \cdot C < D$, dann ist $A : B = C : D$.

zu 6: $A : B = C : D$ ist eine Proportion.

zu 7: Sind A, B, C, D Größen und
gibt es ein n so, dass $n \cdot A > B$ und $n \cdot C \leq D$, dann ist $A : B > C : D$.

zu 8: $A : B : C$ ist $A : B$ und $B : C$.

zu 9: Ist $A : B : C$ und $A : B = B : C$, dann ist $A : C = (A \cdot A) : (B \cdot B)$.

zu 10: Ist $A : B : C : D$ und $A : B = B : C = C : D$, dann ist $A : D = (A \cdot A \cdot A) : (B \cdot B \cdot B)$.
Die Glieder einer fortlaufend gleichen Proportion sind Glieder einer geometrischen Folge.

zu 12: Ist $A : B = C : D$, dann ist $A : C = B : D$.

zu 13: Zu $A : B$ ist $B : A$ das umgekehrte Verhältnis.

zu 14 und 15: zu $A : B$ ist $(A+B) : B$ das vergrößerte und $(A - B) : B$ das verkleinerte Verhältnis.

zu 16: $A : C$ ist ergänzendes Verhältnis zu $B : C$, wenn $A+B = C$.

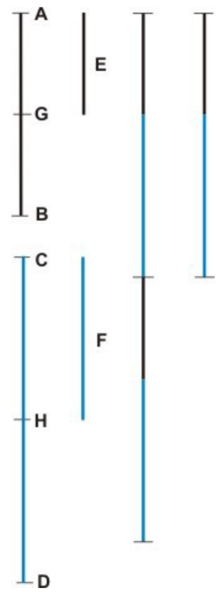
zu 17: Ist $A : B : C = D : E : F$, dann ist $A : C = D : F$.

zu 18: $A : B : C$ und $D : E : F$ stehen in kreuzweiser Proportion, wenn $A : B = E : F$ und $B : C = D : E$.

V.1.

Ist jede von mehreren Größen das gleiche Vielfache einer von gleich vielen anderen Größen, dann sind die einen zusammen dasselbe Vielfache von den anderen zusammen.

Wenn jede von mehreren Größen, AB, CD, das gleiche Vielfache einer von gleich vielen anderer Größen, E, F, ist, dann, sage ich, so oft AB Vielfaches von E ist, so oft sind AB und CD zusammen Vielfaches von E und F zusammen.Denn ein ebenso Vielfaches wie AB von E und CD Vielfaches von F ist, ein ebenso Vielfaches von E ist der Größe AB gleich und ein ebenso Vielfaches von F der CD.Es ist deshalb AB so oft in der E gleiche Größen, AG, GB, aufzuteilen, wie CD in der F gleiche Größen, CH, HD. Die Anzahl der Teile von AB und von CD ist dann gleich.
Da AG gleich E und CH gleich F ist, sind AG und CF zusammen gleich E und F zusammen.
Aus den gleichen Gründen sind GB und HD zusammen gleich E und F zusammen.
Also ist ebenso oft wie ein Vielfaches von E der AB gleich ist, ein eben solches Vielfaches von E und F zusammen der AB und CD zusammen gleich. Damit ist AB ebenso Vielfaches von E wie AB und CD zusammen Vielfaches von E und F zusammen.



Deshalb sind dann, wenn jede von mehreren Größen das gleiche Vielfache einer von anderen Größen ist, die einen zusammen auch dieses Vielfache von den anderen zusammen, was zu zeigen war.

Anmerkung:

Es sei $AB = A_1$ und $CD = A_2$.
Sind n, i, k natürliche Zahlen und A_i, E_i wobei $1 \leq i \leq k$,
und ist $A_i = n \cdot E_i$
dann ist $A_1 + A_2 + \ldots + A_k = n \cdot E_1 + n \cdot E_2 + \ldots + n \cdot E_k = n \cdot (E_1 + E_2 + \ldots + E_k)$.

V.2.

Ist eine erste Größe das gleiche Vielfache einer zweiten wie eine dritte das Vielfache einer vierten, sowie eine fünfte das Vielfache der zweiten wie eine sechste das Vielfache der vierten, dann sind die erste und fünfte Größe zusammen das gleiche Vielfache der zweiten wie die dritte und sechste zusammen das Vielfache der vierten.

Wenn die erste Größe, AB, das gleiche Vielfache der zweiten, C, wie die dritte, DE, das Vielfache der vierten, F, ist und die fünfte, BG, das gleiche Vielfache der zweiten, C, wie die sechste, EH, das Vielfache der vierten, F, ist, dann, sage ich, ist die aus erster und fünfter zusammengesetzte AG das gleiche Vielfache der zweiten, C, wie die aus dritter und sechster zusammengesetzte DH das Vielfache der vierten, F.

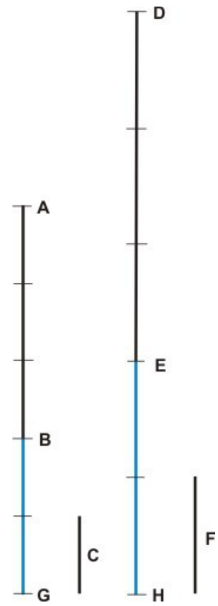
Denn, da AB das gleiche Vielfache von C wie DE das Vielfache von F ist, ist das gleiche Vielfache von C der AB gleich, wie das Vielfache von F der DE.

Aus den denselben Gründen ist das gleiche Vielfache von C der BG gleich, wie das Vielfache von F der EH.

Damit ist das gleiche Vielfache von C der ganzen AG gleich, wie das Vielfache von F der ganzen DH.

Also ist das aus erster und fünfter Größe zusammengesetzte AG das gleiche Vielfache der zweiten, C, wie das aus dritter und sechster zusammengesetzte DH das Vielfache der vierten, F, ist.

Deshalb sind dann, wenn eine erste Größe das gleiche Vielfache einer zweiten wie ein dritte das Vielfache einer vierten ist und eine fünfte das gleiche Vielfache der zweiten wie eine sechste das Vielfache der vierten ist, die erste und fünfte Größe zusammen das gleiche Vielfache der zweiten wie die dritte und sechste zusammen Vielfache der vierten, was zu zeigen war.



Anmerkung:

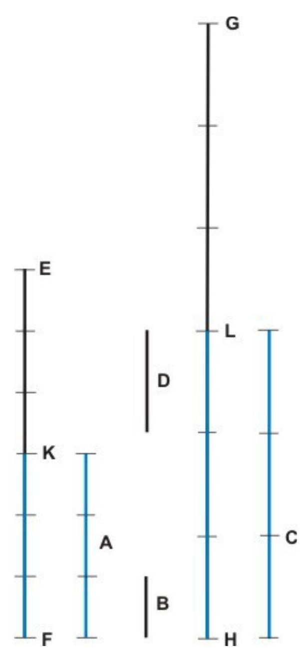
Sind AB, BG Vielfache von C und DE, EH Vielfache von F,
dann gibt es natürliche Zahlen n, m so, dass die Größen
$AB = n \cdot C$, $DE = n \cdot F$
$BG = m \cdot C$, $EH = m \cdot F$
Ist dann $AG = AB + BG$, $DH = DE + EH$,
dann ist $AG = (n+m) \cdot C$, $DH = (n+m) \cdot F$.

V.3.

Ist eine erste Größe das gleiche Vielfache einer zweiten wie eine dritte das Vielfache einer vierten, sowie eine fünfte das gleiche Vielfache der ersten wie eine sechste das Vielfache der dritten, so ist auch die fünfte Größe das gleiche Vielfache der zweiten wie die sechste Vielfache der vierten.

Wenn die erste Größe, A, von der zweiten, B, und die dritte, C, von der vierten, D, gleiche Vielfache sind, sowie EF, GH gleiche Vielfache von A, C sind, dann, sage ich, ist EF auch das gleiche Vielfache von B wie GH von D.

Da die Größen EF von A und GH von C gleiche Vielfache sind, ist das gleiche Vielfache von A gleich EF wie das Vielfache von C gleich GH. Es ist deshalb EF so oft in der A gleiche Größen, EK, KF, aufzuteilen wie GH in der C gleiche Größen, GL, LH.



Da A das gleiche Vielfache von B wie C von D ist, ist EK gleich A und GL gleich C, somit ist EK auch das gleiche Vielfache von B wie GL von D. Aus den gleichen Gründen ist KF das gleiche Vielfache von B wie LH von D.
Da die eine, EK, der zweiten, B, und die dritte, GL, der vierten, D, gleiche Vielfache sind, und die fünfte, KF, der zweiten, B, wie die sechste, LH, der vierten, D, gleiche Vielfache sind, ist deshalb das aus der ersten und fünften zusammen gesetzte EF das gleiche Vielfache der zweiten, B, wie das aus der dritten und sechsten zusammen gesetzte GH Vielfache der D ist.

Deshalb ist, wenn eine erste Größe das gleiche Vielfache einer zweiten wie ein dritte das Vielfache einer vierten ist und eine fünfte das gleiche Vielfache der ersten ist wie eine sechste Vielfache der dritten, dann auch die fünfte Größe das gleiche Vielfache der zweiten wie die sechste Vielfache der vierten.

Anmerkung:

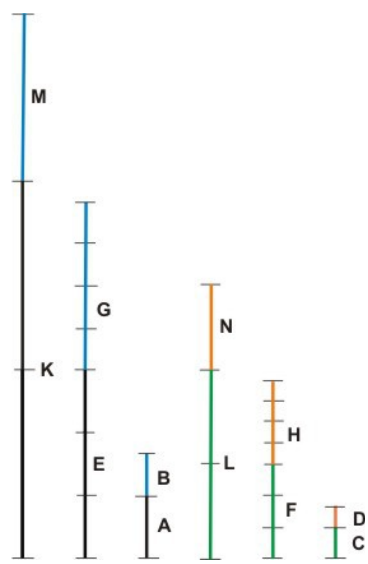
Gibt es natürliche Zahlen n, m so, dass die Größen
$A = n \cdot B, \quad C = n \cdot D$
$EF = m \cdot A, \; GH = m \cdot C$ dann ist $EF = n \cdot m \cdot B$ und $GH = n \cdot m \cdot D$.

V.4.

Steht eine Größe im gleichen Verhältnis zur zweiten wie eine dritte zur vierten, dann stehen die erste und dritte Größe auch dann in einem gleichen Verhältnis zu der zweiten und vierten Größe, wenn die einen oder die anderen beiden vervielfacht werden.

Wenn sich die Größe A zu B verhält wie die Größe C zu D und werden einerseits die Größen A und C gleich vervielfacht zu E und F, andererseits die Größen B und D gleich vervielfacht zu G und H, dann, sage ich, verhält sich E zu G wie F zu H.

E ist von A und F von C das gleiche Vielfache. Werden E, F gleich zu K, L und G, H gleich zu M, N vervielfacht, dann sind K von A und L von C die gleichen Vielfachen, und aus gleichen Gründen auch M von B und N von D.



Da sich A zu B wie C zu D verhält, und K, L Vielfache der Größen A, C und M, N Vielfache der Größen B, D sind, ist K dann größer als M, wenn L größer als N ist, und wenn gleich, dann auch gleich und wenn kleiner, dann auch kleiner. Da K, L von E, F gleiche Vielfache sind und M, N gleiche Vielfache von G, H, verhält sich E zu G wie F zu H.

Deshalb stehen dann, wenn sich eine Größe zu einer zweiten verhält wie eine dritte zu einer vierten und die erste und dritte gleich oder die zweite und vierte gleich vervielfacht werden, die vervielfachten Größen, in der Anordnung wie zuvor, in gleichen Verhältnissen, was zu zeigen war.

Anmerkung:

Ist das Verhältnis der Größen $A : B = C : D$.
und gibt es natürliche Zahlen n, m so, dass
$E = A \cdot n \quad G = B \cdot m$
$F = C \cdot n \quad H = D \cdot m$ dann $(A \cdot n) : (B \cdot m) = (C \cdot n) : (D \cdot m)$, somit $E : G = F : H$.

Beispiel:

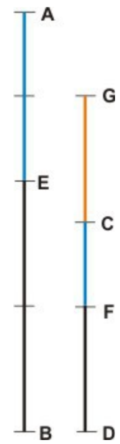
Da $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ ist $\frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 7} = \frac{6 \cdot 5}{8 \cdot 7}$ *somit* $\frac{15}{28} = \frac{30}{56}$

V.5.

Ist eine Größe das gleiche Vielfache von einer anderen Größe, wie das von der einen Weggenommene das Vielfache des von der anderen Weggenommenen ist, dann ist auch der Rest der einen das gleiche Vielfache vom Rest der anderen.

Wenn die Größe AB das gleiche Vielfache der Größe CD ist wie das von der ersten weggenommene AE das Vielfache des von der zweiten weggenommenen CF, dann, sage ich, ist der Rest EB das gleiche Vielfache vom Rest FD wie die ganze AB das Vielfache der CD ist.

So oft AE das Vielfache von CF ist, so oft sei EB das Vielfache von CG.
Da dann AE das gleiche Vielfache von CF ist wie EB von GC, ist AE auch das gleiche Vielfache von CF wie AB von GF.
Ebenso sind AE von CF und AB von CD gleiche Vielfache.
Somit ist AB sowohl von GF wie von CD das gleiche Vielfache, und damit GF gleich CD. Von beiden das gleiche CF weggenommen, ist dann GC gleich FD.



Da AE das gleiche Vielfache von CF wie EB von GC und GC gleich DF ist, ist AE das gleiche Vielfache von CF wie EB von FD.
Also ist der Rest EB das gleiche Vielfache vom Rest FD wie das ganze AB vom ganzen CD.

Deshalb ist dann, wenn eine Größe das gleiche Vielfache von einer anderen ist wie das von ihr Weggenommene das Vielfache des von der anderen Weggenommenen ist, auch der Rest der einen das gleiche Vielfache vom Rest der anderen, was zu zeigen war.

Anmerkung:

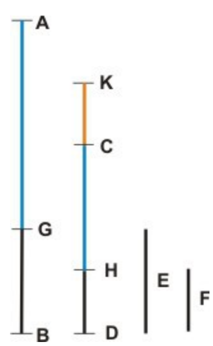
Gilt für Größen $EB = AB - AE$, $FD = CD - CF$
und gibt es eine natürliche Zahl n so, dass
$AB = n \cdot CD$ und $AE = n \cdot CF$, dann ist $EB = n \cdot FD$.

V.6.

Sind zwei Größen gleiche Vielfache zweier anderer, deren gleiche Vielfache von ihnen weggenommen werden, dann verbleiben Reste, die gleich oder gleiche Vielfache der anderen Größen sind.

Wenn die beiden Größen AB, CD gleiche Vielfache von E, F sind und von ihnen AG, CH, die ebenfalls gleiche Vielfache von E, F sind, weggenommen werden, dann, sage ich, sind die Reste GB, HD gleich E, F oder gleiche Vielfache der Größen E, F.

Denn ist GB gleich E, dann, sage ich, ist HD gleich F.
Es sei CK gleich F. Da AG von E und CH von F gleiche Vielfache sind, auch GB gleich E und KC gleich F ist, sind AB von E und KH von F gleiche Vielfache.



Da, wie vorausgesetzt, die Größen AB von E und CD von F gleiche Vielfache sind, sind KH von F und CD von F gleiche Vielfache, somit ist KH gleich CD. Von beiden die gleiche Größe CH weggenommen, ist KC gleich HD.

Da F und KC gleich sind, ist HD gleich F. Damit ist GB gleich E und HD gleich F.

Ist GB ein Vielfaches der Größe E, dann ist ebenso zu zeigen, dass HD ein Vielfaches der Größe F ist.

Deshalb sind die Reste, die verbleiben, wenn von zwei Größen, die gleiche Vielfache zweier anderer Größen sind, Größen weggenommen werden, die ebenso gleiche Vielfache von ihnen sind, ebenfalls gleiche Vielfache von ihnen, was zu zeigen war.

Anmerkung:

Gilt für Größen $GB = AB - AG$, $HD = CD - CH$
und gibt es natürliche Zahlen n, m_1 so, dass

$AB = n \cdot E$, $CD = n \cdot F$,
$AG = m_1 \cdot E$, $CH = m_1 \cdot F$,

dann gibt es eine natürliche Zahl m_2 so, dass $m_2 = n - m_1$ und $GB = m_2 \cdot E$ und $HD = m_2 \cdot F$.

V.7.

Gleiche Größen stehen zu einer gegebenen Größe im gleichen Verhältnis und es steht diese Größe im gleichen Verhältnis zu jenen Größen.

Wenn die gleichen Größen A, B und die Größe C gegeben sind, dann, sage ich, steht jede der Größen A, B im gleichen Verhältnis zu C und es steht C im gleichen Verhältnis zu A und zu B.

Denn sind D, E gleiche Vielfache von A, B und ist F ein Vielfaches von C, dann ist D gleich E, da A gleich B ist.
Welch andere Größe F auch ist, wenn die Größe F größer als D ist, dann ist sie auch größer als E, und wenn gleich, dann auch gleich, und wenn kleiner, dann auch kleiner.
Da D, E gleiche Vielfache der A, B sind, und F Vielfache der C, verhält sich A zu C wie B zu C.

Ich sage, es steht auch E in einem gleichen Verhältnis zu A und zu B.
Denn mit demselben Vergleich ist zu zeigen, dass D gleich E ist, und welch andere Größe F auch ist, wenn die Größe F größer als D ist, dann ist sie auch größer als E, und wenn gleich, dann auch gleich, und wenn kleiner, dann auch kleiner.
Da F Vielfache von C ist und D, E Vielfache von A, B sind, verhält sich C zu A wie C zu B.

Deshalb stehen gleiche Größen im gleichen Verhältnis zu derselben Größe und steht diese zu jenen gleichen Größen im gleichen Verhältnis, was zu zeigen war.

Zusatz: **Offensichtlich stehen Größen auch in der Proportion der umgekehrten Verhältnisse, wenn sie in Proportion stehen, was zu zeigen war.**

Anmerkung:

Sind A, B, C Größen, und ist $A = B$,
dann ist $A : C = B : C$, sowie $C : A = C : B$.

Beispiel: 4 römische Meilen sind gleich 5,94 km.
Im Verhältnis zu 1 Stunde ist dann 4 rM : 1 h = 5,94 km : 1 h und 1 h : 4 rM = 1 h : 5,94 km.

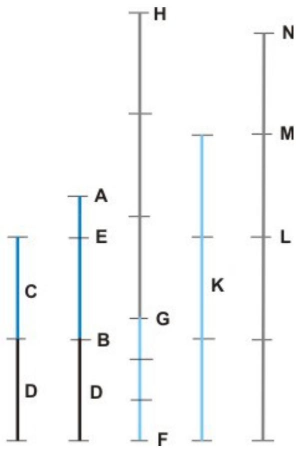
V.8.

Von ungleichen Größen steht die größere zu einer anderen Größe in einem größeren Verhältnis als die kleinere und eine Größe steht zu kleineren in einem größeren Verhältnis als zu größeren.

Wenn zwei Größen AB, C, wovon AB die größere sei, in einem Verhältnis zu einer Größe D stehen, dann, sage ich, ist das Verhältnis von AB zu D größer als das Verhältnis von C zu D und das Verhältnis von D zu C ist größer als das von D zu AB.

Da AB größer ist als C, sei AB in AE und EB aufgeteilt, so dass BE gleich C ist. Dann ist die kleinere der beiden Größen AE, EB geeignet vervielfacht größer als D.

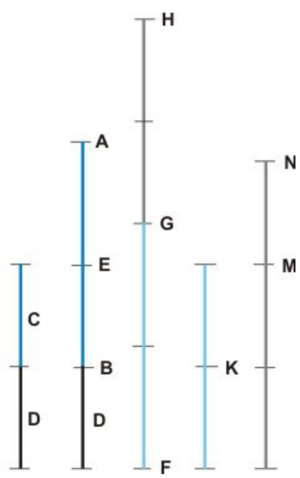
Ist nun AE kleiner als EB, dann sei FG das Vielfache von AE und größer als D.
Das gleiche Vielfache wie das von AE sei GH von EB und K von C.
Es sei nun L das Doppelte von D, M das Dreifache von D und so weiter, der Faktor immer um Eins anwachsend, bis zu jenem Vielfachen, das größer als K ist; dieses sei N. Es sei N das Vierfache von D und der kleinste Vielfache das größer als K ist.



K ist kleiner als N, aber nicht kleiner als M.
Es ist FG das gleiche Vielfache von AE wie GH von EB, aber auch das gleiche Vielfache wie FH von AB. FG ist das gleiche Vielfache von AE wie K von C, also sind FH und K gleiche Vielfache von AB und C. Da GH das gleiche Vielfache von EB ist wie K von C und EB gleich C ist, ist GH gleich K.
Da K nicht kleiner als M ist, ist GH nicht kleiner als M.
Es ist FG größer als D, somit ist FH größer als D und M zusammen. Es sind D und M zusammen gleich N.
Somit ist FH größer als N. K aber ist kleiner als N.

Da FH, K gleiche Vielfache von AB, C sind und N ein Vielfaches von D ist, deshalb ist das Verhältnis von AB zu D größer als das Verhältnis von C zu D.

Ich sage sodann, das Verhältnis von D zu C ist größer als das von D zu AB.
Denn, wie schon gezeigt, ist N größer als K, aber nicht größer als FH.
Es ist N ein Vielfaches von D und es sind FH, K gleiche Vielfache von AB, C, somit ist das Verhältnis von D zu C größer als das Verhältnis von D zu AB.



Ist AE nicht kleiner als EB, dann ist ein geeignetes Vielfaches von EB größer als D; dies sei GH. Das gleiche Vielfache das GH von EB ist, sei FG von AE und K von C. Es ist dann ebenso zu zeigen, dass FH, K gleiche Vielfache von AB, C sind.
Es sei nun wieder N das kleinste Vielfache von D, das größer als FG ist. Da FG dann nicht kleiner als M und GH größer als D ist, ist FH größer als D und M zusammen, somit ist FH größer als N. Da K kleiner als N ist und FG größer als GH ist, ist FG größer als K, aber kleiner als N. Auf gleiche Weise, wie zuvor, ist dann zu zeigen, dass das Verhältnis von AB zu D größer als das von C zu D ist.
Deshalb steht von ungleichen Größen die größere in einem größeren Verhältnis als die kleinere und steht eine Größe zu kleineren in einem größeren Verhältnis als zu größeren, was zu zeigen war.

Anmerkung:

Sind AB, C, D Größen und ist $AB > C$ und $AB - C = EB$, $AB = AE+EB$, $EB = C$, dann

1. Fall: $AE < EB$

Es gibt m, k mit $m \cdot AE = FG$, so dass $FG > D$
$m \cdot EB = GH$, somit $m \cdot AB = FH$
$m \cdot C = K$, da $EB = C$ ist $GH = K$
$N = M + 1$, $(k\text{-}1) \cdot D = M \le K$,
$k \cdot D = N > K$
Da $FG > D$ und $GH \ge M$ ist $FH = FG+GH > D+M = N$
Da $FH = m \cdot AB > N$ und $K = m \cdot C < N$,
ist $(m \cdot AB) : (m \cdot D) > (m \cdot C) : (m \cdot D)$ und $(m \cdot D) : (m \cdot AB) < (m \cdot D) : (m \cdot C)$
also $AB : D > C : D$ und $D : AB < D : C$

2. Fall: $AE \ge EB$

Es gibt m, k so, dass $m \cdot EB = GH > D$
$m \cdot AE = FG$, somit $m \cdot AB = FH$
$m \cdot C = K$ und da $EB = C$ ist $GH = K$
$N = M + 1$, $(k\text{-}1) \cdot D = M \le FG$,
$k \cdot D = N > FG$
Da $GH > D$ und $FG \ge M$ ist $FH = FG+GH > D+M = N$
Es ist $FG > GH = K$
damit $K = m \cdot C < N$ und $FH = m \cdot AB > N$
ist $(m \cdot AB) : (m \cdot D) > (m \cdot C) : (m \cdot D)$ und $(m \cdot D) : (m \cdot AB) < (m \cdot D) : (m \cdot C)$
also $AB : D > C : D$ und $D : AB < D : C$

Beispiel:

Da $\frac{4}{7} > \frac{3}{7}$ *ist* $\frac{7}{4} < \frac{7}{3}$

V.9.

Sind Verhältnisse, in denen Größen zu derselben Größe stehen, gleich, dann sind die Größen gleich, ebenso wie wenn sie in gleichen Verhältnisse derselben Größe zu ihnen stehen.

Wenn A zu C im gleichen Verhältnis steht wie B zu C, dann, sage ich, sind A und B gleich.
Denn sind es nicht, dann steht A zu C nicht im gleichen Verhältnis wie B zu C, darum sind A und B gleich.

Steht C zu A im gleichen Verhältnis wie C zu B, dann, sage ich, sind A und B gleich.
Denn sind sie es nicht, dann steht C zu A nicht im gleichen Verhältnis wie C zu B, darum sind A und B gleich.

Deshalb sind Größen gleich, die in gleichen Verhältnissen zu derselben Größe stehen, ebenso wie wenn die Verhältnisse gleich sind, in denen dieselbe Größe zu ihnen steht, was zu zeigen war.

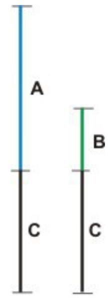
Anmerkung:

Es seien A, B, C Größen.
Wenn $A : C = B : C$, dann $A = B$. Wenn $C : A = C : B$, dann $A = B$.

V.10.

Ist das Verhältnis zu derselben Größe größer als andere Verhältnisse, dann ist die Größe, die in diesem Verhältnis steht, größer und ist das Verhältnis derselben Größe zu einer Größe größer als andere Verhältnisse, dann ist letztere Größe kleiner.

Wenn das Verhältnis von A zu C größer ist als das Verhältnis von B zu C, dann, sage ich, ist A größer als B.



Denn wenn nicht, dann ist A gleich B oder ist A kleiner als B.
A ist nicht gleich B, denn dann verhält sich A zu C wie B zu C.
Da dies nicht zutrifft, ist A nicht gleich B.
A ist nicht kleiner B, denn dann ist das Verhältnis von A zu C kleiner als das Verhältnis von B zu C. Da dies nicht zutrifft, ist A nicht kleiner als B.
Da A weder kleiner noch gleich B ist, ist A größer als B.

Ist das Verhältnis von C zu B größer als das Verhältnis von C zu A, dann, sage ich, ist B kleiner als A.

Denn wenn nicht, dann ist B gleich A oder ist B größer als A.
B ist nicht gleich A, denn dann verhält sich C zu A wie C zu B.
Da dies nicht zutrifft, ist B nicht gleich A.
B ist nicht größer als A, denn dann ist das Verhältnis von C zu B kleiner als das Verhältnis von C zu A. Da dies nicht zutrifft, ist B nicht größer als A.
Da B weder gleich noch größer als A ist, ist B kleiner als A.

Deshalb ist die Größe, die in einem größeren Verhältnis steht als andere, größer und ist diejenige Größe, zu der dieselbe Größe in einem größeren Verhältnis steht als andere, kleiner, was zu zeigen war.

Anmerkung:

Es seien A, B, C Größen.
Wenn $A : C > B : C$, dann $A > B$. Wenn $C : B > C : A$, dann $B < A$.

V.11.

Verhältnisse sind gleich, die demselben Verhältnis gleich sind.

Wenn sich A zu B verhält wie C zu D und sich C zu D verhält wie E zu F, dann, sage ich, verhält sich A zu B wie E zu F.

Es seien die Größen G, H, K gleiche Vielfache von A, C, E und die Größen L, M, N gleiche Vielfache von B, D, F.
Da sich A zu B verhält wie C zu D, da G, H gleiche Vielfache von A, C sind und L, M gleiche Vielfache von B, D, ist G größer als L wenn H größer als M ist, und wenn gleich gleich, und wenn kleiner kleiner.
Da wiederum sich C zu D verhält wie E zu F, da H, K gleiche Vielfache von C, E sind und M, N gleiche Vielfache von D, F, ist H größer als M wenn K größer als N ist, und wenn gleich gleich, und wenn kleiner kleiner.
Da somit H größer als M ist wenn G größer als L ist, und wenn gleich gleich, und wenn kleiner kleiner, ist auch G größer als L wenn K größer als N ist, und wenn gleich gleich, und wenn kleiner kleiner.

Es sind G, K gleiche Vielfache der Größen A, E und L, N gleiche Vielfache der Größen B, F, also verhält sich A zu B wie E zu F.

Deshalb sind Verhältnisse gleich, die demselben Verhältnis gleich sind, was zu zeigen war.

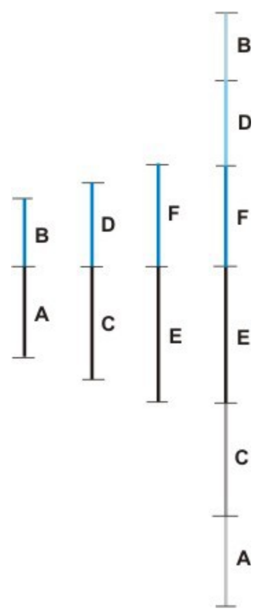
Anmerkung:

Es seien A, B, C, D, E, F Größen. Wenn A : B = C : D und C : D = E : F, dann A : B = E : F.

V. 12.

Stehen mehrere Größen in gleicher Proportion, dann verhalten sich die Vorderglieder zusammen zu den Hintergliedern zusammen wie eines der Vorderglieder zum Hinterglied.

Wenn die Größen A, B, C, D, E, F in Proportion stehen und sich A zu B verhält wie C zu D und wie E zu F, dann, sage ich, verhält sich A zu B wie die Größen A, C, E zusammen zu den Größen B, D, F zusammen.Es seien die Größen G, H, K gleiche Vielfache von A, C, E und die Größen L, M, N gleiche Vielfache von B, D, F.



Da sich A zu B verhält wie C zu D und wie E zu F, da G, H, K gleiche Vielfache von A, C, E sind und L, M, N gleiche Vielfache von B, D, F, ist G größer als L wenn H größer als M und K größer als N ist, und wenn gleich gleich, und wenn kleiner kleiner.
Somit ist G größer als L, wenn G, H, K zusammen größer als L, M, N zusammen sind, und wenn gleich gleich, und wenn kleiner kleiner.

Da G das Vielfache von A ist und G, H, K die gleichen Vielfachen von A, C, E sind, und da dann wenn jede von mehreren Größen das gleiche Vielfache einer von gleich vielen anderen Größen ist, dann die einen zusammen das gleiche Vielfache von den anderen zusammen ergeben, deshalb sind G, H, K zusammen ebenfalls das gleiche Vielfache von A, C, E zusammen.
Aus den gleichen Gründen sind, da L das Vielfache von B ist, L, M, N zusammen das gleiche Vielfache von B, D, F zusammen. Also verhält sich A zu B wie A, C, E zusammen zu B, D, F zusammen.

Deshalb verhalten bei mehreren Größen in Proportion die Vorderglieder zusammen zu den Hintergliedern zusammen wie eines der Vorderglieder zum Hinterglied, was zu zeigen war.

Anmerkung:

Sind Größen A : B = C : D = E : F, dann A : B = (A+C+E) : (B+D+F).

Beispiel:

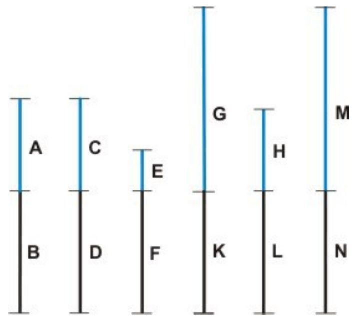
Da $\frac{2}{3} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12}$ *ist* $\frac{2}{3} = \frac{2+6+8}{3+9+12} = \frac{16}{24}$

V.13.

Steht eine Größe zu einer anderen im gleichen Verhältnis wie eine dritte zu einer vierten, hat aber die dritte zur vierten Größe eine größeres Verhältnis wie eine fünfte zu einer sechsten, dann ist das Verhältnis der ersten zur zweiten größer als das Verhältnis der fünften zur sechsten.

Wenn das Verhältnis von A zu B gleich dem von C zu D ist und das Verhältnis von C zu D größer ist als das von E zu F, dann, sage ich, ist das Verhältnis von A zu B größer als das von E zu F.

Denn da das Verhältnis von C zu D größer ist als das von E zu F, ist ein Vielfaches von C größer als das Vielfache von D, obwohl E vervielfacht wie C nicht größer ist als F vervielfacht wie D [wie Def. 7].



Es seien G, H Vielfache von C, E und K, L Vielfache von D, F so, dass G größer ist als K, aber H nicht größer als L ist. So oft dann G das Vielfache von C ist, so oft sei M das Vielfache von A und ebenso oft K von D und N von B.

Da sich A zu B verhält wie C zu D, da auch M, G gleiche Vielfache von A, C sind und N, K gleiche Vielfache von B, D, ist M größer als N wenn G größer als K ist, und wenn gleich gleich, und wenn kleiner kleiner.
Da G größer als K ist, ist M größer als N, dagegen H nicht größer als L.
Da M, H gleiche Vielfache von A, E sind und N, L gleiche Vielfache von B, F, ist das Verhältnis von A zu B größer als das von E zu F.

Deshalb ist dann, wenn eine Größe im gleichen Verhältnis zu einer zweiten steht wie eine dritte zu einer vierten, das Verhältnis der dritten zur vierten aber größer ist als das einer fünften zu einer sechsten, das Verhältnis der ersten Größe zur zweiten größer als das der fünften zur sechsten, was zu zeigen war.

Anmerkung: Sind Größen $A : B = C : D$ und $C : D > E : F$, dann $A : B > E : F$.

V. 14.

Steht eine Größe zu einer anderen im gleichen Verhältnis wie eine dritte zu einer vierten und ist die erste größer als die dritte, dann ist auch zweite größer als die vierte, und wenn gleich gleich, und wenn kleiner kleiner.

Wenn sich A zu B verhält wie C zu D und A größer ist als C, dann, sage ich, ist B größer als D.

Denn, da A größer ist als C, ist das Verhältnis von A zu B größer als das von C zu B.
Da sich A zu B verhält wie C zu D, ist somit das Verhältnis von C zu D größer als das von C zu B und damit B größer als D. Ist A gleich C, dann ist ebenso zu zeigen, dass B gleich D ist und ebenso wenn A kleiner als C ist, auch B kleiner als D ist.

Deshalb ist dann, wenn eine Größe zu einer anderen im gleichen Verhältnis steht wie eine dritte zu einer vierten und die erste größer ist als die dritte, auch die zweite größer als die vierte, und wenn gleich gleich, und wenn kleiner kleiner, was zu zeigen war.

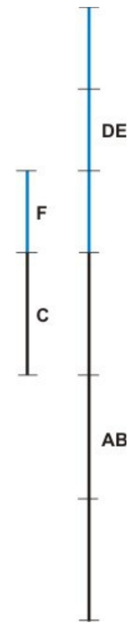
Anmerkung:

$A : B = C : D$. Wenn $A > C$, dann $B > D$; wenn $A = C$, dann $B = D$; wenn $A < C$, dann $B < D$.

V.15.

Sind Größen gleiche Vielfache ihrer Teile, dann stehen die Teile im gleichen Verhältnis wie die ganzen Größen.

Wenn AB das gleiche Vielfache von C ist wie DE das Vielfache von F, dann, sage ich, verhält sich C zu F wie AB zu DE.



Denn wenn AB von C und DE von F gleiche Vielfache sind, dann ist das gleiche Vielfache von C der AB gleich wie das Vielfache von F der DE.
Wird AB in Teile AG, GH, HB geteilt, die C gleich sind, und DE in Teile DK, KL, LE, die F gleich sind, dann sind AB und DE in gleich viele Teile geteilt.
Da AG gleich GH und gleich HB ist, und auch DK gleich KL und gleich LE ist, verhält sich AG zu DK wie GH zu KA und wie HB zu LE.
Da mehrere Größen, die in Proportion stehen, sich verhalten wie die Vorderglieder zusammen zu den Hintergliedern zusammen wie eines der Vorderglieder zum Hinterglied, verhält sich AG zu DK wie AB zu DE.
Da AG gleich C ist und DK gleich F, verhält sich C zu F wie AB zu DE.

Deshalb stehen Größen, die gleiche Vielfache ihrer Teile sind, im gleichen Verhältnis wie ihre Teile, was zu zeigen war.

Anmerkung:

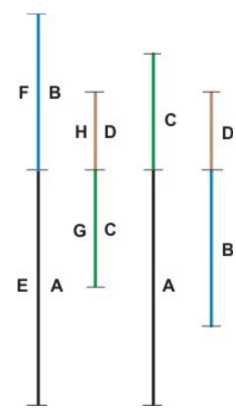
Gibt es ein n so, dass AB = n · C und DE = n · F, dann ist AB : DE = (n · C) : (n · F) = C : F.

V.16.

Stehen vier Größen in Proportion, dann stehen sie auch in umgeordneter Proportion.

Wenn die vier Größen A, B, C, D in Proportion stehen und sich A zu B verhält wie C zu D, dann, sage ich, verhält sich, in umgeordneter Proportion, A zu C wie B zu D.

Es seien E, F gleiche Vielfache von A, B und G, H gleiche Vielfache von C, D.
Da dann A ebenso oft Teil von E ist wie B von F und sich gleich oft geteilte Größen sich verhalten wie ihre Teile, verhält sich A zu B wie E zu F.
Es verhält sich A zu B wie C zu D, also verhält sich C zu D wie E zu F.
Da C, D gleich oft Teile von G, H sind, verhält sich C zu D wie G zu H.
Es verhält sich C zu D wie E zu F, also verhält sich E zu F wie G zu H.



Da dann, wenn eine Größe zu einer anderen im gleichen Verhältnis steht wie eine dritte zu einer vierten und die erste größer als die dritte ist, dann auch die zweite größer als die vierte ist, und wenn gleich gleich, und wenn kleiner kleiner ist, ist E größer als G wenn F größer als H ist, und wenn gleich gleich, und wenn kleiner kleiner.
Es sind E, F von A, B gleiche Vielfache und G, H von C, D, also verhält sich A zu C wie B zu D.

Deshalb stehen vier Größen, die in Proportion stehen, auch in umgeordneter Proportion, was zu zeigen war.

Anmerkung: Wenn Größen A : B = C : D, dann auch A : C = B : D.

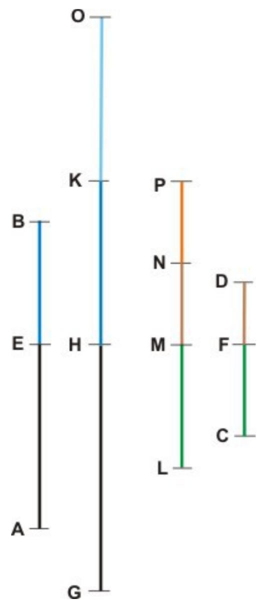
Beispiel: *Da* $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ *ist* $\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$

V.17.

Stehen Größen in den gleichen Verhältnissen, dann sind auch die verkleinerten Verhältnisse unter sich gleich.

Wenn die Größe AB, zusammengesetzt mit BE, und CD, zusammengesetzt mit DF, in Proportion stehen und sich AB zu BE verhält wie CD zu DF, dann, sage ich, verhält sich die abgeteilte Größe AE zu BE wie die abgeteilte Größe CF zu DF.

Seien die Größen GH, HK, LM, MN gleiche Vielfache von AE, EB, CF, FD und die Größen KO, NP gleiche Vielfache von EB, FD.



Da das gleiche Vielfache von AE gleich GH, wie das Vielfache von EB gleich HK, wie das Vielfache von CF gleich LM und wie das Vielfache von FD gleich MN ist, ist das Vielfache von AB gleich GK und das Vielfache von CD gleich LN und es sind GK, LN gleiche Vielfache von AB, CD.

Da das gleiche Vielfache von EB gleich HK und gleich KO ist, und das Vielfache von FD gleich MN und gleich NP ist, sind die Größen HO, MP gleiche Vielfache von EB, FD.

Da sich AB zu BE verhält wie CD zu DF und GK, LN gleiche Vielfache von AB, CD sind, sowie HO, MP gleiche Vielfache von EB, FD sind, ist GK größer als HO wenn LN größer als MP ist, und wenn gleich gleich, und wenn kleiner kleiner.
Ist nun GK größer als HO, dann ist, beiden das gleiche HK weggenommen, GH größer als KO.
Ist LN größer als MP dann ist, beiden das gleiche MN weggenommen, LM größer als NP.
Ist GK gleich HO und LN gleich MP, ist ebenso zu zeigen, dass GH gleich KO und LM gleich NP ist, und ebenso wenn GK kleiner HO und LN kleiner MP ist, dann GH kleiner als KO und LM kleiner als NP ist.

Da GH, LM gleiche Vielfache von AE, CF sind und KO, NP gleiche Vielfache von EB, FD, verhält sich AE zu EB wie CF zu FD.

Deshalb sind auch die verkleinerten Verhältnisse gleich, wenn Größen in gleichen Verhältnissen stehen, was zu zeigen war.

Anmerkung:

Ist $AE = AB - EB$, und $CF = CD - FD$ und $AB : EB = CD : FD$, dann $AE : EB = CF : FD$.

Ist der Quotient $AB : EB = q$, dann ist der Quotient $(AB - EB) : EB = q - 1$.

Beispiel: Da $15\text{ m} : 10\text{ m} = 3\text{ m} : 2\text{ m}$, ist

$(15\text{ m} - 10\text{ m}) : 10\text{ m} = (3\text{ m} - 2\text{ m}) : 2\text{ m}$, somit $5\text{ m} : 10\text{ m} = 1\text{ m} : 2\text{ m}$.

V.18.

Stehen Größen in gleichen Verhältnissen, dann sind auch die vergrößerten Verhältnisse unter sich gleich.

Wenn die abgeteilten Größen AE, EB, CF, FD in Proportion stehen und sich AE zu EB verhält wie CF zu FD, dann, sage ich, verhält sich die zusammengesetzte Größe AB zu EB wie die zusammengesetzte Größe CD zu FD.

Denn wenn sich CD zu DF nicht verhält wie AB zu BE, ist das Verhältnis von AB zu BE gleich dem Verhältnis von CD zu einer Größe, die kleiner oder größer ist als DF.

Es sei DG diese Größe und zunächst DG kleiner als DF.
Es verhält sich also dann AB zu BE wie CD zu DG.
Da zu Größen, die in gleichen Verhältnissen stehen, auch die verkleinerten Verhältnisse gleich sind, verhält sich dann AE zu EB wie CG zu GD.
Da sich AE zu EB verhält wie CF zu FD, verhält sich dann CG zu GD wie CF zu FD. Ist dann die erste Größe CG größer als die dritte Größe CF, ist auch die zweite GD größer als die vierte FD, was nicht möglich ist.
Also ist das Verhältnis von AB zu BE nicht gleich einem Verhältnis von CD zu einer Größe, die kleiner ist als DF.

Ist DG größer als DF, dann ist ebenso zu zeigen, dass das Verhältnis von AB zu BE nicht gleich einem Verhältnis von CD zu einer Größe ist, die größer als DF ist.
Also verhält sich AB zur Größe BE wie CD zur Größe DF.

Deshalb sind auch die vergrößerten Verhältnisse gleich, wenn Größen in gleichen Verhältnissen stehen, was zu zeigen war.

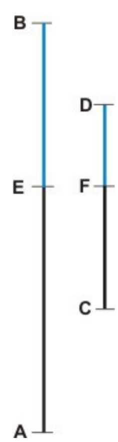
Anmerkung:

Ist $AB = AE+EB$, und $CD = CF+FD$ und $AE : EB = CF : FD$, dann $AB : EB = CD : FD$.
Ist der Quotient $AE : EB = q$, dann ist der Quotient $(AE+EB) : EB = q+1$.

Beispiel: *Da* $4+6 = 10$ *und* $2+3 = 5$ *und* $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ *ist* $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

V.19.

Stehen Größen im gleichen Verhältnis, wie von ihnen abgeteilte Größen, dann stehen auch die Reste im gleichen Verhältnis.



Steht die Größe AB zur Größe CD im gleichen Verhältnis wie die von ihnen abgeteilten Größen AE, CF, dann, sage ich, stehen die Reste EB, FD im gleichen Verhältnis wie AB, CD.

Da die Verhältnisse AB zu CD und AE zu CF gleich sind, sind, nach Umordnung, die Verhältnisse AB zu AE und CD zu CF gleich, und sind davon die verkleinerten Verhältnisse BE zu EA und DF zu CF gleich. Nach deren Umordnung sind die Verhältnisse BE zu DF und EA zu CF gleich.
Da sich AE zu CF verhält wie AB zu CD, verhält sich EB zu FD wie AB zu CD.

Deshalb stehen dann, wenn Größen im gleichen Verhältnis stehen wie von ihnen abgeteilten Größen, auch die Reste im gleichen Verhältnis, was zu zeigen war.

Zusatz:

Da umgekehrte Verhältnisse gleicher Verhältnisse gleich sind, sind offensichtlich die Verhältnisse von ganzen Größen zu abgeteilten Größen im gleichen Verhältnis gleich, was zu zeigen war.

Anmerkung:

Ist AB = AE+EB, CD = CF+FD und AB : CD = AE : CF, dann EB : FD = AB : CD.

Ist (AB – EB) : AB = (CD – FD) : CD, dann auch AB : (AB – EB) = CD : (CD – FD).

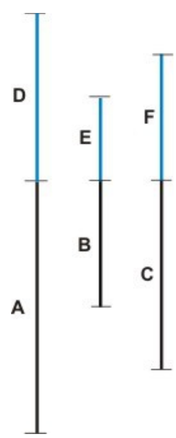
Beispiel: *Da* $10 = 4+6$ *und* $5 = 2+3$ *und* $\frac{10}{5} = \frac{4}{2}$ *ist* $\frac{6}{3} = \frac{10}{6}$

da $\frac{10-6}{10} = \frac{5-3}{5}$ *ist* $\frac{10}{10-6} = \frac{5}{5-3}$

V.20.

Stehen drei Größen wie ebenso viele andere in paarweise gleichen Verhältnissen und ist die erste größer als die dritte, dann ist auch die vierte größer als die sechste, und wenn gleich gleich, und wenn kleiner kleiner.

Wenn die drei Größen A, B, C wie D, E, F in paarweise gleichen Verhältnissen stehen, verhält sich also A zu B wie D zu E und B zu C wie E zu F, dann, sage ich, ist A größer als C, ist auch D größer als F, und ist A gleich C, ist auch D gleich F, und wenn A kleiner als C, dann ist auch D kleiner als F.



Ist A größer als C, die Größe B aber beliebig, dann ist, da die größere zur selben Größe im größeren Verhältnis steht wie die kleinere, das Verhältnis von A zu B größer als das von C zu B.
Da sich A zu B verhält wie D zu E, verhält sich D zu E wie C zu B.
Da sich C zu B verhält wie F zu E, ist das Verhältnis von D zu E größer als das von F zu E.
Da die Größen, die im größeren Verhältnis zur gleichen Größe stehen, größer sind, ist D größer als F.
Auf gleiche Weise ist zu zeigen, dass D gleich F, wenn A gleich C ist und dass D kleiner F ist, wenn A kleiner als C ist.

Deshalb ist dann, wenn drei Größen wie ebenso viele andere in paarweise gleichen Verhältnissen stehen und die erste größer ist als die dritte, auch die vierte größer als die sechste, und wenn gleich gleich, und wenn kleiner kleiner, was zu zeigen war.

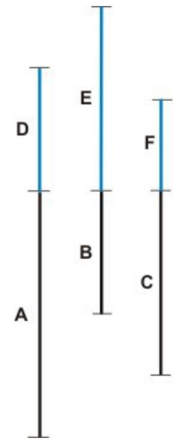
Anmerkung:

Sind Größen A : B = D : E und B : C = E : F
und ist A > C, dann auch D > F,
A = C, dann auch D = F,
A < C, dann auch D < F.

V.21.

Stehen drei Größen mit ebenso vielen anderen in kreuzweiser Proportion und ist die erste größer als die dritte, dann ist auch die vierte größer als die sechste, und wenn gleich gleich, und wenn kleiner kleiner.

Wenn die drei Größen A, B,C zu ebenso vielen Größen D, E, F in kreuzweiser Proportion stehen, verhält sich also A zu B wie E zu F und B zu C wie D zu E, dann, sage ich, ist A größer als C, dann ist auch D größer als F, und wenn gleich gleich, und wenn größer größer.



Denn ist A größer als C, die Größe B aber beliebig, dann ist das Verhältnis von A zu B größer als das Verhältnis von C zu B. Es verhält sich A zu B wie E zu F und, in kreuzweiser Proportion, C zu B wie E zu D. Also ist das Verhältnis von E zu F größer als das Verhältnis von E zu D.
Da die Größe, zu der die gleiche Zahl in größerem Verhältnis steht, kleiner ist, ist F kleiner als D, somit D größer als F.
Auf gleiche Weise ist zu zeigen, dass D gleich F, wenn A gleich C ist und dass D kleiner F ist, wenn A kleiner als C ist.

Deshalb ist dann, wenn drei Größen mit ebenso viel anderen in kreuzweiser Proportion stehen und die erste größer ist als die dritte, auch die vierte größer als die sechste, und wenn gleich gleich, und wenn kleiner kleiner, was zu zeigen war.

Anmerkung:

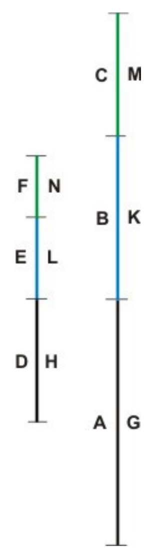
Sind Größen $A : B = E : F$ und $B : C = D : E$

und ist $A > C$, dann auch $D > F$, ist $A = C$, dann auch $D = F$, und ist $A < C$, dann auch $D < F$.

V.22.

Stehen mehrere Größen mit gleich vielen anderen paarweise in gleichen Verhältnissen, dann stehen die ersten und letzten Glieder in Proportion aufgrund Gleichheit.

Wenn mehrere Größen A, B, C paarweise mit anderen D, E, F in gleichen Verhältnissen stehen, wenn also A zu B sich verhält wie D zu E und B zu C wie E zu F, dann, sage ich, steht A zu C und D zu F in Proportion aufgrund Gleichheit.



Seien G, H gleiche Vielfache von A, D, sowie K, L gleiche Vielfache von B, E und M, N gleiche Vielfache von C, F. Da sich A zu B verhält wie D zu E, verhält sich dann G zu K wie H zu L.
Aus den gleichen Gründen verhält sich K zu M wie L zu N.
Da nun die drei Größen G, K, M zu ebenso vielen anderen anderen H, L, N paarweise in gleichen Verhältnissen stehen, ist dann, wenn G größer als M ist, auch H größer als N, und wenn gleich gleich, und wenn kleiner kleiner.
G, H sind gleiche Vielfache von A, D, sowie M, N gleiche Vielfache von C, F, also verhält sich A zu C wie D zu F.

Deshalb stehen dann, wenn Größen mit gleich vielen paarweise in gleichen Verhältnissen stehen, die ersten und letzten Größen in Proportion aufgrund Gleichheit, was zu zeigen war.

Anmerkung: Wenn Größen $A : B = D : E$ und $B : C = E : F$, dann $A : C = D : F$.

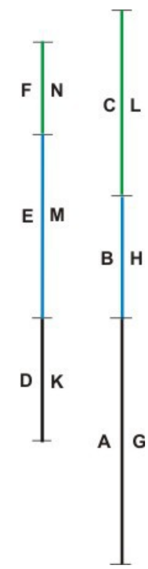
Beispiel: *Da* $\frac{2}{4} = \frac{4}{8}$ *und* $\frac{4}{6} = \frac{8}{12}$ *ist* $\frac{2}{6} = \frac{4}{12}$

V.23.

Stehen drei Größen mit gleich vielen anderen in kreuzweiser Proportion, dann stehen die ersten und letzten Glieder in Proportion aufgrund Gleichheit.

Wenn drei Größen A, B, C mit gleich vielen anderen D, E, F in kreuzweiser Proportion stehen, wenn also A sich zu B verhält wie E zu F und B sich zu C verhält wie D zu E, dann, sage ich, stehen A zu C und D zu F in Proportion aufgrund Gleichheit.

Sind G, H, K gleiche Vielfache von A, B, D und L, M, N gleiche Vielfache von C, E, F, dann verhält sich A zu B wie G zu H und E zu F wie M zu N. Da sich A zu B auch verhält wie E zu F, verhält sich G zu H wie M zu N.



Da sich B zu C verhält wie D zu E, verhält sich, nach Umordnung, B zu D wie C zu E.
Da H, K gleiche Vielfache von B, D sind, verhält sich B zu D wie H zu K. Es verhält sich B zu D auch wie C zu E, also verhält sich H zu K wie C zu E.

Da L, M gleiche Vielfache von C, E sind, verhält sich C zu E wie L zu M.
Es verhält sich C zu E auch wie H zu K, also verhält sich H zu K wie L zu M und, nach Umordnung, verhält sich H zu L wie K zu M.
Da, wie gezeigt, G zu H sich verhält wie M zu N, stehen die drei Größen G, H, L mit den Größen K, M, N paarweise in den gleichen Verhältnissen der kreuzweisen Proportion.
Ist deshalb G größer als L, dann ist K größer als N, und wenn gleich gleich, und wenn kleiner kleiner.
Es sind G, K gleiche Vielfache von A, D und L, N gleiche Vielfache von C, F, somit verhält sich A zu C wie D zu F.

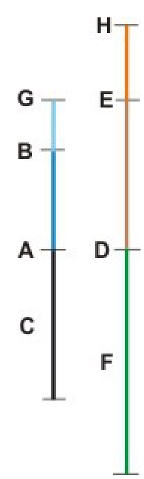
Deshalb stehen dann, wenn drei Größen mit gleich vielen anderen in kreuzweiser Proportion stehen, die ersten und letzten Größen in Proportion aufgrund Gleichheit, was zu zeigen war.

Anmerkung: Wenn Größen $A : B = E : F$ und $B : C = D : E$, dann $A : C = D : F$.

Beispiel: *Da* $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ *und* $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ *ist* $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

V.24.

Steht eine Größe zu einer anderen im gleichen Verhältnis wie eine dritte zu einer vierten und steht eine fünfte zur zweiten wie eine sechste zur vierten, dann stehen die erste und fünfte zusammen im gleichen Verhältnis zur zweiten wie die dritte und sechste zusammen zur vierten.



Wenn sich AB zu C verhält wie DE zu F und BG zu C wie EH zu F, dann, sage ich, verhält sich AG zu C wie DH zu F.

Denn da die Verhältnisse von BG zu C und EH zu F gleich sind, sind die umgekehrten Verhältnisse C zu BG und F zu EH gleich.

Da die Verhältnisse AB zu C und DE zu F gleich sind, sowie die Verhältnisse

C zu BG und F zu EH, verhält sich AB zu BG wie DE zu EH.

Es sind zu gleichen Verhältnissen auch die vergrößerten Verhältnisse gleich und somit verhält sich AG zu BG wie DH zu EH.

Da sich BG zu C verhält wie EH zu F, verhält sich somit AG zu C wie DH zu F.

Deshalb stehen, wenn eine Größe sich verhält zu einer andern wie eine dritte zu einer vierten und eine fünfte zur zweiten wie eine sechste zur vierten, dann die erste und fünfte zusammen zur zweiten wie die dritte und sechste zusammen zur vierten, was zu zeigen war.

Anmerkung:

Sind Größen AB : C = DE : F und BG : C = EH : F, dann (AB+BG) : C = (DE+EH) : F.

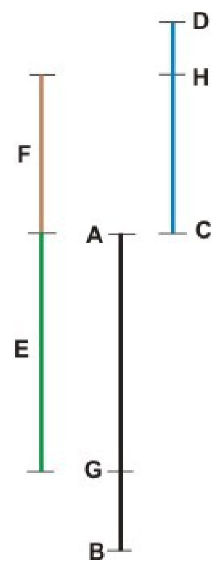
Beispiel: $\quad Da \ \frac{3}{4} = \frac{6}{8} \ und \ \frac{2}{4} = \frac{4}{8} \ ist \ \frac{3+2}{4} = \frac{6+4}{8}$

V.25.

Von vier Größen in Proportion sind die größte und die kleinste zusammen größer als die beiden übrigen.

Wenn die vier Größen AB, CD, E, F in Proportion stehen und sich AB zu CD verhält wie E zu F, wobei AB die größte und F die kleinste ist, dann, sage ich, sind AB und F zusammen größer als CD und E zusammen.

Da F die kleinste der Größen ist, ist E größer als F und somit AB größer als CD.



Es sei AG gleich E und CH gleich F.

Da sich AB zu CD verhält wie E zu F, verhält sich dann AB zu CD wie AG zu CH, womit sich auch die abgeteilten GB zu HD verhalten wie AB zu CD. Da AB größer ist als CD ist, ist GB größer als HD.
Da AG gleich E und CH gleich F ist, sind AG und F zusammen größer als CH und E zusammen.
Den größeren AG und F zusammen das größere GB hinzugefügt und den kleineren CH und E zusammen das kleinere HD hinzugefügt, sind dann die Größen AB und F zusammen größer als CD und E zusammen.

Deshalb sind von vier Größen in Proportion die kleinste und die größte zusammen größer als die beiden übrigen, was zu zeigen war.

Anmerkung:

Sind Größen AB : CD = E : F und AB > CD, E > F, dann AB+F > CD+E.

Beispiel: $\quad Da \ \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \ und \ 6 > 4 \ und \ 3 > 2 \ ist \ 6+2 > 4+3$