Euklid: Stoicheia (Euklids Elemente)

Buch VI.

Über eingefügte Hypertextmarkierungen kann der griechische Text in der Fassung von I. L. Heiberg aufgerufen werden.

Erklärungen.

1. Eine gradlinige Figur ist einer anderen ähnlich, wenn jeder ihrer Winkel gleich einem Winkel der anderen ist und die jeweils zwischen gleichen Winkeln liegenden Seiten im gleichen Verhältnis stehen.
2. Eine Figur ist wechselseitig proportional zu einer anderen, wenn die Größen, die die Figur ergeben, zu den Größen der anderen Figur in zueinander umgekehrten Verhältnissen stehen.
3. Eine gerade Strecke ist stetig geteilt, wenn sich der kleinere Abschnitt zum größeren verhält wie der größere zur ganzen Strecke.
4. Die Höhe einer Figur ist die größte Senkrechte, die von einem Punkt der Figur auf der Geraden mit der Grundseite zu errichten ist.

Anmerkungen:

zu 2:
Ein Parallelogramm ist durch einen Winkel und zwei daran liegende Seiten bestimmt.
Stehen die Seiten am gleichen Winkel in zueinander umgekehrten Verhältnissen zu den Seiten am gleichen Winkel im anderen Parallelogramm, dann sind die Parallelogramme flächengleich und wechselseitig proportional zueinander [Satz VI.14.].

Ein Dreieck ist durch einen Winkel und zwei Seiten bestimmt.
Stehen die Seiten am gleichen Winkel in zueinander umgekehrten Verhältnissen zu den Seiten am gleichen Winkel im anderen Dreieck, dann sind die Dreiecke flächengleich und wechselseitig proportional zu einander [Satz VI.15.].

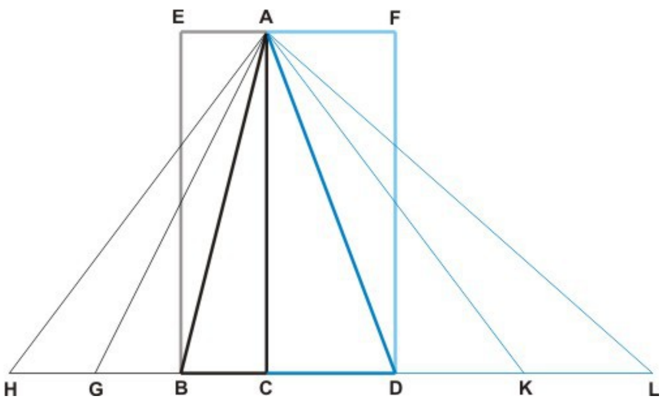
Beispiel:
Die Seiten $a = 5$ und $b = 9$ eines Rechtecks stehen zu den Seiten $c = 3$ und $d = 15$ eines anderen Rechtecks in den Verhältnissen $5 : 3$ und $9 : 15$.
Es ist aber $5 : 3 = 15 : 9$, und die Größen stehen in Proportion.
Damit sind die Rechtecke flächengleich und nicht gleichseitig, sondern wechselseitig proportional zueinander.

zu 3:
Es ist eine Strecke $A = B+C$, mit $B > C$, stetig geteilt, wenn $A : B = B : C$.

VI.1.

Dreiecke und Parallelogramme mit gleicher Höhe stehen im gleichen Verhältnis untereinander wie ihre Grundseiten.

Wenn die Dreiecke ABC, ACD und die Parallelogramme EC und CF die gleiche Höhe AC haben, dann, sage ich, stehen die Grundseiten BC, CD, die Dreiecke ABC, ACD und die Parallelogramme EC, CF im gleichen Verhältnis.



Denn wird BD nach beiden Seiten bis H und L verlängert, und BH in der BC gleiche Teile BG, GH geteilt, sowie DL in der CD gleiche Teile DK, KL, und werden die Strecken AG, AH, AK, AL gezogen, dann sind die Strecken CB, BG, GH gleich und ebenso die Dreiecke AHG, AGB, ABC [wie I.38.].Da die Grundseite HC ein Vielfaches der Grundseite BC ist, ist das Dreieck AHC ein Vielfaches des Dreiecks ABC und da die Grundseite LC ein Vielfaches der Grundseite CD ist, ist ebenso das Dreieck ALC ein Vielfaches des Dreiecks ACD.

Ist HC gleich CL, dann ist das Dreieck AHC
gleich dem Dreieck ACL, und wenn größer größer, und wenn kleiner kleiner.
Da die Größen HC, CL gleiche Vielfache von BC, CD wie die Dreiecke AHC, ACL von ABC, ACD der Größe nach sind, stehen die Grundseiten BC und CD im gleichen Verhältnis wie die Dreiecke ABC und ACD der Größe nach.

Da das Parallelogramm EC gleich dem doppelten Dreieck ABC und das Parallelogramm FC gleich dem doppelten Dreieck ACD ist, verhält sich das Dreieck ABC zu ACD wie das Parallelogramm EC zu FC.
Damit stehen die Grundseiten BC und CD im gleichen Verhältnis wie die Parallelogramme EC und FC der Größe nach.

Deshalb stehen Dreiecke und Parallelogramme mit gleicher Höhe im gleichen Verhältnis wie ihre Grundseiten, was zu zeigen war.

VI.2.

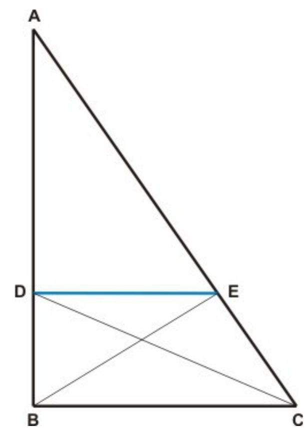
Eine Parallele zu einer Seite des Dreiecks teilt die beiden anderen Seiten im gleichen Verhältnis und werden im Dreieck zwei Seiten im gleichen Verhältnis geteilt, dann ist die Gerade durch die teilenden Punkte parallel zur übrigen Seite.

Wenn im Dreieck ABC parallel zur Seite BC die Gerade DE gezogen wird, dann, sage ich, verhält sich BD zu DA wie CE zu EA.

Denn wenn BE und CD eingetragen werden, sind die Dreiecke BDE und CDE gleich der Größe nach, da sie die gleiche Grundseite DE haben und zwischen den Parallelen DE und BC liegen, und stehen zum Dreieck ADE, im gleichen Verhältnis, somit verhält sich BDE zu ADE wie CDE zu ADE.

Das Dreieck BDE verhält sich zu ADE wie die Grundseite BD zu DA, da beide Dreiecke die gleiche Höhe haben, die als Senkrechte auf AB durch den Punkt E zu errichten ist.
Aus dem gleichen Grund verhält sich das Dreieck CDE zu ADE wie die Grundseite CE zu EA. Damit verhält sich BD zu DA wie CE zu EA.

Werden die Seiten AB und AC des Dreiecks ABC im gleichen Verhältnis geteilt, verhält sich also BD zu DA wie CE zu EA, dann, sage ich, ist die Gerade DE parallel zu BC.



Durch dieselben Vergleiche ist zu zeigen, dass sich die Grundseite BD zu DA verhält wie das Dreieck BDA zu ADE und die Grundseite CE zu EA wie das Dreieck CDE zu ADE.
Somit verhält sich das Dreieck BDE zu ADE wie das Dreieck CDE zu ADE.

Da die Dreiecke BDE, CDE im gleichen Verhältnis zu ADE stehen, sind die Dreiecke BDE und CDE gleich und haben dieselbe Grundseite DE.
Da gleiche Dreiecke mit derselben Grundseite zwischen Parallelen liegen, sind die Geraden DE und BC parallel.

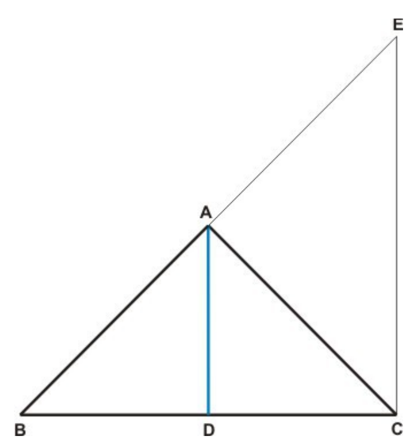
Deshalb teilt eine Parallele zu einer Seite des Dreiecks die beiden anderen Seiten im gleichen Verhältnis und ist dann, wenn zwei Seiten im gleichen Verhältnis geteilt werden, die Gerade durch die teilenden Punkte parallel zur übrigen Seite, was zu zeigen war.

VI.3.

Wird der Winkel eines Dreiecks in zwei gleiche Teile geteilt, dann teilt die Winkelhalbierende die dem Winkel gegenüber liegende Seite im gleichen Verhältnis in dem die beiden übrigen Seiten stehen, und wird die Grundseite im gleichen Verhältnis geteilt, in dem die übrigen Seiten des Dreiecks stehen, dann wird der Winkel über der Grundseite von der Geraden durch den Punkt, an dem der Winkel liegt, und den teilenden Punkt, in zwei gleiche Teile geteilt.

Wenn im Dreieck ABC der Winkel BAC durch AD in zwei gleiche Teile geteilt wird, dann, sage ich, verhält sich BD zu CD wie BA zu AC.

Denn wird durch C die zu DA parallele CE gezogen und BA bis zum Schnittpunkt E verlängert, werden die Parallelen AD und EC von AC geschnitten, weshalb die Winkel ACE und CAD gleich sind.
Da, wie vorausgesetzt, der Winkel CAD gleich dem Winkel BAD ist, sind damit die Winkel BAD und ACE gleich.
Da die Parallelen AD, EC von der Geraden BAE geschnitten werden, ist der äußere Winkel BAD gleich dem inneren Winkel AEC.
Da, wie gezeigt, die Winkel ACE und BAD gleich sind, sind somit die Winkel ACE und AEC gleich und ist AE gleich EC.
Im Dreieck BCE ist die Seite EC parallel zu AD, also verhält sich BD zu DC wie BA zu AE.
Da AE gleich AC ist, verhält sich BD zu DC wie BA zu AC.



Verhält sich aber BD zu DC wie BA zu AC und ist die Strecke AD gezogen, dann, sage ich, ist der Winkel BAC durch AD in zwei gleiche Teile geteilt.

Da im Dreieck BCE die Seite EC parallel zu AD ist, verhält sich BD zu DC wie BA zu AE [wie VI.2.] und BA zu AC wie BA zu AE, womit AC gleich AE ist.
Da die Winkel AEC und ACE gleich sind, sind auch die Winkel AEC und BAD gleich, sowie die Winkel ACE und CAD, womit die Winkel BAD und CAD gleich sind.
Also ist der Winkel BAC durch AD in zwei gleiche Teile geteilt.

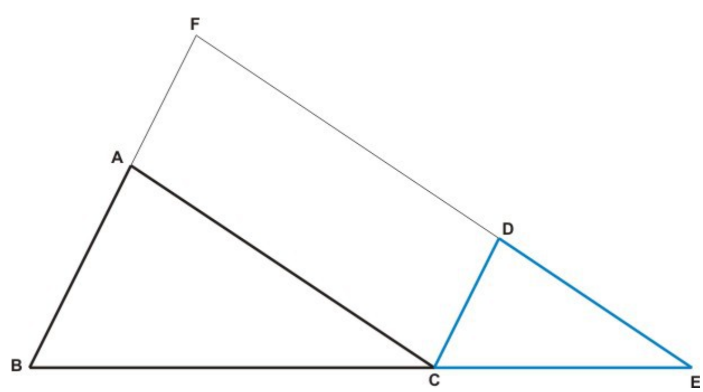
Deshalb wird im Dreieck die einem in zwei gleiche Teile geteilten Winkel gegenüber liegende Seite in dem Verhältnis geteilt, in dem die beiden übrigen Seiten stehen und wird die Grundseite in dem Verhältnis geteilt, in dem die übrigen Seiten stehen, dann wird der Winkel über der Grundseite von der Geraden durch den Punkt, an dem der Winkel liegt, und den teilenden Punkt, in zwei gleiche Teile geteilt, was zu zeigen war.

VI.4.

In gleichwinkligen Dreiecken stehen die Seiten, die gleichen Winkeln gegenüber liegen, im gleichen Verhältnis zu den Seiten, mit denen sie gleiche Winkel einschließen.

Wenn in den Dreiecken ABC, DCE der Winkel ABC gleich DCE, der Winkel BAC gleich CDE und der Winkel ACB gleich CED ist, dann, sage ich, verhalten sich die Seiten AB zu BC wie DC zu CE, die Seiten BC zu CA wie CE zu ED, sowie BA zu AC wie CD zu DE.

Denn wenn CE eine Verlängerung von BC ist, sind die Winkel ABC und ACB zusammen kleiner als zwei rechte Winkel und, da ACB gleich DEC ist, sind die Winkel ABC und DEC zusammen kleiner als zwei rechte.
Die Seiten BA, ED, sind zu verlängern und schneiden sich dann im Punkt F.
Da die Winkel DCE und ABC gleich sind, sind BF und CD parallel.
Ebenso sind, da die Winkel ACB und DEC gleich sind, AC und FE parallel.
FACD ist somit ein Parallelogramm und damit ist FA gleich DC und AC gleich FD.



Da im Dreieck FBE die Seite FE parallel zu AC ist, verhält sich BA zu AF wie BC zu CE.
Da FA gleich CD ist, verhält sich BA zu CD wie BC zu CE und, nach Umordnung, AB zu BC wie DC zu CE.
Es sind CD und BF parallel, somit verhält sich BC zu CE wie FD zu DE.
Da FD gleich AC ist, verhält sich BC zu CE wie AC zu DE und, nach Umordnung, BC zu CA wie CE zu ED.
Da, wie gezeigt, AB sich zu BC verhält wie DC zu CE und BC zu CA wie CE zu ED, verhält sich BA zu AC wie CD zu DE.

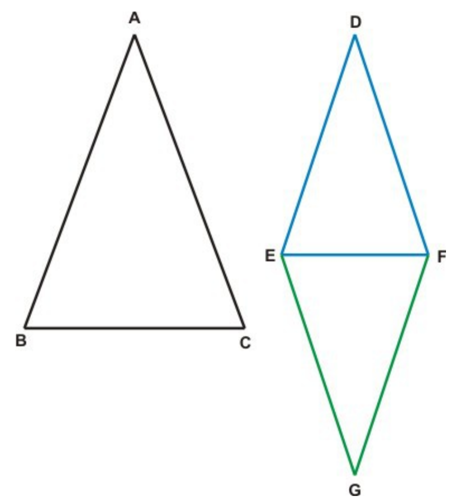
Deshalb stehen in gleichwinkligen Dreiecken die Seiten, die gleichen Winkeln gegenüber liegen, im gleichen Verhältnis zu den Seiten, mit denen sie gleiche Winkel einschließen, was zu zeigen war.

VI.5.

Stehen die Seiten zweier Dreiecke in Proportion, dann sind sie gleichwinklig, wobei diejenigen Winkel gleich sind, die den entsprechenden Seiten in Proportion gegenüber liegen.

Wenn die Seiten der Dreiecke ABC und DEF in Proportion stehen, sich also AB zu BC verhält wie DE zu EF, sich BC zu CA verhält wie EF zu FD und sich BA zu AC verhält wie ED zu DF, dann, sage ich, sind die Dreiecke ABC und DEF gleichwinklig, wobei diejenigen Winkel gleich sind, die den der Proportion entsprechenden Seiten gegenüber liegen, also der Winkel ABC gleich DEF, der Winkel BCA gleich EFD und der Winkel BAC gleich EDF ist.

Denn wird an die Seite EF im Punkt E der dem Winkel ABC gleiche Winkel FEG und im Punkt F der dem Winkel ACB gleiche Winkel EFG angelegt, dann ist auch der Winkel im Punkt A gleich dem Winkel im Punkt G.
Damit sind die Dreiecke ABC und EGF gleichwinklig, wobei die Seiten, die gleiche Winkel einschließen, der Proportion entsprechende Größen sind.
Also verhält sich AB zu BC wie GE zu EF.



Da sich AB zu BC verhält wie DE zu EF, verhält sich somit DE zu EF wie GE zu EF.
Da DE und GE zum gleichen EF im gleichen Verhältnis stehen, ist DE gleich EF. Da DE gleich EG ist, die an der gleichen Seite EF liegen, sind die Seiten DE, EF gleich den beiden Seiten GE, EF, somit ist DF gleich FG.

Da die Winkel DEF und GEF gleich sind, sind in den Dreiecken DEF und GEF auch die übrigen Winkel, die gleichen Seiten gegenüber liegen, gleich. Also ist der Winkel DFE gleich GFE und der Winkel EDF gleich EGF. Da die Winkel FED und GEF, sowie die Winkel GEF und ABC gleich sind, ist der Winkel ABC gleich DEF.
Aus dem gleichen Grund sind die Winkel ACB und DFE gleich, sowie die Winkel in den Punkten A und D.
Also sind die Dreiecke ABC und DEF gleichwinklig.

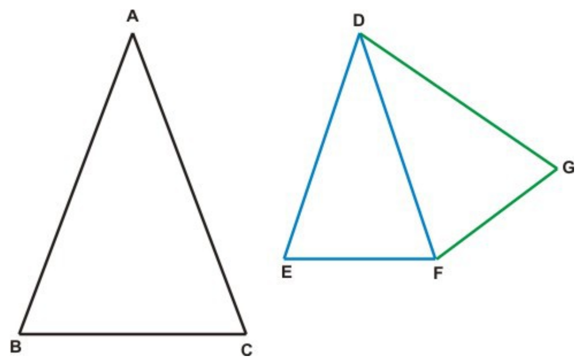
Deshalb sind zwei Dreiecke gleichwinklig, deren Seiten in Proportion stehen und sind diejenigen Winkel gleich, die den entsprechenden Seiten in Proportion gegenüber liegen, was zu zeigen war.

VI.6.

Ist in einem Dreieck ein Winkel einem Winkel in einem anderen Dreieck gleich und stehen die Seiten, die diese Winkel einschließen, in Proportion, dann sind die beiden Dreiecke gleichwinklig, wobei diejenigen Winkel gleich sind, die den entsprechenden Seiten in Proportion gegenüber liegen.

Wenn in den beiden Dreiecken ABC und DEF der eine Winkel BAC gleich dem Winkel EDF ist und die Seiten, die diese Winkel einschließen, in Proportion stehen, also sich BA zu AC verhält wie ED zu DF, dann, sage ich, sind die Dreiecke ABC und DEF gleichwinklig, also auch die Winkel ABC und DEF und die Winkel ACB und DFE gleich.

Denn wenn an die Seite DF im Punkt D der dem Winkel BAC gleiche Winkel FDG und im Punkt F der dem Winkel ACB gleiche Winkel DFG angelegt wird, ist der Winkel im Punkt B gleich dem Winkel im Punkt G.
Somit sind die Dreiecke ABC und DGF gleichwinklig.



Es verhält sich BA zu AC wie GD zu DF.
Da, wie vorausgesetzt, sich BA zu AC verhält wie ED zu DF, verhält sich ED zu DF wie GD zu DF.
Damit sind ED und DG gleich und liegen an der gleichen Seite DF.
Es sind also die beiden Seiten ED, DF gleich den beiden Seiten GD, DF und der Winkel EDF gleich GDF.
Da EF gleich GF sind auch die übrigen Winkel, die gleichen Seiten gegenüber liegen, gleich, also ist der Winkel DFG gleich DFE und der Winkel DGF gleich DEF.
Da der Winkel DFG gleich ACB ist, ist ACB damit gleich DFE.
Da, wie vorausgesetzt, der Winkel BAC gleich EDF ist, ist auch der Winkel im Punkt B gleich dem Winkel im Punkt E.
Also sind die Dreiecke ABC und DEF gleichwinklig.

Deshalb sind dann, wenn ein Winkel in einem Dreieck gleich einem Winkel im andern ist und die Seiten, die diese Winkel einschließen, in Proportion stehen, die beiden Dreiecke gleichwinklig, wobei diejenigen Winkel gleich sind, die den entsprechenden Seiten in Proportion gegenüber liegen, was zu zeigen war.

VI.7.

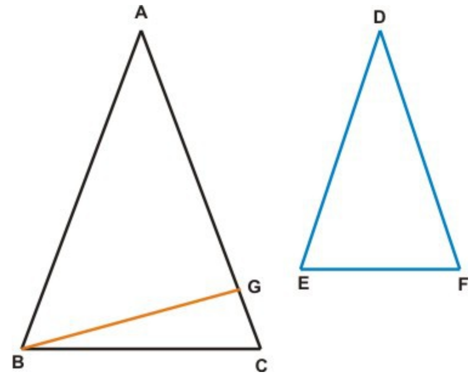
Ist in einem Dreieck ein Winkel einem Winkel in einem anderen Dreieck gleich und stehen die Seiten beider Dreiecke, die einen der anderen Winkel einschließen, in Proportion und sind dazu die übrigen Winkel entweder kleiner oder nicht kleiner als ein rechter Winkel, dann sind die beiden Dreiecke gleichwinklig, wobei die Winkel gleich sind, die von den entsprechenden Seiten in Proportion eingeschlossen werden.

Wenn in den Dreiecken ABC und DEF die Winkel BAC und EDF gleich sind und die Seiten, die einen der anderen Winkel einschließen, in Proportion stehen, verhält sich also AB zu BC wie DE zu EF, dazu die Winkel an den Punkten C und F, nun zunächst, kleiner als rechte Winkel sind, dann, sage ich, sind die Dreiecke ABC und DEF gleichwinklig, wobei die Winkel ABC und DEF gleich sind, die an den Punkten B und E liegen.

Denn sind die Winkel ABC und DEF nicht gleich, dann ist einer größer; es sei dies ABC.
Wird an AB im Punkt B der dem Winkel DEF gleiche Winkel ABG angelegt, dann sind, da die Winkel an den Punkten A und D gleich sind, dann die Winkel ABG und DEF gleich, somit auch AGB und DFE.
Somit sind dann die Dreiecke ABG und DEF gleichwinklig.
Es verhält sich dann AB zu BG wie DE zu EF.

Da, wie vorausgesetzt, sich DE zu EF verhält wie AB zu BC, steht dann AB zu BC und BG im gleichen Verhältnis, womit BC gleich BG ist.

Da dann der Winkel im Punkt C dem Winkel BGC gleich ist und C kleiner als ein rechter Winkel ist, ist dann BGC kleiner, somit AGB größer als ein rechter Winkel, der wie gezeigt, dem Winkel im Punkt F gleich ist, was, da der Winkel im Punkt F als kleiner als ein rechter Winkel vorausgesetzt ist, nicht möglich ist.
Da die Winkel ABC und DEF nicht ungleich sind, sind sie gleich.
Da die Winkel in den Punkten A und D gleich sind, sind auch die übrigen Winkel in den Punkten C und F gleich.
Also sind die Dreiecke ABC und DEF gleichwinklig.



Sind aber die Winkel in den Punkten C und F nicht kleiner als rechte Winkel, dann, sage ich, sind die Dreiecke ABC und DEF ebenfalls gleichwinklig.
Denn ebenso ist zu zeigen, dass dann BC gleich BG und der Winkel im Punkt C gleich dem Winkel BGC ist.

Da, wie vorausgesetzt, der Winkel im Punkt C nicht kleiner als ein rechter ist, ist dann auch BGC nicht kleiner als ein rechter Winkel, was, da dann im Dreieck BGC diese beiden Winkel nicht kleiner als zwei rechte Winkel sind, nicht möglich ist.
Da die Winkel ABC und DEF nicht ungleich sind, sind sie gleich.
Da die Winkel in den Punkten A und D gleich sind, sind auch die übrigen Winkel in den Punkten C und F gleich. Also sind die Dreiecke ABC und DEF gleichwinklig.

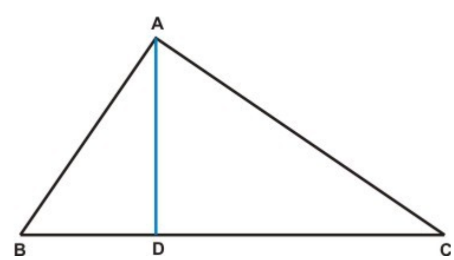
Deshalb sind dann, wenn in einem Dreieck ein Winkel einem Winkel in einem anderen Dreieck gleich ist und die Seiten beider Dreiecke, die einen der anderen Winkel einschließen, in Proportion stehen und dazu jeweils der übrige Winkel entweder kleiner oder nicht kleiner als ein rechter Winkel ist, die beiden Dreiecke gleichwinklig, wobei die Winkel gleich sind, die von den entsprechenden Seiten in Proportion eingeschlossen werden, was zu zeigen war.

VI.8.

Wird im rechtwinkligen Dreieck vom Punkt des rechten Winkels die Senkrechte auf der Grundlinie errichtet, dann sind beide an der Senkrechten liegende Dreiecke einander und dem ganzen Dreieck ähnlich.

Wenn im rechtwinkligen Dreieck ABC mit dem rechten Winkel BAC vom Punkt A auf BC die Senkrechte AD errichtet ist, dann, sage ich, sind beide nebeneinander liegende Dreiecke ABD und ADC einander und dem ganzen ABC ähnlich.

Denn, da in den beiden Dreiecken ABC, ABD der Winkel BAC gleich dem Winkel ADB und der Winkel im Punkt B gemeinsam ist, ist der Winkel ACB gleich BAD.
Damit sind die Dreiecke ABC, ABD gleichwinklig.



Somit verhält sich BA zu BA wie AB zu BD und wie AC zu AD, denn es liegt BC im Dreieck ABC und BA im Dreieck ABD einem rechten Winkel gegenüber, auch liegt AB im Dreieck ABC dem Winkel im Punkt C und BD im Dreieck ABD dem gleichen Winkel BAD gegenüber, und schließlich liegen AC und AD gemeinsam dem dritten Winkel im Punkt B gegenüber.

Damit sind die Dreiecke ABC und ABD gleichwinklig und die Seiten des einen stehen in gleichen Verhältnissen zu den Seiten des andern.
Also ist das Dreieck ABD dem Dreieck ABC ähnlich.
Ebenso ist zu zeigen, dass das Dreieck ADC dem Dreieck ABC ähnlich ist.
Also ist sowohl ABD wie auch ADC dem ganzen Dreieck ABC ähnlich.

Dann, sage ich, sind die Dreiecke ABD und ADC einander ähnlich.

Denn da die Winkel BDA und ADC gleich sind und der Winkel BAD, wie gezeigt, dem Winkel im Punkt C gleich ist, ist der übrige Winkel im Punkt B dem Winkel DAC gleich.
Damit sind die Dreiecke ABD und ADC gleichwinklig.
Somit verhält sich BD zu DA wie AD zu DC und wie BA zu AC, denn es liegt BD im Dreieck ABD dem Winkel BAD und DA im Dreieck ADC dem Winkel im Punkt C gegenüber, der dem Winkel BAD gleich ist, auch liegt AD im Dreieck ABD dem Winkel im Punkt B und DC im Dreieck ADC dem Winkel DAC gegenüber, der dem im Punkt B gleich ist, und BA und AC liegen rechten Winkeln gegenüber.
Also sind die Dreiecke ABD und ADC einander ähnlich.

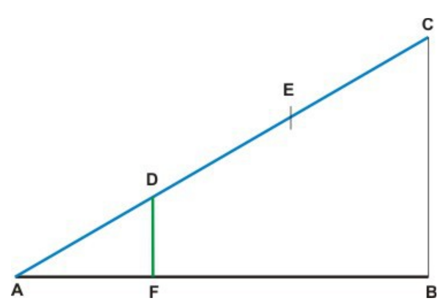
Deshalb sind im rechtwinkligen Dreieck, in dem vom Punkt des rechten Winkels die Senkrechte auf der Grundseite errichtet ist, die an der Senkrechten liegenden Dreiecke einander und dem ganzen Dreieck ähnlich, was zu zeigen war.

Zusatz:
Offensichtlich verhält sich im rechtwinkligen Dreieck die vom Punkt des rechten Winkels auf der Grundseite errichtete Senkrechte wie das mittlere Glied in fortlaufend gleicher Proportion mit den beiden Abschnitten der Grundseite, was zu zeigen ist.

VI.9.
Von einer Strecke einen Teil abschneiden.

Es sei die Strecke AB gegeben. Es soll ein angegebener Teil abgeschnitten werden.

Ist der verlangte Teil ein Drittel, dann ist an AB im Punkt A mit beliebigem Winkel die Strecke AC anzulegen und sind auf AC die Punkte D, E so aufzusuchen, dass DE gleich AD und gleich EC ist. Es ist BC zu ziehen und dazu durch D die Parallele DF.



Da im Dreieck ABC die Seite BC parallel zu FD ist, verhält sich CD zu DA wie BF zu FA [wie VI.2.].
Da CD das Doppelte der DA ist, ist BF das Doppelte der FA, und BA gleich dem Dreifachen der AF.
Damit ist von der gegebenen Strecke AB das Drittel AF abgeschnitten, was auszuführen war.

Anmerkung:

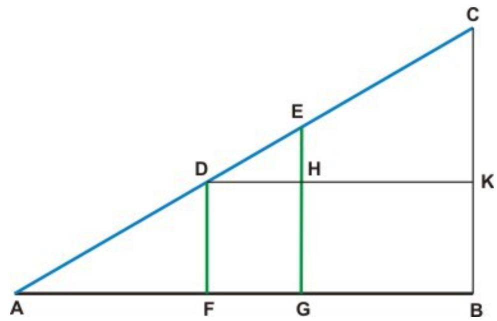
AC ist ein Maßstab mit geeigneten Einteilungen.

VI.10.

Eine ungeteilte Strecke einer geteilten ähnlich aufteilen.

Wird die ungeteilte Strecke AB mit beliebigem Winkel von der Strecke AC geschnitten, die in den Punkten D, E geteilt ist, ist die Strecke CD zu ziehen und durch D und E die dazu parallelen DF und EG, sowie durch D die zu AB parallele DHK.

Es sind dann FH und HB Parallelogramme und somit die Strecken DH gleich FG und HK gleich GB.



Da im Dreieck DKC die zur Seite KC parallele HE liegt, verhält sich CE zu ED wie KH zu HD.
Da KH gleich BG und HD gleich GF ist, verhält sich CE zu ED wie BG zu GF.
Da im Dreieck AGE die zur Seite GE parallele FD liegt, verhält sich ED zu DA wie GF zu FA.

Wie gezeigt, verhält sich CE zu ED wie BG zu GF und verhält sich ED zu DA wie GF zu FA.

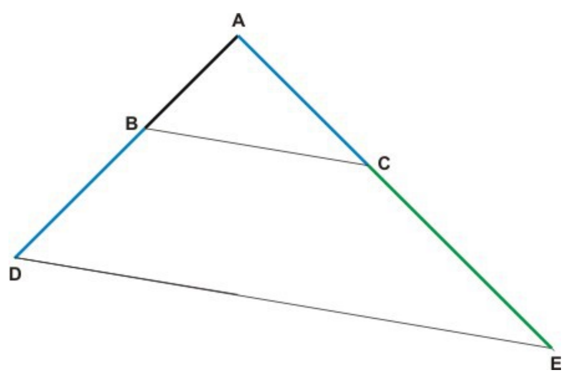
Damit ist die ungeteilte Strecke AB ähnlich wie die geteilte Strecke AC aufgeteilt, was auszuführen war.

VI.11.

Zu zwei Strecken die Strecke finden, die sich zu ihnen verhält wie das dritte Glied in fortlaufend gleicher Proportion.

Zu zwei Strecken BA und AC, die einen beliebigen Winkel einschließen, soll eine dritte Strecke gefunden werden, die sich zu BA und AC verhält wie das dritte Glied in fortlaufend gleicher Proportion.

Es ist BA bis D und AC bis E so zu verlängern, dass BD gleich AC ist, und durch D die zu BC parallele DE zu ziehen.



Da im Dreieck ADE die zur Seite DE parallele BC liegt, verhält sich AB zu BD wie AC zu CE.
Weil BD gleich AC ist, verhält sich AB zu AC wie AC zu CE.

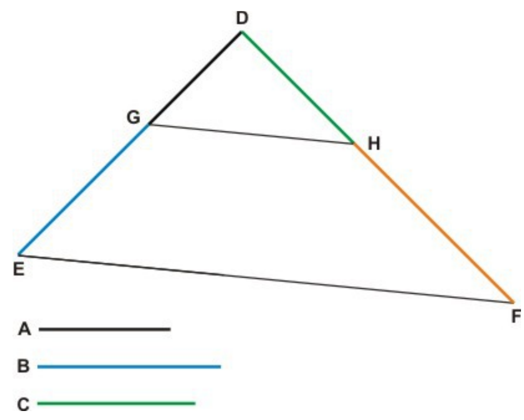
Damit ist zu den gegebenen Strecken AB, AC die Strecke CE gefunden, die sich zu ihnen verhält wie das dritte Glied in fortlaufend gleicher Proportion, was auszuführen war.

VI.12.

Zu drei Strecken die Strecke finden, die sich zu ihnen verhält wie das vierte Glied in Proportion.

Zu den Strecken A, B, C soll die Strecke gefunden werden, die sich zu ihnen verhält wie das vierte Glied in Proportion.

Es ist mit zwei Geraden DE und DF, die einen beliebigen Winkel einschließen, ein Dreieck EDF so anzulegen, dass DG gleich A, GE gleich B und DH gleich C ist.
Sodann ist durch E die zu GH parallele EF zu ziehen.



Da im Dreieck DEF die zu EF parallele GH liegt, verhält sich DG zu GE wie DH zu HF.
Da DG gleich A, GE gleich B und DH gleich C ist, verhält sich A zu B wie C zu HF.

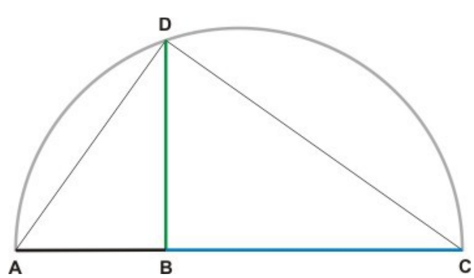
Damit ist zu den gegebenen Strecken A, B, C die Strecke HF gefunden, die sich zu ihnen verhält wie das vierte Glied in Proportion.

VI.13.

Zu zwei Strecken die Strecke finden, die sich zu ihnen verhält wie das mittlere Glied in fortlaufend gleicher Proportion.

Zu den beiden Strecken AB und BC soll die Strecke gefunden werden, die sich zu ihnen verhält wie das mittlere Glied einer fortlaufend gleichen Proportion.

Es sind die beiden Strecken aneinander zu legen, sodann ist über AC der Halbkreis ADC zu schlagen, im Punkt B auf AC die Senkrechte BD zu errichten und die Strecken AD und DC zu ziehen.



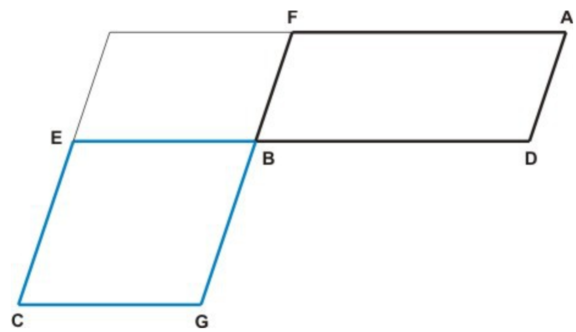
Da der Winkel ADC im Halbkreis ein rechter Winkel und BD die vom Punkt des rechten Winkels auf der Grundseite errichtete Senkrechte ist, verhält sich AB zu BD wie BD zu BC [VI.8. Zusatz].

Damit ist zu den gegebenen Strecken AB, BC die Strecke BD gefunden, die sich zu ihnen verhält wie das mittlere Glied in fortlaufend gleicher Proportion, was auszuführen war.

VI.14.

Die Seiten zweier gleicher und gleichwinkliger Parallelogramme stehen in umgekehrten Verhältnissen zu den Seiten am gleichen Winkel im anderen Parallelogramm, und gleichwinklige Parallelogramme deren Seiten in umgekehrten Verhältnissen zu den Seiten am gleichen Winkel im anderen Parallelogramm stehen, sind gleich.

Wenn DB und BE, sowie FB und BG, die Seiten gleicher und gleichwinkliger Parallelogramme AB und BC sind, dann sage ich, stehen sie in umgekehrten Verhältnissen zu den Seiten im anderen Parallelogramm, es verhält sich also
DB zu BE wie GB zu BF.



Denn sind die Seiten DB und BE, sowie FB und BG der Parallelogramme AB und BC mit gleichem Winkel in B nebeneinander auf einer Geraden gelegt und ist das Parallelogramm FE vervollständigt, liegen die gleichen Parallelogramme AB und BC an der vergleichbaren Größe FE und es verhalten sich die Parallelogramme AB zu FE wie BC zu FE.

Da sich die Parallelogramme AB zu FE verhalten wie die Seiten DB zu BE und die Parallelogramme BC zu FE wie die Seiten GB zu BF, verhält sich die Seite DB zu BE im andern Parallelogramm wie GB im andern Parallelogramm zur Seite BF.
Also stehen in den Parallelogrammen AB und BC die Seiten an gleichen Winkeln in zueinander umgekehrten Verhältnissen zu den Seiten im anderen Parallelogramm.

Verhalten sich nun die Seiten, die gleiche Winkel einschließen, DB zu BE wie GB zu BF, dann, sage ich, sind die Parallelogramme AB und BC gleich. Da sich die Seiten DB zu BE wie GB zu BF verhalten und die Seiten DB zu BE auch verhalten wie die Parallelogramme AB zu FE und die Seiten GB zu BF wie die Parallelogramme BC zu FE, verhalten sich die Parallelogramme AB zu FE wie BC zu FE. Also sind die Parallelogramme AB und BC gleich.

Deshalb stehen die Seiten gleicher und gleichwinkliger Parallelogramme in zueinander umgekehrten Verhältnissen zu den Seiten am gleichen Winkel im anderen Parallelogramm und sind Parallelogramme gleich, deren Seiten in umgekehrten Verhältnissen zu den Seiten am gleichen Winkel im anderen Parallelogramm stehen, was zu zeigen war.

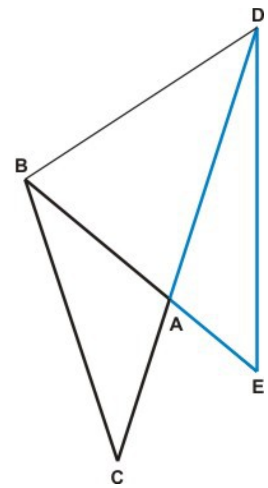
VI.15.

In gleichen Dreiecken mit einem gleichen Winkel stehen die Seiten, die diesen Winkel einschließen, in umgekehrten Verhältnissen und Dreiecke mit einem gleichen Winkel sind gleich, in denen die Seiten, die diesen Winkel einschließen, in umgekehrten Verhältnissen stehen.

Wenn in den Dreiecken ABC und ADE die Winkel BAC und DAE gleich sind, dann, sage ich, stehen die Seiten in den Dreiecken ABC und DAE, die diese Winkel einschließen, in umgekehrten Verhältnissen, also verhalten sich die Seiten CA zu AD wie EA zu AB.

Denn wenn die Seiten CA nebeneinander auf die gleiche Gerade gelegt werden, liegen auch EA und AB nebeneinander auf der gleichen Geraden und es ist BD zu ziehen.

Da die Dreiecke ABC und ADE gleich sind und an der vergleichbaren Größe BAD liegen, verhalten sich die Dreiecke CAB zu BAD wie EAD zu BAD.
Da sich das Dreieck CAB zu BAD verhält wie die Seite AC zu AD und sich das Dreieck EAD zu BAD verhält wie EA zu AB, verhält sich die Seite CA zu AD im andern Dreieck wie EA im andern Dreieck zu AB.



Also stehen in den Dreiecken ABC und ADE die Seiten, die einen gleichen Winkel einschließen, in umgekehrten Verhältnissen.

Wenn nun die Seiten, die in den Dreiecken ABC und ADE einen gleichen Winkel einschließen, in umgekehrten Verhältnissen stehen, also sich CA zu AD verhält wie EA zu AB, dann, sage ich, sind die Dreiecke ABC und ADE gleich.
Denn ist BD gezogen, dann verhalten sich die Seiten CA zu AD wie EA zu AB, die Seiten CA zu AD ebenso wie die Dreiecke ABC zu BAD und die Seiten EA zu AB wie die Dreiecke EAD zu BAD, somit verhalten sich die Dreiecke ABC zu BAD wie EAD zu BAD.
Da die Dreiecke ABC und EAD zu BAD im gleichen Verhältnis stehen, ist das ABC gleich EAD.

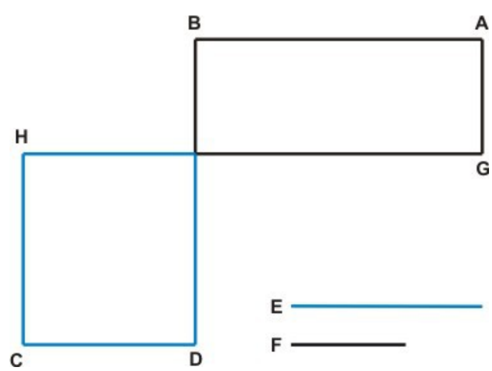
Deshalb stehen in gleichen Dreiecken die Seiten, die einen gleichen Winkel einschließen, in zueinander umgekehrten Verhältnissen und sind Dreiecke gleich, in denen Seiten, die einen gleichen Winkel einschließen, in umgekehrten Verhältnissen stehen, was zu zeigen war.

VI.16.

Stehen vier Strecken in Proportion, dann ist das Rechteck, das die äußeren Glieder ergeben, gleich dem das die inneren ergeben und sind zwei Rechtecke gleich, dann stehen die sie ergebenden Seiten wie innere und äußere Glieder in Proportion.

Wenn vier Strecken AB, CD, E, F in Proportion stehen, sich also AB zu CD verhält wie E zu F, dann, sage ich, das Rechteck, das die Strecken AB mit CD ergeben, ist gleich dem Rechteck, das die Strecken E mit F ergeben.

Es sind in den Punkten A und C auf AB und CD die Senkrechten AG und CH so zu errichten, dass AG gleich F und CH gleich E ist, und die Parallelogramme BG und DH zu vervollständigen.



Da sich AB zu CD verhält wie E zu F und E gleich CH und F gleich AG ist, verhält sich AB zu CD wie CH zu AG, somit stehen in den Parallelogrammen BG und DH die Seiten an gleichen Winkeln in umgekehrten Verhältnissen und BG und DH sind deshalb gleich.
Es ist das Parallelogramm BG gleich DH, die Strecken AB mit F ergeben BG und die Strecken CD mit E ergeben DH, also ist das Rechteck, das AB mit F ergibt gleich dem Rechteck, das CD mit E ergibt.

Ist nun das Rechteck, das AB mit F ergibt, gleich dem, das CD mit E ergibt, dann, sage ich, stehen die vier Strecken in Proportion, also verhält sich AB zu CD wie E zu F.

Denn es ist, mit den gleichen Vergleichen, das Rechteck BG, das AB mit F ergibt, gleich dem Rechteck DH, das CD mit E ergibt.
In gleichen und gleichwinkligen Parallelogrammen, stehen die Seiten an gleichen Winkeln in zueinander umgekehrten Verhältnissen.
Also verhalten sich die Strecken AB zu CD wie CH zu AG und, da CH gleich E und AG gleich F ist, die Strecken AB zu CD wie E zu F.

Deshalb ist dann, wenn vier Strecken in Proportion stehen, das Rechteck, das die äußeren Glieder ergeben, gleich dem Rechteck, das die inneren ergeben und stehen dann, wenn zwei Rechtecke gleich sind, die Seiten, die sie ergeben, wie innere und äußere Glieder in Proportion, was zu zeigen war.

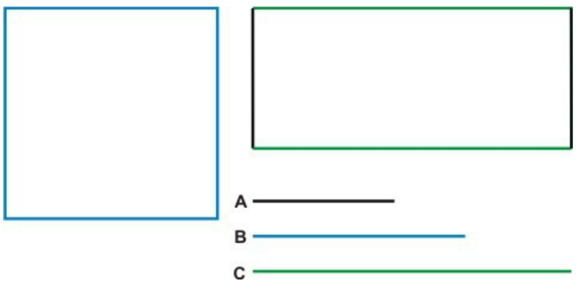
VI.17.

Stehen drei Strecken in fortlaufend gleicher Proportion, dann ist das Rechteck, das die äußeren Glieder ergeben, gleich dem Quadrat über dem mittleren Glied und ist ein Rechteck gleich einem Quadrat, dann stehen die Seiten, die das Rechteck ergeben, wie äußere Glieder mit der Seite des Quadrats in fortlaufend gleicher Proportion.

Wenn die drei Strecken A, B, C in Proportion stehen und sich A zu B verhält wie B zu C, dann, sage ich, ist das Rechteck aus A mit C gleich dem Quadrat über B.

Denn ist ein D gleich B, dann verhält sich, da sich A zu B wie B zu C verhält, damit A zu B wie D zu C.
Wenn vier Strecken in Proportion stehen, dann ist das Rechteck, das die äußeren Glieder ergeben, gleich dem Rechteck, das die inneren Glieder ergeben und damit ist das Rechteck aus A mit C gleich dem aus B mit D.
Da B gleich D ist, ist das Rechteck aus B mit D gleich dem Quadrat über B.
Also ist das Rechteck aus A mit C gleich dem Quadrat über B.

Ist nun das Rechteck aus A mit C gleich dem Quadrat über B, dann, sage ich, verhält sich A zu B wie B zu C.



Denn es ist, mit den gleichen Vergleichen, wenn B gleich D ist, das Quadrat über B gleich dem Rechteck aus B mit D und somit das Rechteck aus A mit C gleich dem aus B mit D.
Es verhalten sich die Seiten gleicher Rechtecke wie die äußeren und inneren Glieder einer Proportion und damit verhält sich A zu B wie D zu C. Da D gleich B ist, verhält sich somit A zu B wie B zu C.

Deshalb ist dann, wenn drei Strecken in fortlaufend gleicher Proportion stehen, das Rechteck aus den äußeren Gliedern gleich dem Quadrat über dem mittleren und stehen dann, wenn ein Rechteck gleich einem Quadrat ist, die Seiten, die das Rechteck ergeben, wie die äußeren Glieder mit der Seite des Quadrats in fortlaufend gleicher Proportion, was zu zeigen war.

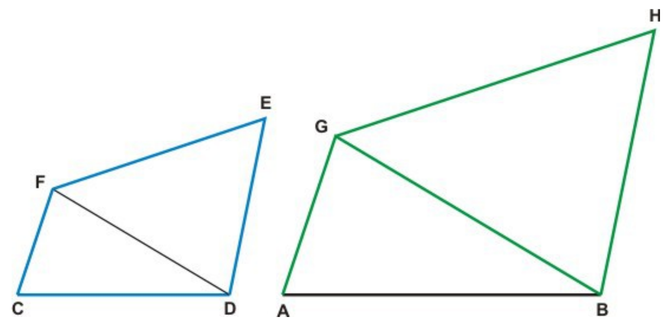
VI.18.

Auf einer Strecke eine einer anderen ähnliche gradlinige Figur ähnlich errichten.

Auf der gegebenen Strecke AB soll eine der gegebenen gradlinigen Figur CE ähnliche gradlinige Figur ähnlich errichtet werden, wie CE aufzuteilen ist.

Es ist in der gradlinigen Figur CE die Gerade DF zu ziehen und auf AB im Punkt A der dem Winkel in C gleiche Winkel GAB und im Punkt B der dem Winkel CDF gleiche Winkel ABG anzulegen.
Da die Dreiecke FCD und GAB gleichwinklig sind, verhalten sich die Strecken FD zu GB wie FC zu GA und wie CD zu AB.

Es ist dann auf BG im Punkt B der dem Winkel DFE gleiche Winkel BGH und im Punkt G der dem Winkel FDE gleiche Winkel GBH anzulegen.
Der übrige Winkel in E ist dann gleich dem Winkel in H.
Damit sind die Dreiecke FDE und GHB gleichwinklig und es verhalten sich die Strecken FD zu GB wie FE zu GH und wie ED zu HB.
Somit verhalten sich die Strecken FC zu AG wie CD zu AB und wie FE zu GH und auch wie ED zu HB.



Da der Winkel CFD gleich AGB ist und der Winkel DFE gleich BGH ist, ist der Winkel CFE gleich AGH. Aus den gleichen Gründen ist der Winkel CDE gleich ABH.
Da die übrigen Winkel in C und A, sowie die Winkel in E und H gleich sind, ist die gradlinige Figur AH gleichwinklig der gradlinigen Figur CE.
Da die Seiten, die zwischen gleichen Winkeln liegen, in gleichen Verhältnissen stehen, ist die gradlinige Figur AH ähnlich der gradlinigen Figur CE.

Damit ist auf der gegebenen Strecke AB eine der gegebenen gradlinigen Figur CE ähnliche gradlinige Figur AH ähnlich errichtet, was auszuführen war.

VI.19.

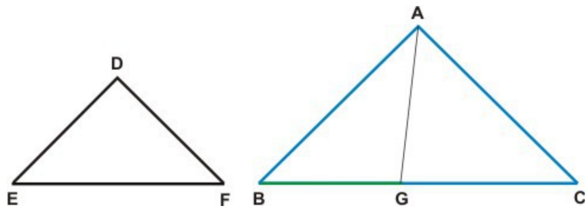
Ähnliche Dreiecke verhalten sich zueinander wie die Quadrate über entsprechenden Seiten.

Wenn in den ähnlichen Dreiecke ABC, DEF die Winkel in B und E gleich sind, sich also AB zu BC verhält wie DE zu EF und die Seite BC der Seite EF entspricht, dann, sage ich, verhält sich das Dreieck ABC zu DEF wie das Quadrat über der Seite BC zum Quadrat über EF.

Es verhält sich ein BG zu BC und EF wie das dritte Glied in fortlaufend gleicher Proportion, es verhält sich also BC zu EF wie EF zu BG. Es ist dann AG zu ziehen.

Da sich AB zu BC verhält wie DE zu EF, verhält sich, nach Umordnung, AB zu DE wie BC zu EF. Doch BC verhält sich zu EF wie EF zu BG, somit verhält sich AB zu DE wie EF zu BG.
Da die Seiten der Dreiecke ABG und DEF, die einen gleichen Winkel einschließen, in umgekehrten Verhältnissen stehen, ist das Dreieck ABG gleich dem Dreieck DEF.

Da sich BC zu EF verhält wie EF zu BG und das erste zum dritten Glied in fortlaufend gleicher Proportion sich verhält wie das Quadrat über dem ersten zum Quadrat über dem zweiten, verhält sich BC zu BG wie das Quadrat über CB zum Quadrat über EF.



Da sich CB zu BG verhält wie das Dreieck ABC zum Dreieck ABG, verhält sich das Dreieck ABC zum Dreieck ABG wie das Quadrat über BC zum Quadrat über EF.
Es sind die Dreiecke ABG und DEF gleich, also verhält sich das Dreieck ABC zum Dreieck DEF wie das Quadrat über BC zum Quadrat über EF.

Deshalb verhalten sich ähnliche Dreiecke zueinander wie die Quadrate über entsprechenden Seiten, was zu zeigen war.

Zusatz:
Offensichtlich verhält sich von drei Strecken in fortlaufend gleicher Proportion, die erste zur dritten wie die ähnliche und ähnlich errichtete gradlinige Figur über der ersten Strecke zu der über der zweiten Strecke, was zu zeigen ist.

VI.20.
Ähnliche Polygone sind in gleich viele ähnliche und einander entsprechende Dreiecke aufteilbar, und sie verhalten sich zueinander wie die Quadrate über entsprechenden Seiten.

Wenn in den ähnlichen Polygonen ABCDE und FGHKL die Seite AB der Seite FG entspricht, dann, sage ich, sind die Polygone ABCDE und FGHKL in gleich viele ähnliche und einander entsprechende Dreiecke aufteilbar und es verhält sich ABCDE zu FGHKL wie das Quadrat über AB zum Quadrat über FG.

Es ist BE, EC, GL, LH zu ziehen.
Da das Polygon ABCDE dem Polygon FGHKL ähnlich ist, ist der Winkel BAE gleich dem Winkel GFL und die Seite BA verhält sich zu AE wie GF zu FL.
Da in den Dreiecken ABE und FGL ein gleicher Winkel von Seiten eingeschlossen wird, die in gleichen Verhältnissen stehen, sind die Dreiecke ABE und FGL gleichwinklig und ähnlich.
Damit ist der Winkel ABE gleich FGL. Wegen der Ähnlichkeit der Polynome ist der Winkel ABC gleich FGH, somit ist der Winkel EBC gleich LGH.

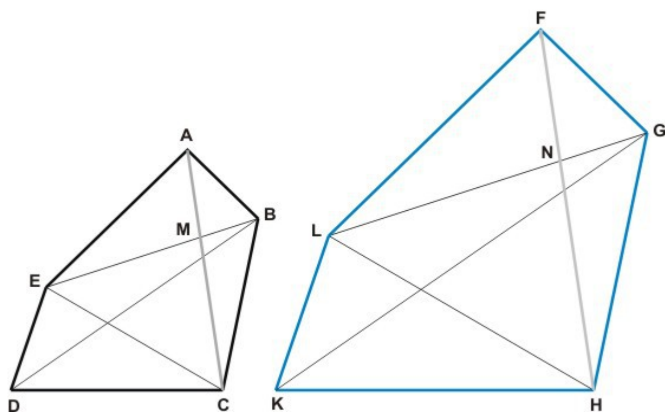
Da die Dreiecke ABE und FGL ähnlich sind, verhält sich EB zu BA wie LG zu GF.
Wegen der Ähnlichkeit der Polynome verhält sich AB zu BC wie FG zu GH und somit verhält sich EB zu BC wie LG zu GH.
Da die Seiten, die die gleichen Winkel EBC und LGH einschließen, in gleichen Verhältnissen stehen, sind die Dreiecke ABC und LGH gleichwinklig und ähnlich.
Aus den gleichen Gründen sind die Dreiecke ECD und LHK ähnlich.
Damit sind die Polygone ABCDE und FGHKL in ein ähnliches und entsprechendes Dreieck nach dem andern gleich oft aufgeteilt.

Ich sage nun, die Dreiecke ABE, EBC, ECD und die ihnen ähnlichen Dreiecke FGL, LGH, LHK entsprechen einander und das Polygon ABCDE verhält sich zu FGHKL wie das Quadrat über AB zum Quadrat über FG.

Es ist AC und FH zu ziehen. Da der Winkel ABC gleich FGH ist und sich AB zu BC verhält wie FG zu GH, sind die Dreiecke ABC und FGH gleichwinklig.

Da die Winkel BAC und GFH und die Winkel BCA und GHF gleich sind, sind die Winkel BAM und GFN und die Winkel ABM und FGN gleich.
Somit ist der Winkel AMB gleich FNG.
Damit sind die Dreiecke ABM und FGN gleichwinklig.
Ebenso ist zu zeigen, dass die Dreiecke BMC und GNH gleichwinklig sind.
Somit verhält sich AM zu MB wie FN zu NG und verhält sich BM zu MC wie GN zu NH.
Also verhält sich AM zu MC wie FN zu NH.

Da Dreiecke zwischen Parallelen in gleichen Verhältnissen stehen wie ihre Grundseiten, verhält sich die Seite AM zu MC wie das Dreieck ABM zu MCB und wie das Dreieck AME zu EMC.
Da sich bei Größen in Proportion die Vorderglieder zusammen zu den Hintergliedern zusammen verhalten wie ein Vorderglied zum Hinterglied, verhalten sich die Dreiecke AMB zu BMC wie ABE zu CBE.
Es verhalten sich die Dreiecke AMB zu BMC wie die Seiten AM zu MC und damit verhält sich AM zu MC wie ABE zu EBC.



Aus den gleichen Gründen verhalten sich die Seiten FN zu NH wie die Dreiecke FGL zu GLH.
Da sich AM zu MC verhält wie FN zu NH, verhält sich das Dreieck ABE zu BEC wie FGL zu GLH und, nach Umordnung, ABE zu FGL wie BEC zu GLH.
Ebenso ist zu zeigen, dass mit den eingetragenen Strecken BD und GK sich das Dreieck BEC zu LGH verhält wie ECD zu LHK.

Da sich ABE zu FGL verhält wie EBC zu LGH und wie ECD zu LHK und da sich bei Größen in Proportion die Vorderglieder zusammen zu den Hintergliedern zusammen verhalten wie ein Vorderglied zum Hinterglied, verhalten sich die Dreiecke ABE zu FGL wie die Polynome ABCDE zu FGHKL.
Da sich ähnliche Dreiecke verhalten wie die Quadrate über entsprechenden Seiten, verhält sich das Dreieck ABE zu FGL wie das Quadrat über AB zum Quadrat über FG.
Also verhält sich das Polynom ABCDE zu FGHKL wie das Quadrat über AB zum Quadrat über FG.

Deshalb sind ähnliche Polynome in gleich viele ähnliche und einander entsprechende Dreiecke aufteilbar und verhalten sie sich zueinander wie Quadrate über entsprechenden Seiten, was zu zeigen war.

Zusatz:

Ebenso, wie schon mit ähnlichen Dreiecken gezeigt, ist mit ähnlichen Vierecken zu zeigen, dass sie im gleichen Verhältnis stehen wie Quadrate über entsprechenden Seiten, deshalb sind ähnliche Polygone in gleich viele ähnliche und einander entsprechende gradlinige Figuren aufteilbar und sie verhalten sich auch dann wie Quadrate über entsprechenden Seiten, was zu zeigen ist.

VI.21.

Gradlinige Figuren die einer gradlinigen Figur ähnlich sind, sind einander ähnlich.

Wenn die gradlinigen Figuren A und B der C ähnlich sind, dann, sage ich, ist A der B ähnlich.

Denn, da die Figuren A und C ähnlich sind, sind sie gleichwinklig und die zwischen gleichen Winkeln liegenden Seiten stehen in gleichen Verhältnissen.
Da ebenso die Figuren B und C ähnlich sind, sind sie gleichwinklig und die zwischen gleichen Winkeln liegenden Seiten stehen in gleichen Verhältnissen.
Damit sind die Figuren A, B, C gleichwinklig und die jeweils zwischen gleichen Winkeln liegenden Seiten stehen in gleichen Verhältnissen.

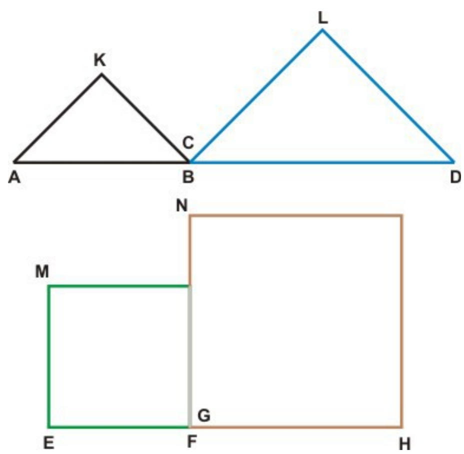
Also ist A der B ähnlich, was zu zeigen war.

VI.22.

Die auf vier Strecken in Proportion ähnlich errichteten und ähnlichen gradlinigen Figuren stehen in Proportion und vier Seiten, auf denen ähnliche gradlinige Figuren ähnlich in Proportion errichtet sind, stehen in Proportion.

Wenn die vier Strecken AB, CD, EF, GH in Proportion stehen, sich also AB zu CD verhält wie EF zu GH, und auf AB und CD ähnliche gradlinige Figuren KAB und LCD ähnlich errichtet sind, sowie auf EF und GH ähnliche gradlinige Figuren MF und NH ähnlich errichtet sind, dann, sage ich, verhält sich KAB zu LCD wie MF zu NH.

Denn ist die Strecke O das zu AB, CD dritte Glied in fortlaufend gleicher Proportion und die Strecke P das zu EF, GH dritte Glied in fortlaufend gleicher Proportion, dann verhält sich AB zu CD wie EF zu GH und verhält sich CD zu O wie GH zu P, womit verhält sich AB zu O wie EF zu P verhält [wie V.22.].
Da sich AB zu O verhält wie die Figuren KAB zu LCD und sich EF zu P verhält wie MF zu NH, verhält sich KAB zu LCD wie MF zu NH.



Verhält sich nun die Figur KAB zu LCD wie die Figur MF zu NH, dann, sage ich, verhält sich die Strecke AB zu CD wie EF zu GH.
Denn, wenn nicht, dann sei das Verhältnis AB zu CD gleich dem Verhältnis EF zu QR und auf QR die den Figuren MF und NH ähnliche Figur SR ähnlich errichtet.
Es verhält sich dann AB zu CD wie EF zu QR, wobei auf AB und CD die ähnlichen Figuren KAB und LCD ähnlich errichtet und auf EF und QR die ähnlichen Figuren MF und SR ähnlich errichtet sind.
Es verhält sich dann KAB zu LCD wie MF zu SR.
Da sich KAB zu LCD auch wie MF zu NH verhält, verhält sich dann MF zu SR wie MF zu NH. Da dann die Figur MF zu SR und NH im gleichen Verhältnis steht, ist die Figur NH gleich SR. Also sind die Strecken, auf denen sie ähnlich errichtet sind, QR und GH gleich.
Es verhält sich dann AB zu CD wie EF zu QR und, da QR gleich GH ist, verhält sich AB zu CD wie EF zu GH.

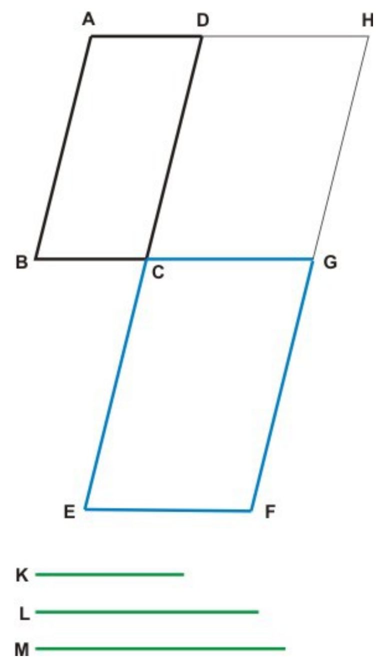
Deshalb stehen die auf vier Strecken in Proportion ähnlich errichteten ähnlichen gradlinigen Figuren in Proportion und stehen vier Seiten in Proportion, auf denen ähnliche gradlinige Figuren ähnlich in Proportion errichtet sind, was zu zeigen war.

VI.23.

Gleichwinklige Parallelogramme verhalten sich zueinander wie die äußeren Glieder der fortlaufenden Proportion ihrer Seiten.

Wenn in den Parallelogrammen AC und CF die Winkel BCD und ECG gleich sind, dann, sage ich, ist das Verhältnis von AC zu CF gleich dem Verhältnis der äußeren Glieder der fortlaufenden Proportion der Seiten BC zu CG und DC zu CE.

Denn liegen die Seiten BC und CG nebeneinander auf einer Geraden, dann liegen auch die Seiten DC und CE nebeneinander auf einer Geraden und es ist das Parallelogramm DG zu vervollständigen.



Stehen drei Strecken K, L, M so in Verhältnissen, dass sich BC zu CG verhält wie K zu L und sich DC zu CE verhält wie L zu M, dann ergibt sich das Verhältnis von K zu M aus der fortlaufenden Proportion von K zu L zu M als das Verhältnis der äußeren Glieder der fortlaufenden Proportion der Seiten der Parallelogramme.
Es verhält sich die Seite BC zur Seite CG wie das Parallelogramm AC zum Parallelogramm CH.
Da sich die Seite BC zu CG verhält wie die Strecke K zu L und sich K zu L verhält wie das Parallelogramm AC zu CH, verhält sich die Seite DC zu CE wie das Parallelogramm CH zu CF.
Es verhält sich die Seite DC zu CE wie L zu M, also verhält sich L zu M wie das Parallelogramm CH zu CF.

Da, wie gezeigt, sich die Strecke K zu L verhält wie das Parallelogramm AC zu CH und sich die Strecke L zu M sich verhält wie das Parallelogramm CH zu CF, verhält sich die Strecke K zu M wie das Parallelogramm AC zu CF.
Also ist das Verhältnis von K zu M, das Verhältnis der äußeren Glieder der fortlaufenden Proportion der Seiten der Parallelogramme, gleich dem Verhältnis von AC zu CF.

Deshalb verhalten sich gleichwinklige Parallelogramme zueinander wie die äußeren Glieder der fortlaufenden Proportion ihrer Seiten, was zu zeigen war.

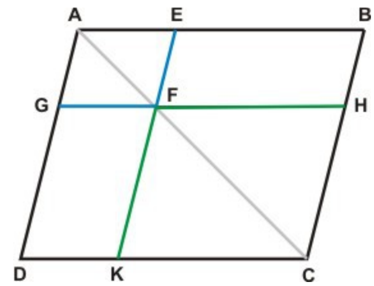
VI.24.

In einem an einem Punkt seiner Diagonalen in vier Parallelogramme aufgeteilten Parallelogramm sind die auf der Diagonalen liegenden Parallelogramme einander und dem ganzen ähnlich.

Wenn das Parallelogramm ABCD am Punkt F seiner Diagonalen in vier Parallelogramme aufgeteilt ist und die Parallelogramme EG und HK auf seiner Diagonalen liegen, dann, sage ich, sind EG und HK einander und dem ganzen ABCD ähnlich.

Denn, da im Dreieck ABC die zu der Seite BC parallele EF liegt, verhält sich BE zu EA wie CF zu FA, und da im Dreieck ACD die zu der Seite CD parallele FG liegt, verhält sich CF zu FA wie DG zu GA.
Es verhält sich CF zu FA wie BE zu EA und verhält sich BE zu EA wie DG zu GA, somit verhält sich BA zu AE wie DA zu AG und, nach Umordnung, BA zu AD wie EA zu AG.

Die Parallelogramme EG und ABCD haben denselben Winkel BAD, die Stecke GF ist parallel zu DC und somit ist der Winkel AFG gleich DCA.



Damit sind die Dreiecke ADC und AFG gleichwinklig.
Aus den gleichen Gründen sind die Dreiecke ACB und AFE gleichwinklig und damit die Parallelogramme EG und ABCD.

Es verhält sich AD zu DC wie AG zu GF, es verhält sich DC zu CA wie GF zu FA und es verhält sich AC zu CD wie AF zu FE, sowie CB zu BA wie FE zu EA.
Da, wie gezeigt, sich DC zu CA verhält wie GF zu FA und sich AC zu CB verhält wie AF zu FE, verhält sich DC zu CB wie GF zu FE.
Damit sind die Parallelogramme ABCD und EG ähnlich.
Aus den gleichen Gründen sind die Parallelogramme ABCD und KH ähnlich.
Da gradlinige Figuren, die der gleichen Figur ähnlich sind, einander ähnlich sind, sind die Parallelogramme EG und KH ähnlich.

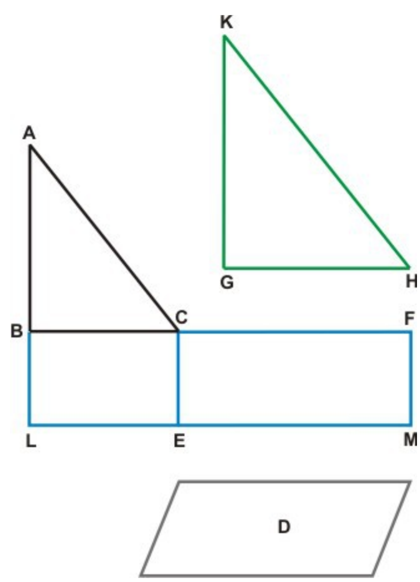
Deshalb sind die Parallelogramme, die auf der Diagonalen eines an einem Punkt der Diagonalen in vier Parallelogramme aufgeteilten Parallelogramms liegen, einander und dem ganzen ähnlich, was zu zeigen war.

VI.25.

Eine einer gegebenen gradlinigen Figur ähnliche Figur errichten, die einer anderen gegebenen gleich ist.

Es seien die gradlinigen Figuren ABC und D gegeben. Es soll eine Figur errichtet werden, die der Figur ABC ähnlich und der Figur D gleich ist.

Es ist auf der Strecke BC das dem Dreieck ABC gleiche Parallelogramm BE zu errichten [wie I.44.], sowie auf der Strecke CE das der Figur D gleiche Parallelogramm CM mit dem Winkel FCE, der dem Winkel CBL gleich ist [wie I.45.].



Es liegen dann BC und CF nebeneinander auf einer Geraden und ebenso LE und EM.
Es sei GH das mittlere Glied der fortlaufend gleichen Proportion mit BC und CF.
Dann ist auf GH das dem Dreieck ABC ähnliche Dreieck KGH ähnlich zu errichten [wie VI.18.].

Da sich BC zu GH verhält wie GH zu CF, und sich von drei Strecken in fortlaufend gleicher Proportion, die erste zur dritten wie die ähnliche und ähnlich errichtete gradlinige Figur über der ersten Strecke zu der über der zweiten verhält, verhält sich BC zu CF wie ABC zu KGH.
Da sich BC zu CF verhält wie BE zu EF, verhält sich ABC zu KGH wie BE zu EF und, nach Umordnung, verhält sich ABC zu BE wie KGH zu EF.
Da das Dreieck ABC gleich dem Parallelogramm BE ist, ist das Dreieck KGH gleich dem Parallelogramm EF. Da EF gleich D ist, ist auch das Dreieck KGH gleich D.

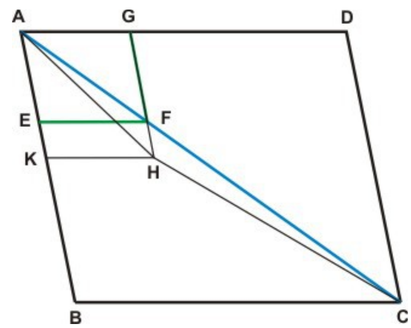
Damit ist das Dreieck KGH dem Dreieck ABC ähnlich und der Figur D gleich errichtet, was auszuführen war.

VI.26.

Die Diagonalen eines Parallelogramms und eines ähnlichen, davon ähnlich abgeteilten, Parallelogramms mit demselben Winkel, liegen aufeinander.

Wenn vom Parallelogramm ABCD ein ihm ähnliches Parallelogramm AF, mit dem selben Winkel DAB, ähnlich abgeteilt wird, dann, sage ich, liegt die Diagonale von AF auf der Diagonalen von ABCD.

Denn wenn nicht, sei AHC die Diagonale von ABCD. Es ist dann GF bis H zu verlängern und durch H die zu AD und BC parallele HK zu ziehen.
Da dann ABCD und KG auf derselben Diagonalen liegen, verhält sich DA zu AB wie GA zu AK.
Da die Parallelogramme ABCD und EG ähnlich sind, verhält sich DA zu AB wie GA zu AE.
Somit verhält sich dann GA zu AK wie GA zu AE.
Es steht dann GA zu AK und AE im gleichen Verhältnis und es ist dann AE gleich AK, die kleinere gleich der größeren, was nicht möglich ist.



Also ist AHC nicht Diagonale von ABCD.
Da die Diagonale von AF auf keiner anderen Diagonalen als AFC liegt, liegt die Diagonale von AF auf der Diagonalen von ABCD.

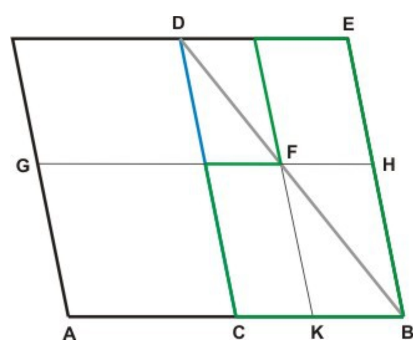
Deshalb liegen die Diagonalen eines Parallelogramms und eines ähnlichen, davon ähnlich abgeteilten Parallelogramms mit demselben Winkel, aufeinander, was zu zeigen war.

VI.27.

Unter allen den ähnlich errichteten Parallelogrammen über einer geteilten Strecke, deren einer Teil dem Parallelogramm über der halben Strecke ähnlich ist, ist bei demjenigen der andere Teil am größten, der über der halben Strecke errichtet ist.

Wenn das über der im Punkt K geteilten Strecke AB errichtete Parallelogramm in K in die Parallelogramme über AK und KB geteilt wird und das Parallelogramm über KB ähnlich dem Parallelogramm AD ist, das über der halben Strecke von AB errichtet ist, dann, sage ich, unter allen Parallelogrammen ist das Parallelogramm über AK am größten, wenn AK gleich der halben AB ist, also das Parallelogramm über AK nicht größer als AD ist.

Es ist auf AB das Parallelogramm AE zu errichten, AB in C und K so zu teilen, dass AC gleich CB und AK größer als AC ist, durch C die zu BE parallele CD und durch K die dazu parallele KF zu ziehen.
Es ist dann die Diagonale DB zu ziehen, auf der der Punkt F des Parallelogramms FB liegt, das dem Parallelogramm DB ähnlich ist. HF und KF sind dann zu verlängern.



Denn da das Parallelogramm DB dem FB ähnlich ist, liegt die Diagonale von FB auf der Diagonalen von DB.
Da die Parallelogramme CF und FE gleich sind [wie I.43.], da sie neben der gleichen Diagonalen FD liegen, ist das Parallelogramm CH gleich KE.
Es ist AC gleich CB, somit sind die Parallelogramme CH und CG gleich und damit ist auch das Parallelogramm GC gleich EK.

Beiden das gleiche Parallelogramm CF hinzugefügt, ist AF gleich dem Gnomon CBEF.
Da das das Gnomon CBEF nicht größer als das Parallelogramm DB ist, ist AF nicht größer als DB. Es ist AD gleich DB und damit AF nicht größer als AD.
Also ist das Parallelogramm über AK am größten, wenn AK gleich AC ist.

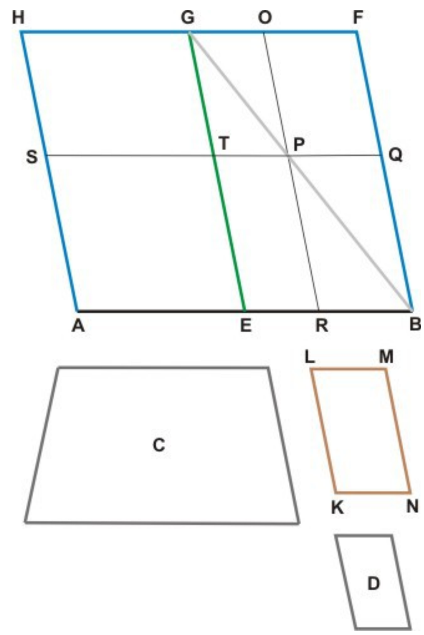
Deshalb ist unter allen den ähnlich errichteten Parallelogrammen über einer geteilten Strecke, deren einer Teil dem Parallelogramm über der halben Strecke ähnlich ist, der andere Teil am größten, der über der halben Strecke errichtet ist, was zu zeigen war.

VI.28.

Auf einer geteilten Strecke ein Parallelogramm errichten, dessen einer Teil gleich einer gegebenen gradlinigen Figur und der andere Teil einem gegebenen Parallelogramm ähnlich und nicht größer als der erste Teil ist.

Es sei die in R geteilte Strecke AB, die gradlinige Figur C und das Parallelogramm D gegeben. Es soll auf AB ein Parallelogramm errichtet werden, dessen einer Teil über AR gleich C und dessen anderer Teil über RB dem D ähnlich ist, wobei der Teil über RB nicht größer als der Teil über AR ist.

Wird AB in E in zwei gleiche Teile geteilt und über EB das der D ähnliche Parallelogramm EBFG ähnlich errichtet, sodann das Parallelogramm AG vervollständigt, dann ist AG entweder gleich C oder größer.



Ist AG gleich C, dann ist, weil das Parallelogramm EF dem D ähnlich ist, AF das geforderte Parallelogramm.
Ist AG größer als C, ist auch GB größer als C. Es ist dann das Parallelogramm KLMN zu errichten, um das GB größer als C ist [wie VI.25.].
Da D dem GB ähnlich ist, ist das Parallelogramm KM dem GB ähnlich, somit entspricht KL der GE und LM der GF.
Da GB gleich den Parallelogrammen C und KM zusammen ist, ist GB größer als KM und damit ist GE größer als KL und GF größer als LM.
Es ist dann GE in T so zu teilen, dass GT gleich KL, und GF in O so zu teilen, dass GO gleich LM ist, und das Parallelogramm TGOP zu vervollständigen.
Das Parallelogramm GP ist dann gleich und ähnlich KM.
Da KM dem GB ähnlich ist, ist auch das Parallelogramm GP dem GB ähnlich und damit liegt die Diagonale von GP auf der Diagonalen von GB. Es ist dann die Diagonale GPB zu ziehen.
Da das Parallelogramm GB gleich den Parallelogrammen C und KM zusammen ist, ist GP gleich KM. Damit ist das Gnomon EBFP gleich C.
Das Parallelogramm OQ ist gleich EP, da sie neben der gleichen Diagonale GB liegen.
Beiden das gleiche Parallelogramm PB hinzugefügt, ist OB gleich BT.
Da AE gleich EB ist, ist das Parallelogramm AT gleich OB.
Beiden das gleiche Parallelogramm TR hinzugefügt, ist das Parallelogramm AP gleich dem Gnomon EBFP. Da das Gnomon EBFP, wie gezeigt, gleich C ist, ist AP gleich C.

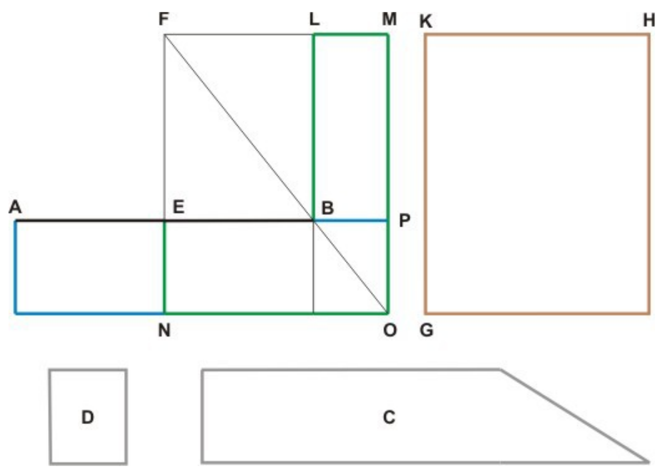
Damit ist auf der in R geteilten Strecke AB ein Parallelogramm errichtet, dessen einer Teil AP gleich C und dessen anderer Teil PB dem Parallelogramm D ähnlich ist, was auszuführen war.

VI.29.

Auf einer Strecke mit Verlängerung ein Parallelogramm errichten, das einer gegebenen gradlinigen Figur gleich und dessen Teil über der Verlängerung einem gegebenen Parallelogramm ähnlich ist.

Es sei die Strecke AB, die gradlinige Figur C und das Parallelogramm D gegeben. Es soll über der Strecke AB und ihrer Verlängerung ein der gradlinigen Figur C gleiches Parallelogramm errichtet werden, dessen Teil über der Verlängerung dem Parallelogramm D ähnlich ist.

Es ist AB in E in zwei gleiche Teile zu teilen und über EB ein der D ähnliches Parallelogramm BF ähnlich zu errichten. Es ist dann das dem D ähnliche Parallelogramm GH ähnlich zu errichten, das den Parallelogrammen BF und C zusammen gleich ist.
GH ist dann auch dem Parallelogramm BF ähnlich, wobei KH der FL und KG der FE entspricht.
Da GH größer als FB ist, ist KH größer als FL und KG größer als FE.
Es sind dann die Strecken FL und FE so zu verlängern, dass die Strecke FLM gleich KH und die Strecke FEN gleich KG ist, und die Parallelogramme MN und AN zu vervollständigen.

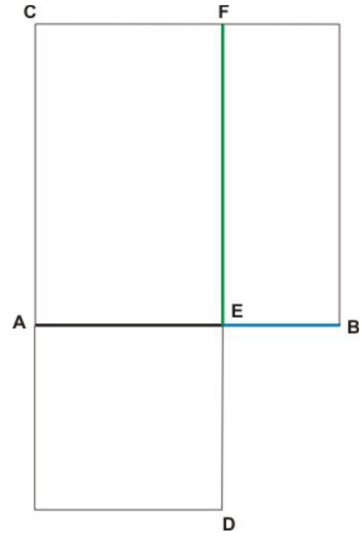


Da GH ähnlich EL ist, ist auch MN ähnlich EL und es ist somit MN gleich und ähnlich GH.
Es ist dann die Diagonale FO des Parallelogramms MN zu ziehen, auf der auch die Diagonale von EL liegt.
Da GH gleich den Parallelogrammen EL und C zusammen ist und GH gleich MN, ist auch MN gleich den Parallelogrammen EL und C zusammen.
Beidem das gleiche Parallelogramm EL weggenommen, ist das Gnomon NOMB gleich C.
Da AE gleich EB ist, ist das Parallelogramm AN gleich NB. Die Parallelogramme NB und LP sind gleich, da sie neben der gleichen Diagonale liegen.
AN und LP das gleiche Parallelogramm EO hinzugefügt, ist AO gleich dem Gnomon NOMB, das gleich C ist. Also ist das Parallelogramm AO gleich C.

Damit ist über der Strecke AB und ihrer Verlängerung das der gradlinigen Figur C gleiche Parallelogramm AO errichtet, dessen Teil BO über der Verlängerung dem Parallelogramm D ähnlich ist, was auszuführen war.

VI.30.

Eine Strecke stetig teilen.



Es soll die Strecke AB stetig geteilt werden. Es ist über AB das Quadrat BC zu errichten; sodann über dessen Seite AC und deren Verlängerung das dem BC gleiche Rechteck CD [wie VI.29.].

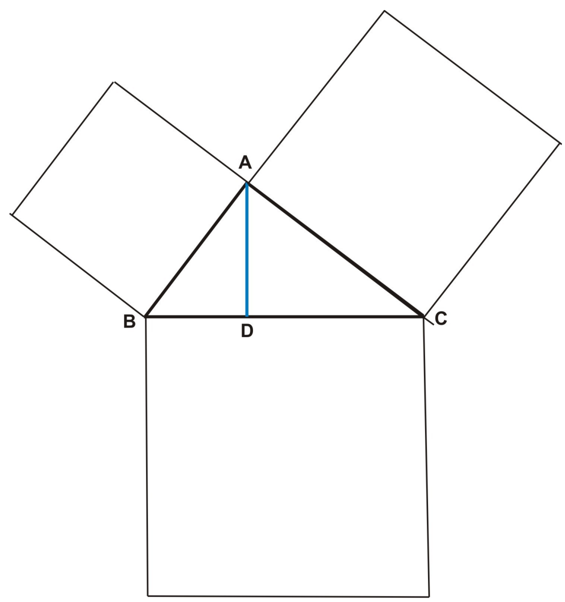
Da BC ein Quadrat ist, ist dann auch AD ein Quadrat.
BC ist gleich CD. Beiden das gleiche Rechteck CE weggenommen, ist BF gleich AD.
Es stehen die Seiten von BF und AD in umgekehrten Verhältnissen zueinander [wie VI.14.] und es verhält sich FE zu ED wie AE zu EB. Da FE gleich AB ist und ED gleich AE, verhält sich BA zu AE wie AE zu EB.
Es ist AB größer als AE, somit ist AE größer als EB.

Damit ist die Strecke AB in E stetig geteilt, wobei AE der größere Teil ist, was auszuführen war.

VI.31.

Im rechtwinkligen Dreieck ist die gradlinige Figur über der Hypotenuse gleich den ähnlichen und ähnlich errichteten Figuren über den Katheten zusammen.

Wenn das Dreieck ABC den rechten Winkel BAC hat, dann, sage ich, ist die gradlinige Figur über der Hypotenuse BC gleich den ähnlichen und ähnlich errichteten gradlinigen Figuren über den Katheten BA und AC zusammen.



Denn wird auf BC die Senkrechte AD durch A errichtet, dann sind die neben der Senkrechten liegenden Dreiecke ABD und ADC dem ganzen Dreieck ABC ähnlich. Es verhält sich somit CB zu BA wie AB zu BD.

Da dann, wenn drei Strecken in fortlaufend gleicher Proportion stehen, sich die erste zur dritten verhält wie die über der ersten und zweiten ähnlichen und ähnlich errichteten Figuren, verhält sich BC zu BD wie die über BC errichtete gradlinige Figur zu der über AB ähnliche und ähnlich errichtete Figur. Aus den gleichen Gründen verhält sich BC zu CD wie die über BC errichtete gradlinige Figur zu der über CA ähnlichen und ähnlich errichteten Figur. Es verhält sich BC zu BD und CD zusammen wie die Figur über BC zu den ähnlichen über BA und AC ähnlich errichteten Figuren zusammen.

Da BC gleich BD und DC zusammen ist und die gradlinige Figur über BC denen über BA und AC ähnlich und ähnlich errichtet ist, ist die Figur über BC gleich den ähnlichen über BA und AC ähnlich errichteten gradlinigen Figuren zusammen.

Deshalb ist im rechtwinkligen Dreieck die über der Hypotenuse errichtete gradlinige Figur gleich den ähnlichen und ähnlich errichteten Figuren über den Katheten zusammen, was zu zeigen war.

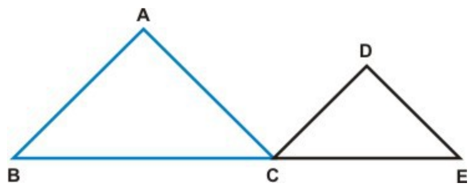
[VI.32.](#)

Stehen zwei Seiten eines Dreiecks im gleichen Verhältnis wie zwei Seiten eines andern, die zu ihnen parallel sind, und haben die Dreiecke einen gemeinsamen Eckpunkt, dann liegen die übrigen Seiten auf derselben Geraden.

Wenn die Seiten BA und AC des Dreieck ABC im gleichen Verhältnis wie die Seiten CD und DE des Dreiecks DCE stehen, verhält sich also AB zu AC wie CD zu DE, und ist AB parallel zu DC, sowie AC parallel zu DE, dann, sage ich, liegen BC und CE auf derselben Geraden.

Denn da AB und DC Parallele sind, die von AC geschnitten werden, sind die wechselseitigen Winkel BAC und ACD gleich [wie I.29.]. Aus dem gleichen Grund sind die Winkel CDE und ACD gleich und somit sind BAC und CDE gleich.
Da in den Dreiecken ABC und DCE die gleichen Winkel in A und D von Seiten eingeschlossen werden, die in Proportion stehen, sich also BA zu AC verhält wie CD zu DE, sind ABC und DCE gleichwinklig [wie VI.6.]. Damit ist der Winkel ACD gleich BAC.

Es ist der Winkel ACE gleich den Winkeln ABC und BAC zusammen.
Beidem der gleiche Winkel ACB hinzugefügt, sind die Winkel ACE und ACB zusammen gleich den Winkeln BAC, ACB und CBA zusammen, die gleich zwei rechten Winkeln sind.
Also sind die Winkel ACE und ACB zusammen gleich zwei rechten Winkeln.
Daher liegen BC und CE auf der gleichen Geraden.



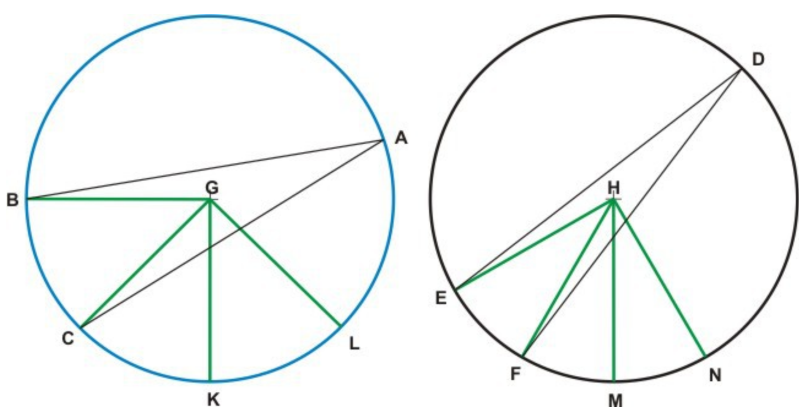
Deshalb, wenn zwei Seiten eines Dreiecks im gleichen Verhältnis stehen wie zwei Seiten eines andern, die zu ihnen parallel sind, und die Dreiecke einen gemeinsamen Eckpunkt haben, liegen die übrigen Seiten auf derselben Geraden, was zu zeigen war.

[VI.33.](#)

In gleichen Kreisen stehen die Winkel über den Kreisbögen, im Mittelpunkt wie auf der Kreislinie, im gleichen Verhältnis wie die Kreisbögen.

Wenn in den gleichen Kreisen ABC, DEF die Winkel BGC, EHF in den Mittelpunkten G, H und auf den Kreislinien die Winkel BAC, EDF liegen, dann, sage ich, verhält sich der Kreisbogen BC zum Kreisbogen EF wie der Winkel BGC zu EHF und wie der Winkel BAC zu EDF.

Es seien auf der Kreislinie ABC eine beliebige Anzahl nebeneinander liegender Kreisbögen CK, KL gleich BC und auf der Kreislinie DEF ebenso viele nebeneinander liegende Kreisbögen FM, MN gleich EF. Es sind dann GK, GL, HM, HN zu ziehen.



Da die Kreisbögen BC, CK, KL gleich sind, sind die auf ihnen stehenden Winkel BGC, CGK, KGL gleich [wie III.27.].

Ebenso oft der Kreisbogen BL Vielfaches des Kreisbogens BC ist, ist der Winkel BGL Vielfaches von BGC.
Aus den gleichen Gründen ist der Kreisbogen NE ebenso oft Vielfaches des Kreisbogens EF wie der Winkel NHE von EHF.

Ist der Kreisbogen BC gleich EF, dann ist auch der Winkel BGC gleich EHF, ist BC größer als EF, dann auch BGC größer als EHF und ist BC kleiner als EF, dann ist auch BGC kleiner als EHF.

Damit steht die erste Größe BC im gleichen Verhältnis zur zweiten Größe EF wie die dritte Größe BGC zur vierten Größe EHF und es verhält sich der Kreisbogen BC zu EF wie der Winkel BGC zu EHF.
Es verhält sich der Winkel BGC zu EHF wie der Winkel BAC zu EDF, da der Winkel im Mittelpunkt das Doppelte des Winkels auf der Kreislinie ist [wie III.20.].
Damit verhält sich der Kreisbogen BC zu EF wie der Winkel BGC zu EHF und wie der Winkel BAC zu EDF.

Deshalb stehen in gleichen Kreisen die Winkel über den Kreisbögen, im Mittelpunkt wie auf der Kreislinie, im gleichen Verhältnis wie die Kreisbögen, was zu zeigen war.
