Euklid: Stoicheia. Buch VII.

Über eingefügte Hypertextmarkierungen kann der griechische Text in der Fassung von I. L. Heiberg aufgerufen werden.

Erklärungen.

1. Eine Einheit ist etwas, das zu einer solchen bestimmt wird.
2. Eine Zahl bezeichnet die Anzahl der Einheiten, aus denen etwas besteht.
3. Kann die größere von zwei Zahlen, genau so oft wie die kleinere angibt, in eine Zahl aufgeteilt werden, so ist diese ein Teiler der größeren Zahl,
4. andernfalls ist diese ein Teil der größeren Zahl.
5. Eine Vielfache ist die größere Zahl zu einer kleineren, wenn sie in die kleinere genau aufgeteilt werden kann.
6. Eine gerade Zahl ist in zwei gleiche Teile teilbar.
7. Eine ungerade Zahl ist nicht in zwei gleiche, aber in zwei Teile teilbar, die sich um Eins unterscheiden.
8. Gerademal gerade ist eine Zahl, die das gerade Vielfache einer geraden Zahl ist.
9. Ungerademal gerade ist eine Zahl, die das ungerade Vielfache einer geraden Zahl ist.
10. Ungerademal ungerade ist eine Zahl, die das ungerade Vielfache einer ungeraden Zahl ist.
11. Eine Primzahl ist keiner anderen Zahl Vielfache als der Eins.
12. Zahlen, die keinen anderen gemeinsamen Teiler haben als die Eins, sind teilerfremd.
13. Ein Produkt ist das Vielfache einer Zahl größer als Eins.
14. Die Faktoren ähnlicher Produkte sind jeweils gleiche Vielfache der Faktoren einer anderen Zahl.
15. Eine Zahl wird mit einer anderen multipliziert, indem man die erste Zahl so oft zusammenzählt, wie die zweite Zahl angibt.
16. Ergibt sich ein Flächeninhalt aus der Multiplikation zweier Zahlen, dann heißen die Zahlen, die multipliziert werden, die beiden Seitenlängen der Fläche.
17. Ergibt sich der Rauminhalt eines Körpers aus der Multiplikation dreier Zahlen, dann heißen Zahlen, die multipliziert werden, die drei Seitenlängen des Körpers.
18. Eine Quadratzahl entsteht aus der Multiplikation von Gleichem mit Gleichem oder ist das Produkt zweier gleicher Zahlen.
19. Eine Kubikzahl entsteht aus der Multiplikation von Gleichem mit Gleichem und nochmal mit Gleichem oder ist das Produkt dreier gleicher Zahlen.
20. Zahlen in Proportion sind diejenigen, deren erste und zweite Zahl das gleiche Vielfache, der gleiche Teiler oder das gleiche Teil wie die dritte und vierte Zahl ist.
21. Flächen und Körper mit ähnlichen Maßzahlen haben Seiten, die in Proportion stehen.
22. Eine vollkommene Zahl ist der Summe ihrer Teiler gleich.

Anmerkungen:

zu 1.
Die Einheit, Monas (Μονάς), ist durch ihre Wahl unterschieden von allen anderen Anzahlen.

zu 2.
Eine Zahl, Arithmos (`Αριδμὸς), bezeichnet eine Anzahl ohne die Nennung des Gezählten.
Die Zahl der Einheit ist Eins.

zu 3.
Teilung in ganzzahliger Rechnung.
Der Teiler kann so oft, wie die kleinere Zahl angibt, von der größeren Zahl ohne Rest subtrahiert werden.

zu 4.
Ein Teil einer Zahl steht zur Zahl in einem rationalen Verhältnis.

zu 22.
Vollkommene Zahlen sind

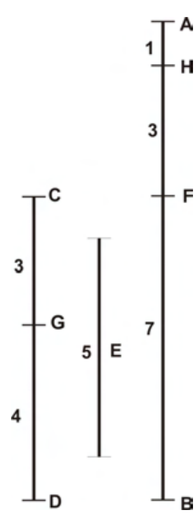
$1+2+3 = 6$
$1+2+4+7+14 = 28$
$1+2+4+8+16+31+62+124+248 = 496$
$1+2+4+8+16+32+64+127+254+508+1016+2032+4064 = 8128$
. . .

Diese vier ersten vollkommenen Zahlen waren in der Antike bekannt.

VII.1.

Wird von zwei ungleichen Zahlen ausgehend, immer wieder die kleinere von der größeren Zahl subtrahiert, und bleibt schließlich der Rest Eins, dann sind sie teilerfremd.

Wenn von zwei ungleichen Zahlen AB und CD ausgehend, immer die kleinere von der größeren Zahl subtrahiert wird, stets ein Rest und schließlich der Rest Eins bleibt, dann, sage ich, sind die beiden Zahlen AB und CD teilerfremd und sie sind verschiedene Vielfache des einzigen gemeinsamen Teilers Eins.



Denn wenn AB und CD nicht teilerfremd sind, dann haben sie einen gemeinsamen Teiler größer Eins.

Dieser Teiler sei die Zahl E.Es bleibe dann von AB in CD aufgeteilt der Rest BF, der kleiner als CD ist.
Von CD in BF aufgeteilt bleibe der Rest CG, der kleiner als BF ist.
Von BF in CG aufgeteilt bleibe der Rest BH, der Eins ist.

Denn da dann E Teiler von CD ist und CD Teiler von BF, dann ist E Teiler von BF, aber auch von AB, folglich vom Rest AF.

Da AF Teiler von GD ist und E Teiler von AF, ist E Teiler von GD, aber auch von CD, folglich vom Rest CG,

und da dann E Teiler von CG und CG Teiler von HF ist, so ist E Teiler von HF, aber auch von FA, folglich vom Rest AH, also Eins, was nicht sein kann.

Deshalb haben AB und CD keinen anderen gemeinsamen Teiler als Eins und sind teilerfremd, was zu zeigen war.

Euklidischer Algorithmus zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers:

Mit ganzzahligen Divisionen mit Rest statt Subtraktionen ist der Euklidische Algorithmus:
Gegeben seien natürliche Zahlen a, b größer 1, $a > b$, sowie m_i, k_i

$a = b \cdot m_1 + k_1$	Beispiel:	gegeben seien 84 und 61
$b = k_1 \cdot m_2 + k_2$		$84 = 61 \cdot 1 + 23$
$k_1 = k_2 \cdot m_3 + k_3$		$61 = 23 \cdot 2 + 15$
$k_2 = k_3 \cdot m_4 + k_4$		$23 = 15 \cdot 1 + 8$
. . .		$15 = 8 \cdot 1 + 7$
$k_n = k_{n+1} \cdot m_{n+2} + k_{n+2}$		$8 = 7 \cdot 1 + 1$

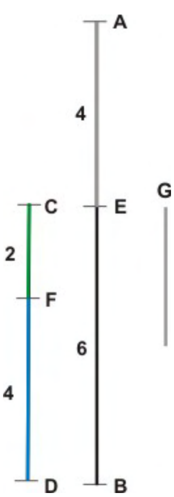
Ist zu zwei Zahlen AB und CD der größte gemeinsame Teiler ggT(AB, CD) =1, dann sind sie teilerfremd.

VII.2.
Zu zwei Zahlen, die nicht teilerfremd sind, den größten gemeinsamen Teiler finden.

Es soll der größte gemeinsame Teiler von AB und CD, die nicht teilerfremd sind, bestimmt werden.

Wenn CD Teiler von AB ist, ist CD, weil auch Teiler von sich selbst, gemeinsamer Teiler. CD ist dann auch der größte Teiler, denn größer als CD kann ein Teiler von CD nicht sein.

Wenn CD nicht Teiler von AB ist, subtrahiert man, von den beiden Zahlen AB und CD ausgehend, immer die kleinere von der größeren bis die entstandene Zahl Teiler der ihr vorhergehenden ist, der dann der größte gemeinsame Teiler von AB und CD ist. Da AB und CD nicht teilerfremd sind, wird der Rest nicht Eins sein, denn dies widerspräche der Annahme, sondern eine Zahl wird gefunden werden, die Teiler der ihr vorhergehenden ist.



Es lasse nun AB in CD aufgeteilt den Rest AE, kleiner als CD und CD in AE aufgeteilt den Rest CF, kleiner als AE, der Teiler der ihr vorhergehenden Zahl, AE, ist. Da dann CF Teiler der AE ist und AE Teiler der FD, so ist dann CF Teiler der FD, aber auch von sich selbst, deshalb von CD.
Und da CF Teiler von CD und CD Teiler von EB, aber auch CF Teiler von AE ist, ist damit CF Teiler von AB, und damit ist CF ein gemeinsamer Teiler von AB und CD.

Ich sage, es ist auch der größte.
Denn wäre CF es nicht, so sei G der größere gemeinsame Teiler.
Da dann G Teiler der CD ist und CD Teiler von EB, damit ist G Teiler der EB, aber auch Teiler der AB, folglich auch der AE. Es ist dann G Teiler von AE und AE Teiler von FD, aber auch der CD, folglich auch von CF, was, da G größer als CF angenommen wurde, unmöglich ist. Damit gibt es keinen größeren Teiler als CF und CF ist der größte gemeinsame Teiler von AB und CD, der aufzusuchen war.

Folgerung: **Offensichtlich ist der Teiler zweier Zahlen auch Teiler des größten gemeinsamen Teilers dieser Zahlen, was zu zeigen ist.**

Anmerkung:

Sind zwei Zahlen A und B gegeben und ist der mit dem Euklidischen Algorithmus berechnete letzte nicht verschwindende Rest $n > 1$, dann ist $ggT(A, B) = n$.

VII.3.

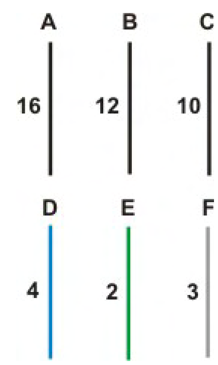
Zu drei Zahlen, die nicht teilerfremd sind, den größten gemeinsamen Teiler finden.

Es seien drei Zahlen A, B und C gegeben und es ist der größte gemeinsame Teiler von A, B und C aufzusuchen.

Es sei nun D der größte gemeinsame Teiler von A und B,
dann wird D entweder Teiler auch von C sein oder nicht.
Ist D Teiler von C, dann ist D Teiler von A, B und C und D ist gemeinsamer Teiler von A, B und C. Ich sage, dann ist D auch der größte Teiler.

Denn wenn D nicht der größte gemeinsame Teiler von A, B und C ist, dann ist eine größere Zahl als D Teiler von A, B und C; diese Zahl sei E.
Da nun E Teiler von A, B und C ist, damit Teiler von A und B, ist es auch Teiler des größten gemeinsamen Teilers von A und B, welches D ist.
E ist dann Teiler von D und damit kleiner als D.
Dies widerspricht der Annahme und deshalb haben A, B und C keinen größeren Teiler als D, also ist D der größte gemeinsame Teiler von A, B und C.

Ist aber D nicht Teiler von C, dann sage ich zunächst, C und D sind nicht teilerfremd.
Denn da A, B und C nicht teilerfremd sind, gibt es eine Zahl die ihr Teiler ist.
Eine Zahl, die Teiler von A, B und C ist, ist Teiler von A und B und auch vom größten gemeinsamen Teiler von A und B, welches D ist.
Da die Zahl auch Teiler von C ist, ist sie auch Teiler von C und D und
deshalb sind C und D nicht teilerfremd.



Es sei nun E ihr größter gemeinsamer Teiler. Da E Teiler von D ist, D aber von A und B, ist E auch Teiler von A und B.
Da E Teiler auch von C ist, ist E Teiler von A, B und C und ist gemeinsamer Teiler von A, B und C.

Ich sage dann, dass er auch ihr größter ist.
Denn, ist E nicht der größte gemeinsame Teiler von A, B und C, dann ist eine andere Zahl, die größer als E ist, Teiler von A, B und C. Es sei diese Zahl F.
Da F Teiler von A, B und C ist, damit Teiler von A und B, ist er auch Teiler deren größten gemeinsamen Teilers, welches D ist.
F ist also Teiler von D, ist aber auch Teiler von C, ist also Teiler von C und D und damit Teiler des größten gemeinsamen Teilers von C und D.
Da der größte gemeinsame Teiler von C und D aber E ist, ist F Teiler von E und damit kleiner als E, was der Annahme widerspricht.

Damit ist E der größte gemeinsame Teiler von A, B und C, was auszuführen war.

Anmerkung:

E = ggT(ggT(A, B), C)) = ggT(A, B, C).

VII.4.

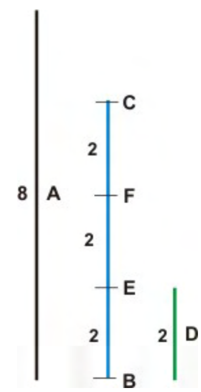
Eine kleinere Zahl ist entweder Teiler oder ein Teil einer größeren Zahl.

Wenn zwei Zahlen A und BC gegeben sind, und BC ist die kleinere, dann, sage ich, ist BC entweder Teiler von A oder ein Teil von A.

Denn A und BC sind entweder teilerfremd oder nicht.

Sind sie teilerfremd, dann ist BC in Teile gleich der Eins aufzuteilen.
Jede Eins ist auch Teil von A. Da jede Eins auch Teil von BC ist, ist BC Teil von A.

Haben A und BC aber einen gemeinsamen Teiler, dann ist A ein Vielfaches von BC oder nicht.
Ist A Vielfaches von BC, dann kann A so oft, wie BC in die Eins aufteilbar ist, in gleiche Teile geteilt werden.
Es sei D die Anzahl dieser Teile, deren jedes gleich BC ist, das damit ein Teiler von A ist.
Ist A nicht Vielfaches von BC, aber haben einen gemeinsamen Teiler, dann gibt es einen größten gemeinsamen Teiler von A und BC, es sei dies D.
BC ist in gleich große Teile D teilbar. Ebenso ist A in gleich große Teile D teilbar und D ist damit Teiler von A.



Wird BC in BE, EF und FC geteilt, dann ist jedes der Teile BE, EF und FC gleich D und ist jedes der Teile BE, EF und FC ein Teil von A.
Da BE, EF und FC Teile von BC sind, ist auch BC Teil von A.

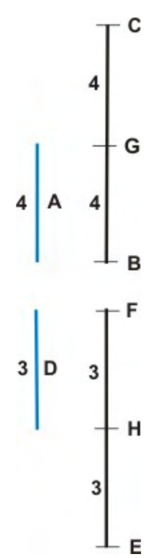
Deshalb ist eine kleinere Zahl immer ein Teiler oder ein Teil einer größeren, was zu zeigen war.

VII.5.

Ist eine Zahl ein bestimmter Teiler einer Zahl und eine andere Zahl der gleiche Teiler einer weiteren Zahl, dann ist die Summe der Zahlen auch der gleiche Teiler der Summe der Zahlen von denen sie Teiler sind.

Es sei A ein Teiler von BC so wie D ein Teiler von EF ist. BC hat dann gleich viele gleiche Teile A wie EF Teile D. Dann, sage ich, hat die Summe von BC und EF ebenso viele Teile aus der Summe von A und D wie BC Teile A.

Denn was für ein Teiler auch immer A von BC ist, D ist der gleiche Teiler von EF und die Summe von A und D der gleiche Teiler der Summe von BC und EF. Es werde BC in Zahlen, die A gleich sind, geteilt, nämlich in BG und GC, und EF in Zahlen, die D gleich sind, nämlich in EH und HF.
Dann sind BC und EF die gleichen Vielfache von GC und HF.



Da nun BG gleich A und EH gleich D ist die Summe von BG und EH gleich der Summe von A und D, aber auch die Summe von GC und HF ist gleich der Summe von A und D. So viele Teile deshalb wie auch immer von A in BC sind,
so viele sind auch von der Summe von A und D in der Summe von BC und EF. Ein so Vielfaches wie auch immer BC von A ist, ein so Vielfaches ist die Summe von BC und EF von der Summe von A und D.

Welcher Teiler wie auch immer A von BC und D von EF ist, die Summe von A und D ist deshalb der gleiche Teiler der Summe von BC und EF, was zu zeigen war.

Anmerkung:

Ist A Teiler von BC, dann gibt es ein n, so dass $BC = A \cdot n$
ist D der gleiche Teiler von EF, dann ist $EF = D \cdot n$

Es sei $n = 2$.
Es wird BC in n Teile geteilt $BC = BG+GC$, wobei $BG = GC = A$
und wird EF geteilt $EF = EH+HF$, wobei $EH = HF = D$

$BC+EF = GC \cdot n + HF \cdot n$

$BC+EF = (GC + HF)\, n$

Da die Teilung für alle n, n wie auch immer, durchgeführt werden kann
und $GC+HF = A+D$ und $BC = A \cdot n$ und $EF = D \cdot n$
ist für alle n $A \cdot n + D \cdot n = (A+D) \cdot n$.

VII.6.

Ist eine Zahl ein bestimmter Teil einer Zahl und eine andere der gleiche Teil einer weiteren Zahl, dann ist die Summe der kleineren Zahlen der gleiche Teil von der Summe der größeren Zahlen.

Es sei eine Zahl AB ein Teil von C und eine Zahl DE der gleiche Teil von F wie AB von C. Dann, sage ich, ist die Summe von AB und DE der gleiche Teil der Summe von C und F, wie AB von C.

Denn wie groß auch immer der Teil AB von C ist und ebenso groß der Teil DE von F ist, so oft AB in Teile von C aufgeteilt werden kann, gleich oft kann DE in Teile von F aufgeteilt werden. Es werde AB ebenso oft geteilt, nämlich in AG und GB und
es werde DE ebenso oft geteilt, nämlich in DH und HE, dann sind AG und GB so viele Teile von C wie DH und HE Teile von F sind.
Welcher Teil wie auch immer AG von C ist, DH ist ein so großer Teil von F. Also ist die Summe von AG und DH ein ebenso großer Teil der Summe von C und F wie GB von C und aus den selben Gründen ist auch die Summe von GB und HE ein ebenso großer Teil der Summe von C und F.

Welcher Teil deshalb wie auch immer AB von C ist, die Summe von AB und DE ist der gleiche Teil der Summe von C und F, was zu zeigen war.

Anmerkung:

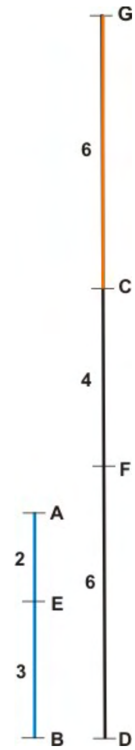
Ist AB Teil von C und nicht Teiler von C,
dann gibt es natürliche Zahlen q, n und m, wobei
$q = n \cdot 1/m$, so dass $C = AB \cdot n \cdot 1/m$ und $AB = C \cdot m \cdot 1/n$
und DE ist der gleiche Teil von F $F = DE \cdot n \cdot 1/m$ und $DE = F \cdot m \cdot 1/n$

Es können also AB und DE in m gleiche Teile geteilt werden. Es sei $m = 2$,
und AB werde in 2 Teile geteilt $AB = AG + GB$ wobei $AG = GB$
und DE geteilt $DE = DH + HE$ wobei $DH = H$
Es ist dann $C = AG \cdot n \cdot m \cdot 1/m = AG \cdot n$ und $F = DH \cdot n$
und $C+F = AG \cdot n + DH \cdot n$
C+F enthält n Teile AG+DH, deshalb $C+F = (AG+DH) \cdot n$
Da die Teilung für alle m, m wie auch immer, gilt
mit $q = n \cdot 1/m$, somit $C = AB \cdot q$ und $F = DE \cdot q$, und $AB \cdot q + DE \cdot q = (AB+DE) \cdot q$.

VII.7.

Ist eine Zahl ein Teiler einer größeren und das von ihr Subtrahierte der gleiche Teiler wie das von der größeren Subtrahierte, dann ist auch der Rest der Zahl der gleiche Teiler vom Rest der größeren.

Wenn eine Zahl AB Teiler einer Zahl CD ist, und wird AE von AB und CF von CD subtrahiert, so dass AE der gleiche Teiler von CF ist wie AB von CD, dann, sage ich, ist der Rest EB der gleiche Teiler vom Rest FD, denn was immer für ein Teiler AE ist von CF, der gleiche Teiler ist EB von FD.



Es sei ein G so, dass EB von GC der gleiche Teiler ist wie AE von CF.
Welcher Teiler wie auch immer AE von CF ist, der gleiche Teiler ist dann EB von GC und welcher Teiler wie auch immer AE von CF ist, der gleiche Teiler ist auch AB von CD.
Da welcher Teiler wie auch immer AE von CF ist, der gleiche Teiler ist AB von GF, deshalb welcher Teiler wie auch immer AB von GF ist, der gleiche Teiler ist AB auch von CD. Deshalb ist GF gleich CD.
Wird CF von beiden subtrahiert, dann ist der Rest GC gleich dem Rest FD.
Welcher Teiler wie auch immer AE dann von CF ist, der gleiche Teiler ist dann EB von GC, denn GC ist gleich FD, und welcher Teiler wie auch immer AE ist von CF, der gleiche Teiler ist EB von FD.
Da nun welcher Teiler wie auch immer AE von CF ist,
der gleiche Teiler ist EB von FD.

Deshalb ist der Rest EB der gleiche Teiler vom Rest FD wie AB von CD, was zu zeigen war.

Anmerkung:

Ist AB Teiler einer Zahl CD, dann gibt es ein n, so dass $CD = AB \cdot n$

und ist $AE = AB - EB$ und $CF = CD - FD$, dann ist $CF = AE \cdot n$ für die Subtrahenden

Es sei nun ein $GC = GF - CF$, so dass $GC = EB \cdot n$,
$GF = GC + CF = CD$,

dann ist auch $GF = AB \cdot n$,
und da $GF = CD$,
deshalb ist auch $GC = FD$ und damit $FD = EB \cdot n$ für die Reste.

Damit gilt für alle natürlichen Zahlen, n wie auch immer, $AB \cdot n \; - \; AE \cdot n = (AB - AE) \cdot n$.

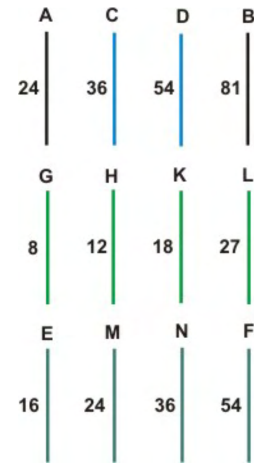
VII.8.

Ist eine Zahl ein solcher Teil einer anderen wie das von ihr Subtrahierte ein Teil des von der größeren Subtrahierte ist, so ist auch ihr Rest der gleiche Teil vom größeren Rest wie ihr Ganzes vom größeren Ganzen.

Wenn AB ein Teil einer Zahl CD ist und das von ihr subtrahierte AE der gleiche Teil von CF ist, das von CD subtrahiert wird, dann, sage ich, ist der Rest EB der gleiche Teil vom Rest FD wie AB von CD.

Es sei nun ein GH gleich AB. Dann enthält GH so viele Teile von CD wie AE von CF.
Es werde GH eben so oft geteilt, nämlich in GK und KH, und
AE eben so oft geteilt, nämlich in AL und LE, dann sind in GK und AE gleich viele Teile.

Welcher Teil GK wie auch immer von CD ist und AL ein Teil von CF ist, da CD größer als CF ist, ist GK größer als AL.
Es sei nun ein GM gleich AL, dann ist GK der gleiche Teil von CD wie GM von CF, deshalb ist der Rest MK der gleiche Teil vom Rest FD wie GK von CD.
Welcher Teil deshalb wie auch immer KH von CD ist, der gleiche Teil ist LE von CF, da aber CD größer ist wie CF, ist auch KH größer als LE.
Es sei nun ein KN gleich LE, dann ist KH der gleiche Teil von CD wie KN von CF, deshalb ist NH von FD der gleiche Teil wie KH von CD.
Dann enthält MK+NH von FD so viele Teile wie GH von CD.
Es ist aber MK+NH gleich EB und GH gleich AB.



Deshalb ist der Rest EB der gleiche Teil vom Rest FD wie das ganze AB vom ganzen CD, was zu zeigen war.

Anmerkung:

Da AB ein Teil von CD und AE ein Teil von CF ist, gilt damit
das Distributivgesetz $AB \cdot q - AE \cdot q = (AB - AE) \cdot q$ für rationale Zahlen.

VII.9.

Ist eine Zahl von einer anderen der gleiche Teiler wie eine dritten von einer vierten, dann ist, wenn umgeordnet wird, welcher Teil oder Teiler auch immer die erste Zahl von der dritten ist, die zweite der gleiche Teil oder Teiler von der vierten.

Wenn eine Zahl A Teiler einer Zahl BC ist und eine andere Zahl D der gleiche Teiler von EF wie A von BC, dann ist, sage ich, wenn umgeordnet wird, welcher Teil oder Teiler A von D auch ist, BC von EF der gleiche Teil oder Teiler.
Denn welcher Teiler A von BC auch ist und der gleiche Teiler D von EF ist, so oft BC in A aufgeteilt werden kann, ebenso oft kann EF in D aufgeteilt werden.

Es werde BC in der A gleiche Teile geteilt, nämlich in BG und GC, und EF in der D gleiche Teile geteilt, nämlich EH und HF, dann ist BC in so viele Teile gleich A geteilt wie EF in Teile gleich D.

Da nun BG gleich GC ist, ist auch EH gleich HF und welcher Teil oder Teiler dann auch immer BG von EH ist, der gleiche Teil oder Teiler ist GC von HF und was auch immer BG von EH für ein Teil oder Teiler ist, der gleiche ist BC von EF.
BG ist aber gleich A und EH gleich D.

Deshalb ist, welcher Teil oder Teiler auch immer A von D ist, der gleiche Teil oder Teiler ist BC von EF, was zu zeigen war.

Anmerkung:

Wenn $A : BC = D : EF$
dann gilt nach Umordnung $A : D = BC : EF$

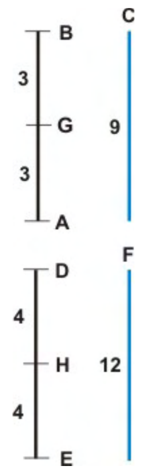
Beispiel: 2 ist Teiler von 4, 3 ist ein gleicher Teiler von 6

nach Umordnung ist $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$

VII.10.

Ist eine Zahl von einer anderen der gleiche Teil wie eine dritte von einer vierten, dann ist, wenn umgeordnet wird, welcher Teil oder Teiler auch immer die erste Zahl von der dritten ist, die zweite der gleiche Teil oder Teiler von der vierten.

Wenn eine Zahl AB Teil einer Zahl C ist und eine andere Zahl DE der gleiche Teil von F wie AB von C, dann ist, sage ich, wenn umgeordnet wird, welcher Teil oder Teiler AB von DE auch ist, C von F der gleiche Teil oder Teiler.



Denn welche Teile von C auch in AB enthalten sind und Teile von F in DE, so oft AB in Teile von C aufgeteilt werden kann, ebenso oft kann DE in Teile von F aufgeteilt werden.

Zerlegt man AB in Teile von C, es sei dies AG und GB, und DE in Teile von F, nämlich DH und HE, dann ist AB ein solches Vielfaches seiner Teile, nämlich von AG oder von GB, wie DE ein Vielfaches seiner Teile ist, nämlich von DH oder von HE.

Ist nun AG von C der gleiche Teiler wie DH von F, dann ist, nach Umordnung, AG von DH der gleiche Teil oder Teiler wie C von F; es ist aber auch GB von HE der gleiche Teil oder Teiler wie C von F.

Deshalb ist, welcher Teil oder Teiler AB von DE auch immer ist, C von F der gleiche Teil oder Teiler, was zu zeigen war.

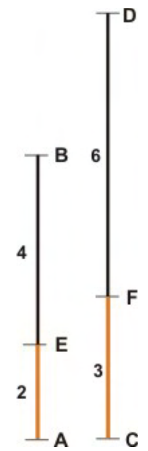
Anmerkung:

Wenn	AB : C = DE : F
dann ist, nach Umordnung	AB : DE = C : F

VII.11.

Wenn sich ein Ganzes zu einem anderen Ganzen verhält wie ein davon Subtrahiertes zu dem vom andern Subtrahierten, dann verhalten sich auch die Reste zueinander wie das eine Ganze zum anderen.

Wenn AB von CD der gleiche Teil oder Teiler ist wie das von AB Subtrahierte AE von dem von CD Subtrahierten CF, dann, sage ich, ist auch der Rest EB vom Rest FD der gleiche Teil oder Teiler wie AB von CD.



Der gleiche Teil oder Teiler, der AB von CD ist, auch AE von CF.
Welche Zahl von Teilen oder Teilern deshalb auch immer, von AB in CD enthalten sind, die gleiche Zahl von Teilen oder Teilern von AE ist auch in CF enthalten.
Deshalb ist Rest EB der gleiche Teil oder Teiler von FD, wie AB von CD.

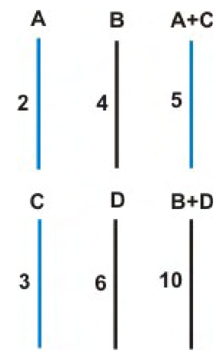
Deshalb verhält sich EB zu FD wie AB zu CD, was zu zeigen war.

Anmerkung:

Es sei	AB = AE+EB und CD = CF+FD.
Ist	AB : CD = (AB – EB) : (CD – FD)
dann auch	AB : CD = (AB – AE) : (CD – CF)
somit	AB : CD = EB : FD
und es ist	AB : CD = (AB – AE) : (CD – CF).

VII.12.

In einer Proportion verhält sich die Summe der Vorderglieder zur Summe der Hinterglieder wie die erste zur zweiten Zahl.



Stehen Zahlen A, B, C und D, welche auch immer, in einer Proportion, so dass sich A zu B verhält wie C zu D, dann, sage ich, verhält sich die Summe von A und C zur Summe von B und D wie A zu B.

Denn, wenn sich A zu B verhält wie C zu D, welcher Teil oder Teiler A von B ist, der gleiche Teil oder Teiler ist C von D,
deshalb ist die Summe von A und C ebenfalls der gleiche Teil oder Teiler der Summe von B und D wie A von B.

Deshalb verhält sich die Summe von A und C zur Summe von B und D wie A zu B, was zu zeigen war.

Anmerkung:

Ist A Teil oder Teiler von B, und C Teil oder Teiler von D, wobei $A : B = C : D$,
dann gibt es ein q,

so dass	$B = A \cdot q$
und	$D = C \cdot q$
deshalb ist	$B+D = (A+C) \cdot q$
somit	$A : B = A+C : B+D.$

VII.13.

Stehen vier Zahlen in einer Proportion, dann stehen sie auch nach Umordnen in Proportion zueinander.

Stehen die vier Zahlen A, B, C und D in einer Proportion und steht A im gleichen Verhältnis zu B wie C zu D, dann, sage ich, steht auch nach Umordnen A im gleichen Verhältnis zu C wie B zu D.

Weil sich A zu B verhält wie C zu D ist A von B der gleiche Teil oder Teiler wie C von D und deshalb ist nach Umordnen A der gleiche Teil oder Teiler von C wie B von D.

Deshalb steht A im gleichen Verhältnis zu C wie B zu D, was zu zeigen war.

Anmerkung:

Ist	$A : B = C : D$

und ist A Teil oder Teiler von B, dann gibt es ein q_1,

so dass	$B = A \cdot q_1$ und $D = C \cdot q_1$

und gibt es ein q_2,

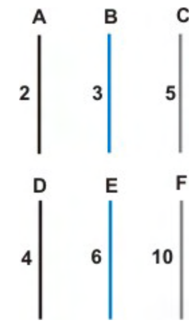
so dass	$C = A \cdot q_2$ und $D = B \cdot q_2$
dann ist	$A : C = B : D.$

Beispiel: *Da* $\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$ *ist* $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$

VII.14.

Sind mehrere Zahlen mit anderen gegeben, die mit ihnen paarweise in Proportion stehen, so stehen jeweils auch die ersten mit der letzten paarweise in Proportion.

Sind die Zahlen A, B und C gegeben und dazu D, E und F, die mit ihnen paarweise in Proportion stehen, verhält sich also A zu B wie D zu E und B zu C wie E zu F, dann, sage ich, verhält sich auch A zu C wie D zu F.

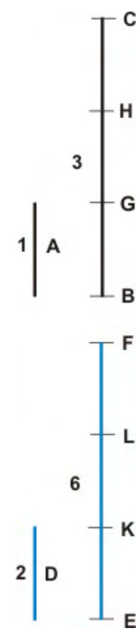


Da sich A zu B verhält wie D zu E, verhält sich, nach Umordnung, A zu D wie B zu E, und da sich B zu C verhält wie E zu F, verhält sich, nach Umordnung, B zu E wie C zu F, da aber B zu E sich verhält wie A zu D, verhält sich A zu D wie C zu F, und, nach Umordnung, A zu C wie D zu F, was zu zeigen war.

VII.15.

Ist eine Zahl so oft Vielfache von der Eins wie eine andere Zahl Vielfache von einer weiteren, so ist, nach Umordnung, die dritte Zahl so oft Vielfache von der Eins wie die vierte Vielfache von der zweiten.

Ist eine Zahl BC so oft Vielfache der Zahl A, die gleich Eins ist, wie EF Vielfache der Zahl D, dann, sage ich, ist nach Umordnung, D genau so oft Vielfache der A wie EF Vielfache der BC.
Da BC in die Eins so oft aufteilbar ist wie EF in D, hat BC genau so viele Teile gleich der Eins wie EF Teile gleich D. Teilt man BC in eben so viele Teile, nämlich in BG, GH, HC und teilt man EF in ebenso viele gleiche Teile gleich D, nämlich EK, KL und LF, so sind so viele Teile in BC wie in EF.



Es verhält sich BG zu EK wie GH zu KL und wie HC zu LF. So wie ein Vorderglied zum Hinterglied verhalten sich alle Vorderglieder zu den Hintergliedern und also verhält sich auch BC zu EF wie BG zu EK.
Es ist aber BG gleich A und EK gleich D, deshalb verhält sich BC zu EF wie A zu D.

Deshalb ist D so oft Vielfache der A wie EF Vielfache der BC, was zu zeigen war.

Anmerkung:

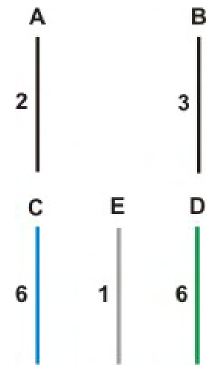
Ist $A = 1$ und $A : BC = D : EF$,	
dann gibt es ein n, so dass	$BC = A \cdot n$
und	$EF = D \cdot n$
Ist $n = 3$, wird BC in n Teile geteilt	$BC = BG+GH+HC$
und EF in n Teile geteilt	$EF = EK+KL+LF$
dann gibt es ein q, so dass	$BG = EK \cdot q$
und für alle n, n wie auch immer,	$BC = EF \cdot q$
da $EF = D$ und $BG = A$ ist	$A : D = BC : EF$ damit $1 : D = BC : EF$.

VII.16.

Werden zwei Zahlen in der einen und in anderen Reihenfolge multipliziert, so sind die Ergebnisse gleich.

Sind die Zahlen A und B gegeben, und A multipliziert mit B ergibt C und B multipliziert mit A ergibt D, dann, sage ich, ist C gleich D.

Da A mit B multipliziert C ergibt, ist C in B so oft aufteilbar wie A in die Eins.
Ist E gleich der Eins, dann sind so viele Teile E in A wie B in C.
Deshalb sind, nach Umordnung, so viele Teile E in B wie A in C.
Da B mit A multipliziert D ergibt, ist D in A so oft aufteilbar wie B in E.



Da B in E so oft aufteilbar ist wie D in A und da B in E so oft aufteilbar ist wie C in A.

Deshalb ist C in A so oft aufteilbar wie D in A, was zu zeigen war.

VII.17.

Wird eine Zahl mit jeder von zwei anderen Zahlen multipliziert, dann verhalten sich die beiden Produkte wie die beiden Zahlen, mit denen multipliziert wurde.

Wenn eine Zahl A einmal mit B und einmal C multipliziert wird und die beiden Produkte sind D und E, so, sage ich, verhält sich D zu E wie B und C.

Da A mit B multipliziert D ergibt, ist eine Zahl F, die gleich Eins ist, der gleiche Teil von A wie B von D.
Deshalb verhält sich F zu A wie B zu D und verhält sich F zu A wie C zu E.
Somit verhält sich B zu D wie C zu E.

Deshalb verhält sich, nach Umordnung, B zu C wie D zu E, was zu zeigen war.

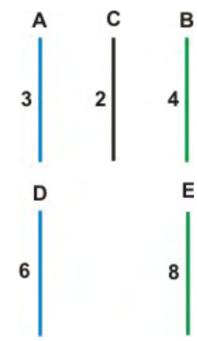
Anmerkung:

Es sei $A \cdot B = D$ und $A \cdot C = E$.
Dann ist $1 : A = B : D$
und $1 : A = C : E$
deshalb $B : D = C : E$
somit $B : C = D : E$.

Also $(A \cdot B) : (A \cdot C) = B : C$.

VII.18.

Wird von zwei Zahlen jede mit einer dritten multipliziert, dann verhalten sich die Produkte wie die beiden Zahlen, die multipliziert wurden.



Wenn zwei Zahlen A und B jeweils mit C multipliziert werden und ergeben D und E, dann, sage ich, verhält sich A zu B wie D zu E.

Da A mit C multipliziert D ergibt, ergibt auch C mit A multipliziert D.
C mit B multipliziert ergibt E.
C multipliziert mit den beiden Zahlen A und B ergibt die Produkte D und E.

Deshalb verhält sich A zu B wie D zu E, was zu zeigen war.

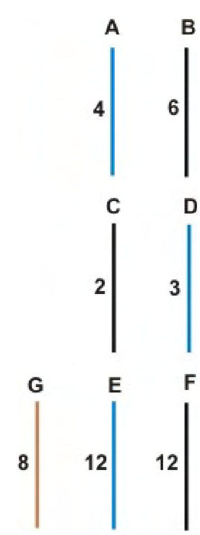
Anmerkung:

Es sei $A \cdot C = D$ und $B \cdot C = E$.
Da $C \cdot A = D$
und $C \cdot B = E$
deshalb $A : B = D : E = (A \cdot C) : (B \cdot C)$.

VII.19.

Stehen vier Zahlen in Proportion, dann ist das Produkt der ersten mit der vierten Zahl dem Produkt der zweiten mit der dritten Zahl gleich und ist das Produkt der ersten mit der vierten Zahl von vier Zahlen gleich dem Produkt der zweiten mit der dritten Zahl, dann stehen sie in Proportion.

Wenn vier Zahlen A, B, C und D in Proportion stehen, dann verhält sich A zu B wie C zu D.
Ist das Produkt aus A und D gleich E und das Produkt aus B und C gleich F, dann, sage ich, ist E gleich F.
Denn wenn das Produkt aus A und C gleich G ist und das Produkt aus A und D gleich E, dann ergibt A multipliziert mit den beiden Zahlen C und D die Produkte G und E und deshalb verhält sich C zu D wie G zu E.
Da das Produkt aus A mit C gleich G ist und das Produkt aus B mit C gleich F, ergeben die beiden Zahlen A und B multipliziert mit der Zahl C die Produkte G und F und deshalb verhält sich A zu B wie G zu F.
Da sich auch A zu B wie G zu E verhält, verhält sich G zu E wie G zu F und es bestehen zwischen G und den Zahlen E und F die gleichen Verhältnisse, deshalb ist E gleich F.



Ist, umgekehrt, E gleich F, dann, sage ich, so wie sich A zu B verhält, so verhält sich C zu D.
Denn wenn, wie in vorigem, E gleich F ist, dann verhält sich G zu E wie G zu F.
Da G zu E sich verhält wie C zu D, verhält sich auch G zu F wie A zu B.

Deshalb verhält sich A zu B wie C zu D, was zu zeigen war.

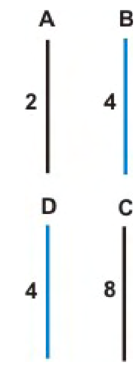
Anmerkung:

Wenn $A : B = C : D$ dann $A \cdot D = B \cdot C$.

VII.20. [2] [Peyrard VII.20]

Stehen drei Zahlen in Proportion, so dass sich die erste zur zweiten so verhält wie die zweite zur dritten Zahl, dann ist das Produkt der ersten mit der dritten Zahl der Quadratzahl aus der zweiten gleich und ist das Produkt aus erster und dritter Zahl der Quadratzahl aus der zweiten gleich, dann stehen die drei Zahlen in Proportion.

Wenn drei Zahlen A, B und C in Proportion stehen, so dass sich A zu B verhält wie B zu C, dann, sage ich, ist das Produkt aus A und C gleich der Quadratzahl von B und ist das Produkt aus A und B gleich der Quadratzahl von B, dann stehen A, B und C in Proportion.



Da sich A zu B verhält wie B zu C, verhält sich ein D, das B gleich ist, wie D zu C. Deshalb verhält sich A zu C wie B zu D. Da aber das Produkt aus B und D der Quadratzahl aus B gleich ist, ist das Produkt aus A und C gleich der Quadratzahl aus B.

Ist das Produkt aus A und C gleich der Quadratzahl aus B, so ist, wie in vorigem, das Produkt aus A und C gleich dem Produkt aus B und D und es verhält sich A zu B wie D zu C.

Da aber B gleich D ist, verhält sich A zu B wie B zu C, was zu zeigen war.

Anmerkung:

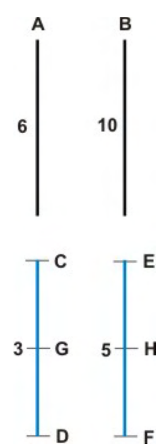
Wenn	$A : B = B : C$ und ein $D = B$, dann ist auch $A : B = D : C$
und es ist	$A \cdot C = B \cdot D$, also $A \cdot C = B^2$
Ist umgekehrt	$A \cdot C = B^2$
und ein $D = B$ dann	$A \cdot C = D \cdot C$ und $A : B = D : C$, also $A : B = B : C$

A, B, C stehen in einer fortlaufend gleichen Proportion.

VII.21. [VII.20]

Die kleinsten beiden Zahlen sind von allen Zahlen, die im gleichen Verhältnis wie sie stehen, die gleichen Teiler, die kleinere von den kleineren so wie die größere von den größeren.

Wenn zwei Zahlen CD und EF die kleinsten Zahlen von denen sind, die im gleichen Verhältnis stehen, so wie A zu B, dann, sage ich, CD ist der gleiche Teiler von A wie EF von B.

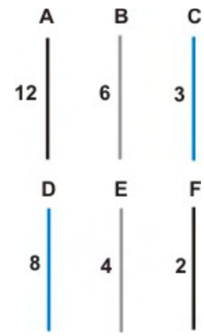


Ist CD kein Teiler von A, dann ist CD ein Teil von A und der gleiche Teil wie EF von B.
Es sind dann ebenso viele Teile von A in CD, wie von B in EF.
Wird CD in die Teile von A geteilt, nämlich CG und GD und EF in die Teile von B, nämlich EH und HF, dann sind so viele Teile in CD wie in EF.
Da dann CG gleich GD und EH gleich HF ist, verhält sich dann CG zu EH wie GD zu HF und dann verhält sich CG zu EH wie CD zu EF und ebenso wie dieses Vorderglied zum Hinterglied, verhalten sich dann alle Vorderglieder zu den Hintergliedern. Damit stehen die kleineren Zahlen CG und EH im gleichen Verhältnis wie CD und EF, was nicht möglich ist. Deshalb ist CD nicht Teil von A, sondern Teiler von A und der gleiche Teiler ist EF von B, was zu zeigen war.

[2] Bei Heiberg in einer Fußnote erwähnt, sonst vorhanden. Griechischer Text nach F. Peyrard.

VII.22. [3] [Peyrard VII.22]

Stehen drei Zahlen wie ebenso viele andere in gleicher Proportion und sind sie untereinander kreuzweise proportional, dann verhält sich die erste zur dritten Zahl der einen Proportion wie die erste zur dritten Zahl der anderen Proportion.



Wenn drei Zahlen A, B, C in Proportion zu D, E, F stehen und sie kreuzweise proportional sind, sich also A zu B verhält wie E zu F und B zu C wie D zu E, dann, sage ich, verhält sich A zu C wie D zu F.

Da sich A zu B verhält wie E zu F und B zu C verhält wie D zu E, ist das Produkt aus A und F gleich dem aus B und E, das dem aus C und D gleich ist.

Deshalb verhält sich A zu C wie D zu F, was zu zeigen war.

Anmerkung:

A, B, C sowie D, E, F stehen in den fortlaufend gleichen Proportionen A : B : C, sowie D : E : F.

VII.23. [VII.21]

Teilerfremde Zahlen sind die kleinsten der Zahlen, die im gleichen Verhältnis stehen.

Wenn unter den Zahlen die im gleichen Verhältnis stehen, die zwei Zahlen A und B teilerfremd sind, dann, sage ich, sind A und B die kleinsten derjenigen Zahlen, die im gleichen Verhältnis stehen.

Denn wenn sie nicht die kleinsten Zahlen sind, dann gibt es andere, die C und D genannt seien, die kleiner sind und im gleichen Verhältnis stehen.

Die kleinsten beiden der Zahlen, die im gleichen Verhältnis zueinander wie sie stehen, sind die gleichen Teiler, die kleinere von der kleineren so wie die größere von der größeren, nämlich das Vorderglied von den Vordergliedern wie das Hinterglied von den Hintergliedern, deshalb ist C dann der gleiche Teiler von A wie B von D.
So oft A in C aufteilbar ist, so oft sei die Zahl E in Eins aufteilbar.
Es ist dann D so oft in B enthalten wie die Eins in E.
Da C mit E multipliziert A ergibt, ist auch E multipliziert mit C gleich A und ebenso ist E multipliziert mit D gleich B. E ist damit ein Teiler von A und ein Teiler von B, was, da A und B teilerfremd sind, nicht möglich ist.

Deshalb gibt es keine kleineren Zahlen als A und B, die im gleichen Verhältnis stehen, was zu zeigen war.

Anmerkung:

Sind A und B teilerfremd, dann ist A : B gekürzt.

[3] Bei Heiberg in einer Fußnote erwähnt, sonst vorhanden. Griechischer Text nach F. Peyrard.

VII.24. [VII.22]

Die kleinsten Zahlen unter denen, die im gleichen Verhältnis stehen, sind teilerfremd.

Wenn zwei Zahlen, die unter denen, die im gleichen Verhältnis stehen, A und B die kleinsten sind, dann, sage ich, sind sie teilerfremd.

Denn wenn A und B nicht teilerfremd sind, dann gibt es eine Zahl C, die Teiler von A und B ist und A ist dann, wie B, ein Vielfaches von C.
Es ist dann die Zahl D multipliziert mit C gleich A und die Zahl E multipliziert mit C gleich B, weshalb sich D zu E verhält wie A zu B.
D und E sind dann kleinere Zahlen als A und B, die im gleichen Verhältnis stehen, was nicht sein kann.

Deshalb haben A und B keinen gemeinsamen Teiler und sind teilerfremd, was zu zeigen war.

Anmerkung:

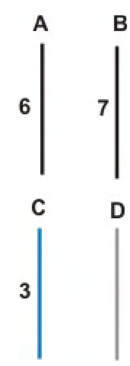
Ist $A : B$ gekürzt, dann sind A und B teilerfremd.

Sind A und B nicht teilerfremd, dann gibt es einen Teiler C, mit D und E,
so dass $C \cdot D = A$ und $C \cdot E = B$, wobei $D < A$ und $E < B$,
und es ist $(C \cdot D) : (C \cdot E) = A : B$, somit ist $A : B$ nicht gekürzt.

VII.25. [VII.23]

Sind zwei Zahlen teilerfremd, dann ist ein Teiler der einen Zahl teilerfremd zur anderen.

Wenn zwei Zahlen A und B teilerfremd sind und C ein Teiler von A ist, dann, sage ich, sind C und B teilerfremd.



Denn wenn B und C nicht teilerfremd sind, dann haben sie einen Teiler, dieser sei D. Da D dann auch ein Teiler von C ist und C ein Teiler von A, ist D auch Teiler von A.
Da D auch Teiler von B ist, ist D Teiler von A und B, die teilerfremd sind.

Da dies nicht möglich ist, haben C und B keinen gemeinsamen Teiler und sind teilerfremd, was zu zeigen war.

Anmerkung:

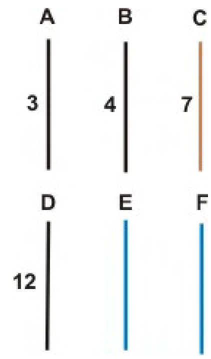
Ist $ggT(A \cdot n, B) = 1$, dann $ggT(A, B) = 1$.

Ist $(A \cdot n) : B$ gekürzt, dann auch $A : B$.

VII.26. [VII.24]

Sind zwei Zahlen zu einer anderen teilerfremd, dann ist auch ihr Produkt teilerfremd zu dieser Zahl.

Wenn zwei Zahlen A und B teilerfremd zu einer Zahl C sind und A und B multipliziert D ergeben, dann, sage ich, sind auch C und D teilerfremd.



Denn wenn C und D nicht teilerfremd sind, dann haben sie einen gemeinsamen Teiler, dieser sei E. Da A und C teilerfremd sind, sind auch A und E teilerfremd.
Ist nun D gleich oft in E aufteilbar ist wie die Zahl F in die Eins, dann ist deshalb E multipliziert mit F gleich D.
Dann ist das Produkt aus E und F gleich dem Produkt aus A und B und deshalb verhält sich E zu A wie B zu F.

Da E und A teilerfremd sind, stehen sie als kleinste in diesem Verhältnis und sind die gleichen Teiler, die kleinere von der kleineren wie die größere von der größeren, nämlich das Vorderglied von den Vordergliedern wie das Hinterglied von den Hintergliedern, weshalb E Teiler von B ist und ebenso von C.

Da B und C teilerfremd sind, ist dies nicht möglich und es gibt keinen gemeinsamen Teiler von C und D, deshalb sind C und D teilerfremd, was zu zeigen war.

Anmerkung:

Es sei $\text{ggT}(A, C) = 1 \quad \text{ggT}(B, C) = 1 \quad$ und $\quad A \cdot B = D$

Ist D Vielfaches von E, dann gibt es ein F, so dass $E \cdot F = D$
und C Vielfaches von E, dann gibt es ein m, so dass $E \cdot m = C$
dann ist $E \cdot F = A \cdot B$
und $E : A = B : F$
und es gibt ein n, so dass $E \cdot n = B$,
da auch $E \cdot m = C$, ist $E > 1$ ein gemeinsamer Teiler von B und C,
was der Voraussetzung widerspricht.

Ist $\text{ggT}(A, C) = 1$ und $\text{ggT}(B, C) = 1$, dann $\text{ggT}(A \cdot B, C) = 1$.

VII.27. [VII.25]

Sind zwei Zahlen teilerfremd, dann ist auch die Quadratzahl der einen teilerfremd zur anderen Zahl.

Wenn zwei Zahlen A und B teilerfremd sind und die Quadratzahl von A ist C, dann, sage ich, sind auch B und C teilerfremd.

Es sei ein D gleich A. Da A und B teilerfremd sind, ist auch B und das Produkt aus D und A teilerfremd.

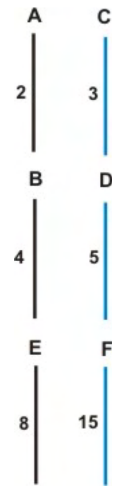
Da A multipliziert mit D gleich C ist, sind C und B teilerfremd, was zu zeigen war.

Anmerkung:

Ist $\text{ggT}(A, B) = 1$, dann $\text{ggT}(A^2, B) = 1$.

VII.28. [VII.26]

Ist von zwei Zahlen jede zu einer anderen teilerfremd, dann ist das Produkt der einen beiden Zahlen zu dem der anderen teilerfremd.



Wenn jede der Zahlen A und B zu zwei anderen Zahlen C und D teilerfremd sind und das Produkt aus A und B gleich E, so wie das Produkt aus C und D gleich F ist, dann, sage ich, sind E und F teilerfremd.

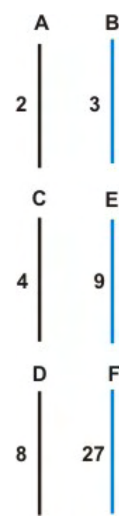
Denn wenn A und B zu C teilerfremd sind, dann ist auch das Produkt aus A und B zu C teilerfremd. Da A mit B multipliziert E ergibt, sind E und C teilerfremd. Aus den gleichen Gründen aus denen E und C teilerfremd sind, sind auch E und D teilerfremd. Da C und D zu E teilerfremd sind, ist auch das Produkt aus C und D zu E teilerfremd.

Das Produkt aus C und D ist F, also sind E und F teilerfremd, was zu zeigen war.

VII.29. [VII.27]

Sind zwei Zahlen teilerfremd und werden sie mit sich selbst multipliziert, dann sind die entstehenden Zahlen teilerfremd, und werden die gegebenen Zahlen mehrfach mit sich selbst multipliziert, dann sind alle zuletzt daraus entstehenden Zahlen teilerfremd, die aus der einen entstehenden zu den aus der anderen.

Wenn zwei Zahlen A und B teilerfremd sind und wenn A multipliziert mit sich gleich C und C multipliziert mit A gleich D, B multipliziert mit sich gleich E und E multipliziert mit B gleich F ist, dann, sage ich, sind C und E teilerfremd, ebenso wie D und F.



Denn wenn A und B teilerfremd sind und A multipliziert mit sich C ergibt, dann sind C und B teilerfremd. Da C und B teilerfremd sind und B multipliziert mit B gleich E ist, sind C und E teilerfremd.

Da auch A und B teilerfremd sind und B mit B multipliziert E ergibt, sind A und E teilerfremd. Da die beiden Zahlen A und C teilerfremd zu den beiden Zahlen B und E sind, jede der einen mit jeder der anderen, ist das Produkt aus A und C teilerfremd zum Produkt aus B und E.

Das Produkt aus A und C ist D und das Produkt aus B und E ist F, also sind D und F teilerfremd, was zu zeigen war.

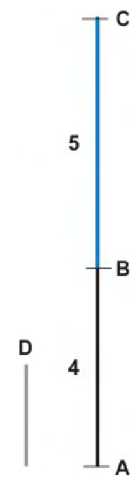
Anmerkung:

Sind zwei Zahlen teilerfremd, dann sind auch ihre Potenzen mit natürlichen Hochzahlen teilerfremd.
Ist A : B gekürzt, dann ist $(A : B)^n$ gekürzt.

VII.30. [VII.28]

Sind zwei Zahlen teilerfremd, dann ist ihre Summe zu jeder von ihnen teilerfremd und ist die Summe zweier Zahlen zu einer von ihnen teilerfremd, dann sind beide teilerfremd.

Addiert man zwei teilerfremde Zahlen AB und BC, dann, sage ich, ist die Summe AC teilerfremd zu AB und BC.



Denn wenn AB und AC nicht teilerfremd sind, gibt es einen gemeinsamen Teiler; dieser sei D. Da D Teiler von AC und AB ist, ist D auch Teiler des Restes BC.
D ist dann Teiler von AB und BC, was nicht möglich ist, da sie teilerfremd sind. Deshalb haben AB und AC keinen gemeinsamen Teiler und sind teilerfremd.
Aus den gleichen Gründen sind AC und BC teilerfremd.
Deshalb ist AC teilerfremd zu AB und zu BC.

Sind nun AC und AB teilerfremd, dann sind, sage ich, AB und BC teilerfremd.
Denn sind AB und BC nicht teilerfremd, dann haben sie einen gemeinsamen Teiler, der D sei. Da nun D Teiler von AB und BC ist, ist D auch Teiler des ganzen AC. D ist dann Teiler von AB und AC, was nicht möglich ist, da sie teilerfremd sind.

Deshalb haben AB und BC keinen gemeinsamen Teiler und sind teilerfremd, was zu zeigen war.

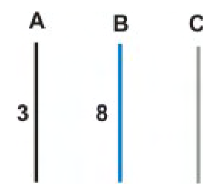
Anmerkung:

Ist ggT(A, B) = 1, dann ggT(A+B, B) = 1.
Ist A : B gekürzt, dann sind auch (A+B) : B und A : (A+B) gekürzt.

VII.31. [VII.29]

Primzahlen sind teilerfremd zu den Zahlen, die nicht ihre Vielfache sind.

Wenn eine Zahl B nicht Vielfache einer Primzahl A ist, dann, sage ich, sind A und B teilerfremd.



Denn wenn A und B nicht teilerfremd sind, haben sie einen gemeinsamen Teiler; dieser sei C. Da C Teiler von B ist, ist A nicht Teiler von B und deshalb ist A ungleich C.
Da nun C Teiler von A und B ist, ist C Teiler von A, das eine Primzahl ist; dies ist nicht möglich.

Deshalb haben A und B keinen gemeinsamen Teiler und sind teilerfremd, was zu zeigen war.

Anmerkung:

Ist A Primzahl und B nicht Vielfaches von A, dann ist A : B gekürzt.

VII.32. [VII.30]

Ist das Produkt zweier Zahlen ein Vielfaches einer Primzahl, dann ist auch einer der Faktoren ein Vielfaches dieser Primzahl.

Wenn das Produkt zweier Zahlen A und B gleich C ist und C ein Vielfaches einer Zahl D ist, die eine Primzahl ist, dann, sage ich, ist D Teiler von A oder von B.

Denn wenn D nicht Teiler von A und Primzahl ist, dann sind A und D teilerfremd.
Ist nun C so oft in D teilbar, wie eine Zahl E in die Eins, dann ist das Produkt aus D und E gleich C.
Da A multipliziert mit B gleich C ist, ist das Produkt aus A und B gleich dem Produkt aus D und E. Deshalb verhält sich D zu A wie B zu E. Da D und A teilerfremd sind und D Primzahl ist, sind D und A die kleinsten der Zahlen im gleichen Verhältnis und da die kleinsten der Zahlen Teiler der Zahlen mit gleichem Verhältnis sind, die größere der größeren und die kleiner der kleineren, nämlich das Vorderglied von den Vordergliedern wie das Hinterglied von den Hintergliedern, deshalb ist D Teiler von B.
Ist D nicht Teiler von B, dann kann auf ähnliche Weise gezeigt werden, dass D Teiler von A ist.

Deshalb ist D Teiler einer der Zahlen A oder B, was zu zeigen war.

Anmerkung:

Ist D Primzahl und $A \cdot B : D = E$, dann ist $A \cdot B = D \cdot E$

und $A : D = E : B$
mit dem Proportionalitätsfaktor n mit $A \cdot n = E$ und $D \cdot n = B$, womit B ein Vielfaches von D ist,

oder $B : D = E : A$
mit dem Proportionalitätsfaktor m mit $B \cdot m = E$ und $D \cdot m = A$, womit A ein Vielfaches von D ist.

VII.33. [VII.31]

Jedes Produkt ist das Vielfache einer Primzahl.

Ist eine gegebene Zahl A ein Produkt, dann, sage ich, ist sie das Vielfache einer Primzahl.

Denn da A ein Produkt ist, hat A einen Teiler. Dieser sei B.

Ist B eine Primzahl, so hat sich das Behauptete ergeben.

Ist die Zahl B ein Produkt, so hat sie einen Teiler, dieser sei C.
Da C Teiler von B ist und B Teiler von A ist C auch Teiler von A.

Ist C eine Primzahl, so hat sich das Behauptete ergeben. Ist die Zahl C ein Produkt, so wird durch Wiederholung der vorigen Überlegung schließlich eine Primzahl gefunden werden, deren Vielfache A ist. Denn würde sie nicht gefunden werden, würde ohne Ende immer eine Zahl eine andere Zahl als Teiler haben, was bei gegebenen Zahlen nicht möglich ist.

Deshalb ist ein Produkt das Vielfache einer Primzahl, was zu zeigen war.

VII.34. [VII.32]
Jede Zahl ist selbst Primzahl oder ist das Vielfache einer Primzahl.

Ist eine Zahl A gegeben, dann, sage ich, ist A entweder selbst Primzahl oder ist das Vielfache einer Primzahl.

Denn ist A eine Primzahl, dann hat sich das Behauptete ergeben.
Ist aber A ein Produkt, dann hat A eine Primzahl als Teiler.

Deshalb ist jede Zahl selbst Primzahl oder ist das Vielfache einer Primzahl, was zu zeigen war.

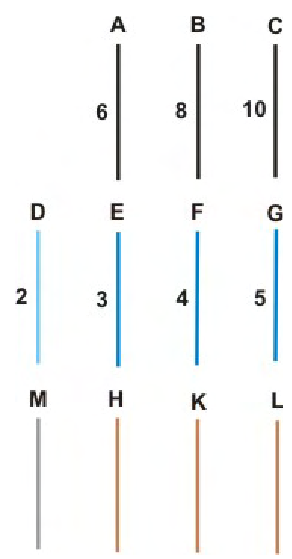
VII.35. [VII.33]
Zu beliebigen Zahlen die kleinsten finden, die im gleichen Verhältnis stehen.

Zu beliebigen Zahlen A, B und C sollen nun die kleinsten Zahlen gefunden werden, die im gleichen Verhältnis stehen wie A, B und C.

A, B und C sind entweder teilerfremd oder haben einen gemeinsamen Teiler.
Sind A, B und C teilerfremd, dann sind sie die kleinsten Zahlen, die in diesem Verhältnis stehen.

Haben A, B und C einen gemeinsamen Teiler, dann ist der größte gemeinsame Teiler D ein Teiler von A, B und C. Es seien nun E, F und G so oft in die Eins aufzuteilen wie A, B und C in D. Dann sind A, B und C so oft in E, F und G aufzuteilen wie D in die Eins.
Deshalb sind A, B und C gleich oft in E, F und G aufteilbar und stehen deshalb im gleichen Verhältnis wie A, B und C.

Dann, sage ich, sind E, F und G die kleinsten dieser Zahlen.
Denn sind sie nicht die kleinsten, dann stehen kleinere Zahlen als E, F und G im gleichen Verhältnis wie A, B und C. Es seien dies H, K und L.
Dann ist A so oft in H aufteilbar wie B in K und C in L. So oft A in H aufteilbar ist, so oft sei M in die Eins aufteilbar. Es sind dann B so oft in K und C in L aufteilbar wie M in die Eins.
Dann ist A so oft in M aufteilbar wie H in die Eins, deshalb sind auch B in M und C in M so oft aufteilbar wie K und L in die Eins.



Es ist dann M gemeinsamer Teiler von A, B und C.
Da A so oft in H aufteilbar ist wie M in die Eins, ist H multipliziert mit M gleich A. Aus gleichen Gründen ist E multipliziert mit D gleich A.

Deshalb ist das Produkt aus E und D gleich dem Produkt aus H und M.
Es verhält sich dann E zu H wie M zu D.
Da E größer ist als H, ist M größer als D.
Der gemeinsame Teiler M von A, B und C ist dann größer als D, was nicht möglich ist, denn D ist nach Voraussetzung der größte gemeinsame Teiler von A, B und C.
Es stehen dann keine Zahlen kleiner als E, F und G im gleichen Verhältnis wie A, B und C.

Deshalb sind E, F und G die kleinsten Zahlen, die im gleichen Verhältnis stehen wie A, B und C, was zu zeigen war.

Anmerkung:

Zu A : B und B : C sind die gekürzten Verhältnisse zu suchen.
Es sind A, B und C teilerfremd oder nicht.

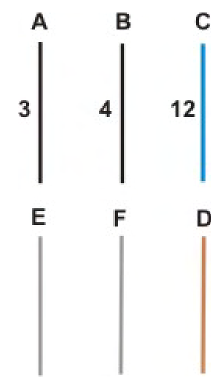
Gibt es keinen gemeinsamen Teiler, kann nicht gekürzt werden und A : B und B : C sind in kleinstmöglichen Zahlen dargestellt.

Gibt es einen gemeinsamen Teiler, dann können A : B und B : C mit dem ggT(A, B, C) gekürzt werden; sie können nicht weiter gekürzt werden, denn A : ggT(A, B, C), B : ggT(A, B, C) und C : ggT(A, B, C) haben keinen gemeinsamen Teiler und sind in kleinstmöglichen natürlichen Zahlen dargestellt.

VII.36. [VII.34]
Zu zwei Zahlen die kleinste Zahl finden, die ihr gemeinsames Vielfaches ist.

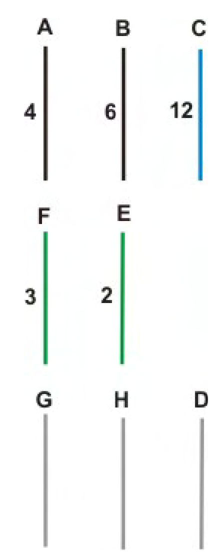
Zu zwei gegebenen Zahlen A und B soll nun die kleinste Zahl gefunden werden, die ihr gemeinsames Vielfaches ist. A und B sind teilerfremd oder nicht.

Sind A und B teilerfremd, dann sei das Produkt aus A und B gleich C.
Da A multipliziert mit B gleich C ist, sind A und B Teiler von C und dann, sage ich, ist C die kleinste Zahl, deren Teiler sie sind.



Denn ist sie dies nicht, dann gibt es eine andere Zahl kleiner als C, deren Teiler sie sind.
Seien sie Teiler von D. So oft D in A aufgeteilt werden kann, so oft sei die Zahl E in die Eins aufteilbar und so oft D in B aufgeteilt werden kann, so oft sei die Zahl F in die Eins aufteilbar.
Es ist A multipliziert mit E gleich D und B multipliziert mit F gleich D und damit ist das Produkt aus A und E gleich dem Produkt aus B und F.
Deshalb verhält sich A zu B wie F zu E.

Da A und B teilerfremd sind, teilerfremde Zahlen aber die kleinsten der Zahlen sind, die im gleichen Verhältnis stehen und die kleinere Zahl Teiler der kleineren ist wie die größere Zahl der größeren, deshalb ist B Teiler von E.
Da A multipliziert mit B gleich C ist und A multipliziert mit E gleich D, verhält sich B zu E wie C zu D. Da B Teiler von E ist, ist auch C Teiler von D, die kleinere Zahl von der größeren, was nicht möglich ist. Da nun A und B nicht Teiler einer kleineren Zahl als C sind, ist C die kleinste Zahl, die ihr Vielfaches ist.



Sind A und B nicht teilerfremd und sind F und E die kleinsten Zahlen, die im gleichen Verhältnis stehen wie A und B, dann ist das Produkt aus A und E gleich dem Produkt aus B und F.

Da A multipliziert mit E gleich C ist und B multipliziert mit F gleich C ist, sind A und B Teiler von C und dann, sage ich, ist C die kleinste Zahl, die ihr Vielfaches ist. Denn ist sie dies nicht, dann sind A und B Teiler einer anderen Zahl kleiner als C. Seien sie Teiler von D.

So oft D in A aufgeteilt werden kann, so oft sei die Zahl G in die Eins aufteilbar und so oft D in B aufgeteilt werden kann, so oft sei die Zahl H in die Eins aufteilbar. Es ist A multipliziert mit G gleich D und B multipliziert mit H gleich D und damit ist das Produkt aus A und G gleich dem Produkt aus B und H. Deshalb verhält sich A zu B wie H zu G.

Da sich A zu B verhält wie F zu E, verhält sich F zu E wie H zu G. Es sind F und E die kleinsten der Zahlen, die im gleichen Verhältnis stehen und da die kleinere Zahl Teiler der kleineren ist wie die größere Zahl Teiler der größeren, deshalb ist E Teiler von G.

Da A multipliziert mit E gleich C ist und A multipliziert mit G gleich D ist, verhält sich E zu G wie C zu D. Da E Teiler von G ist, ist auch C Teiler von D, die kleinere Zahl von der größeren, was nicht möglich ist.

Da nun A und B nicht Teiler einer kleineren Zahl als C sind, ist C die kleinste Zahl, die ihr gemeinsames Vielfaches ist, was zu zeigen war.

Anmerkung:

Sind A und B teilerfremd, somit ggT(A, B) =1,
dann ist $A \cdot B$ das kleinste gemeinsame Vielfache von A und B, kgV(A, B) = $A \cdot B$.

Ist ggT(A, B) > 1, dann sind A und B : ggT(A, B), sowie
B und A : ggT(A, B) teilerfremd, damit ist kgV(A, B) = $A \cdot B$: ggT(A, B).

VII.37. [VII.35]

Sind zwei Zahlen Teiler einer anderen, dann ist auch die kleinste Zahl, die ihr gemeinsames Vielfaches ist, Teiler dieser Zahl.

Wenn zwei Zahlen A und B Teiler einer Zahl CD sind und E die kleinste Zahl ist, die ihr gemeinsames Vielfaches ist, dann, sage ich, ist E auch Teiler von CD.

Denn wenn E nicht Teiler von CD ist, dann ist E Teiler von CF und es bleibt von CD der Rest FD, der kleiner als E ist.
Da A und B Teiler von E sind und E Teiler von CF ist, sind A und B auch Teiler von CF. Da A und B Teiler der ganzen CD sind, sind A und B auch Teiler vom Rest FD, der kleiner als E ist, was nicht möglich ist.

Dass es nicht Teiler von CD ist, trifft für E nicht zu,
deshalb ist E Teiler von CD, was zu zeigen war.

Anmerkung:

Das Vielfache zweier Zahlen A und B ist auch ein Vielfaches des kgV(A, B).

VII.38. [VII.36]

Die kleinste Zahl finden, die gemeinsames Vielfaches dreier Zahlen ist.

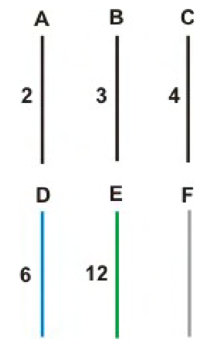
Zu drei Zahlen A, B, C soll die kleinste Zahl gefunden werden, die ihr Vielfaches ist.
Das kleinste gemeinsame Vielfache D von A und B, ist auch das Vielfache von C oder nicht.

Ist D das Vielfache von C, dann, da auch Vielfaches von A und B, ist D Vielfaches von A, B und C und dann, sage ich, auch das kleinste Vielfache. Denn wenn nicht, ist eine kleinere Zahl als D Vielfaches von A, B und C; diese sei E.

Da dann E das Vielfache von A, B und C ist, ist E das Vielfache von A und B und des kleinsten gemeinsamen Vielfachen von A und B.

Es ist aber D das kleinste gemeinsame Vielfache von A und B, die kleinere Zahl Vielfache von der größeren, was nicht möglich ist. Deshalb ist keine kleinere Zahl als D Vielfaches von A, B und C. Also ist dann D das kleinste gemeinsame Vielfache von A, B und C.

Ist aber D nicht Vielfaches von C, dann sei E das kleinste gemeinsame Vielfache von C und D.
Da D Vielfaches von A und B ist und E Vielfaches von D, ist E auch Vielfaches von A und B. Es ist aber E auch Vielfaches von C und ist deshalb Vielfaches von A, B und C und dann, sage ich, auch kleinstes Vielfaches.



Denn wenn nicht, ist eine kleinere Zahl als E Vielfaches von A, B und C; diese sei F. Da dann F Vielfaches von A, B und C ist, ist F Vielfaches von A und B und des kleinsten gemeinsamen Vielfachen von A und B.
Es ist D das kleinste gemeinsame Vielfache von A und B, deshalb ist F Vielfaches von D.
Da F auch Vielfaches von C ist, ist F Vielfaches von C und D und Vielfaches des kleinsten gemeinsamen Vielfachen von C und D.
Es ist aber E das kleinste Vielfache von C und D, deshalb ist F Vielfaches von E, die kleinere Zahl Vielfaches der größeren, was nicht möglich ist.

Deshalb ist keine kleinere Zahl als E Vielfaches von A, B, C.
Also ist dann E das kleinste gemeinsame Vielfache von A, B, C, was zu zeigen war.

Anmerkung:

Das kleinste gemeinsame Vielfache von A, B, C ist kgV(A, B, C) = kgV(kgV(A, B), C).

VII.39. [VII.37]
Der Teiler einer gegebenen Zahl ist Nenner eines Teils der Zahl, der ein Teiler der Zahl ist.

Wenn die Zahl A das Vielfache der Zahl B ist, dann, sage ich, hat A einen Teiler gleich dem Teil von A mit dem Nenner B.

Denn so oft A in B aufgeteilt werden kann, so oft ist die Zahl C in die Eins aufteilbar.
Ist D gleich Eins, dann ist C so oft das Vielfache von D wie A von B.
Es ist dann auch B ein Vielfaches von D wie A von C.
D ist dann der gleiche Teil von B wie C von A. Es ist aber D der Teil von B mit dem Nenner B und deshalb auch C der Teil von A mit dem Nenner B.

Also ist C ein Teiler von A und gleich dem Teil von A mit dem Nenner B, was zu zeigen war.

Anmerkung:

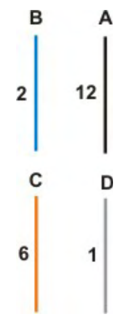
Beispiel:
Der Teiler 4 von 24 ist Nenner des Stammbruchs 1/4 vom Ganzen, der gleich dem Teiler 6 von 24 ist.

Sind A, B, C natürliche Zahlen und ist A = B · C, dann ist B ein Teiler von A.
Es ist C = A / B, also ist B Nenner eines Teils von A, nämlich von C.

VII.40. [VII.38]

Der Teil einer Zahl hat einen Nenner, dessen Vielfaches die Zahl ist.

Wenn der beliebige Teil B einer Zahl A den Nenner C hat, dann, sage ich, ist A Vielfache von C.



Denn, da B ein Teil der Zahl A ist mit dem Nenner C, ist D, die gleich der Eins ist, so oft Teil von C wie B von A. Deshalb ist C Vielfache von D wie A von B und deshalb ist auch B so oft Vielfache von D wie A von C.

Also ist A Vielfache von C, was zu zeigen war.

Anmerkung:

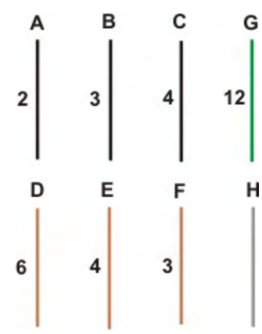
Ist $(1 / C) \cdot A = B$ ein Teil von A mit dem Nenner C, dann ist $A = B \cdot C$, also ist A Vielfache von C.
Der Nenner des Teils einer Zahl ist Teiler der Zahl.

VII.41. [VII.39]

Den kleinsten gemeinsamen Nenner von Teilen gegebener Zahlen finden.

Es seien drei Teile A, B und C gegeben und es soll der kleinste Nenner gefunden werden, den A, B und C gemeinsam haben können.

Sind D, E und F die Nenner der Teile von A, B und C, dann sei G das kleinste gemeinsame Vielfache von D, E und F.
G ist dann Vielfache von D, E und F, die Nenner der Teile A, B und C sind, also ist G Nenner der Teile A, B und C und ist dann, sage ich, der kleinste gemeinsame Nenner.



Denn ist er es nicht, gibt es einen Nenner H der Teile A, B und C, der kleiner ist.
Da H dann Nenner der Teile A, B und C ist, ist H dann Vielfache der Nenner von A, B und C. Da D, E und F die Nenner der Teile A, B und C sind, ist H dann das Vielfache von D, E und F.
Da deren kleinste gemeinsame Vielfache aber G ist, ist dies nicht möglich.

Deshalb gibt es keinen kleineren gemeinsamen Nenner der Teile A, B, C als G, was zu zeigen war.

Anmerkung:

Sind $A = 1 / D$, $B = 1 / E$, $C = 1 / F$
und ist $G = \mathrm{kgV}(D, E, F)$, dann ist $G / m_1 = D$, $G / m_2 = E$, $G / m_3 = F$
mit dem kleinsten gemeinsamen Nenner G von A, B und C
$A = m_1 / G$, $B = m_2 / G$, $C = m_3 / G$.