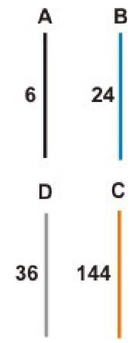
Euklid: Stoicheia (Euklids Elemente)

Buch IX.

Über eingefügte Hypertextmarkierungen kann der griechische Text in der Fassung von I. L. Heiberg aufgerufen werden.

IX.1.

Das Produkt ähnlicher Produkte ist eine Quadratzahl.



Wenn A und B ähnliche Produkte sind und ist das Produkt von A und B gleich C, dann, sage ich, ist C eine Quadratzahl.Es sei A multipliziert mit sich gleich D und D damit Quadratzahl.

Da A multipliziert mit sich gleich D und A multipliziert mit B gleich C ist, verhält sich A zu B wie D zu C.

Da A und B ähnliche Produkte sind, können sie durch Einfügen einer Zahl zu einer fortlaufend gleichen Proportion ergänzt werden [wie VIII.18.];
da D und C im gleichen Verhältnis stehen, können auch sie zu einer fortlaufend gleichen Proportion ergänzt werden.

Da D Quadratzahl ist, ist auch C eine Quadratzahl, was zu zeigen war.

IX.2.

Zwei Zahlen, deren Produkt eine Quadratzahl ist, sind ähnliche Produkte.

Wenn das Produkt zweier Zahlen A und B gleich C ist und C eine Quadratzahl ist, dann, sage ich, sind A und B ähnliche Produkte.

Es sei A multipliziert mit sich gleich D und D damit Quadratzahl.
Da A multipliziert mit A gleich D und A multipliziert mit B gleich C ist, verhält sich A zu B wie D zu C.

Da D eine Quadratzahl ebenso wie C ist, sind D und C ähnliche Produkte.
D und C können durch Einfügen einer Zahl zu einer fortlaufend gleichen Proportion ergänzt werden [wie VIII.18.].

Da sich D zu C verhält wie A zu B, können auch A und B zu einer fortlaufend gleichen Proportion ergänzt werden.
Können zwei Zahlen zu einer fortlaufend gleichen Proportion ergänzt werden, sind sie ähnliche Produkte.

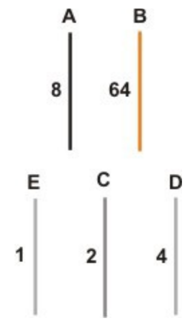
Also sind A und B ähnliche Produkte, was zu zeigen war.

IX.3.

Eine Kubikzahl mit sich multipliziert ergibt eine Kubikzahl.

Ist eine Kubikzahl A mit sich multipliziert gleich B, dann, sage ich, ist B eine Kubikzahl.

Denn ist zur Kubikzahl A die Grundzahl C und C multipliziert mit sich gleich D, dann ist C multipliziert mit D gleich A. D ist so oft Vielfache von C wie C Vielfache der Eins, deshalb verhält sich die Eins zu C wie C zu D.
Da D multipliziert mit C gleich A ist, ist A so oft Vielfache von D wie C von Eins. Also verhält sich die Eins zu C wie D zu A und es verhält sich die Eins zu C wie C zu D und wie D zu A. Also sind zwischen Eins und A zwei Zahlen zu einer fortlaufend gleichen Proportion eingefügt.
Da nun A multipliziert mit sich gleich B ist, ist B so oft Vielfache von A wie A von Eins, also verhält sich die Eins zu A wie A zu B. Da die Eins und A mit zwei Zahlen zu einer fortlaufend gleichen Proportion ergänzt werden können, können auch A und B mit zwei Zahlen zu einer fortlaufend gleichen Proportion ergänzt werden. Können zwei Zahlen mit zwei Zahlen zu einer fortlaufend gleichen Proportion ergänzt werden und ist die erste eine Kubikzahl, dann ist auch die zweite eine Kubikzahl. A ist eine Kubikzahl.



Deshalb ist auch B eine Kubikzahl, was zu zeigen war.

Anmerkung:

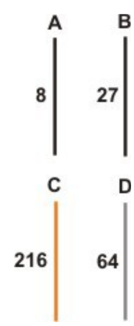
Ist gegeben $A = C^3$, $D = C^2$,
dann ist $C \cdot D = A$, und $1 : C = C : D$. Da $1 : C = D : A$ ist $1 : C : D : A$.
Da $A \cdot A = B$ ist $1 : A = A : B$.
Da $1 : A$ mit zwei Zahlen zu einer geometrischen Reihe ergänzt werden kann (Satz VIII.8),
kann auch $A : B$ mit zwei Zahlen zu einer geometrischen Reihe ergänzt werden.
Da A eine Kubikzahl ist, ist auch B eine Kubikzahl (Satz VIII.23). $(C^3)^2 = (C^2)^3$.

IX.4.

Das Produkt zweier Kubikzahlen ist eine Kubikzahl.

Werden zwei Kubikzahlen A und B multipliziert und ergeben C, dann, sage ich, ist C eine Kubikzahl.

Ist A multipliziert mit sich gleich D, dann ist D eine Kubikzahl.
Da A multipliziert mit sich gleich D und A multipliziert mit B gleich C ist, verhält sich A zu B wie D zu C.
Da A und B Kubikzahlen sind, sind sie Rauminhalte ähnlicher Körper und können mit zwei Zahlen zu einer fortlaufend gleichen Proportion ergänzt werden. Also können auch D zu C zu einer fortlaufend gleichen Proportion ergänzt werden. D ist eine Kubikzahl.



Deshalb ist auch C eine Kubikzahl, was zu zeigen war.

Anmerkung:

Sind A und B Kubikzahlen, $A \cdot B = C$ und $A^2 = D$, dann $A : B = D : C$.
A, B können mit zwei Zahlen zu einer geometrischen Folge ergänzt werden (Satz VIII.19.),
deshalb auch D, C (Satz VIII.8). D ist Kubikzahl, deshalb auch C (Satz VIII.23.). $a^3 \cdot b^3 = (a \cdot b)^3$.

IX.5.

Eine Zahl, die mit einer Kubikzahl multipliziert eine Kubikzahl ergibt, ist eine Kubikzahl.

Ist eine Kubikzahl A multipliziert mit irgend einer Zahl B eine Kubikzahl C, dann, sage ich, ist auch B eine Kubikzahl.

Ist A multipliziert mit sich gleich D, dann ist D eine Kubikzahl. Da A multipliziert mit sich gleich D und A multipliziert mit B gleich C ist, verhält sich A zu B wie D zu C.
Da D und C Kubikzahlen, sind sie Rauminhalte ähnlicher Körper. Also können sie mit zwei Zahlen zu einer fortlaufend gleichen Proportion ergänzt werden.
Es verhält sich D zu C wie A zu B, also können auch A und B mit zwei Zahlen zu einer fortlaufend gleichen Proportion ergänzt werden.

A ist eine Kubikzahl, deshalb ist auch B eine Kubikzahl, was zu zeigen war.

Anmerkung:

Sind A, C Kubikzahlen, $A^2 = D$ und $A \cdot B = C$, dann $A : B = D : C$.
Da C und D Kubikzahlen, sind sie auch Rauminhalte ähnlicher Körper und können zu einer fortlaufend gleichen Proportion ergänzt werden, ebenso A und B (Sätze VIII.19. und VIII.8.).
Da A Kubikzahl ist, ist auch B Kubikzahl (Satz VIII.23.).

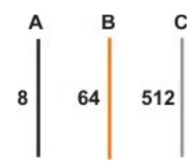
Ist $A = a^3$, $C = c^3$ und $a^3 \cdot B = c^3$, dann $B = b^3$.

IX.6.

Eine Zahl, die mit sich multipliziert eine Kubikzahl ergibt, ist eine Kubikzahl.

Ist eine Zahl A mit sich multipliziert gleich einer Kubikzahl B, dann, sage ich, ist auch A eine Kubikzahl.

Es sei A multipliziert mit B gleich C. Da A multipliziert mit sich gleich B ist und A multipliziert mit B gleich C, ist auch C eine Kubikzahl. Da A multipliziert mit sich gleich B ist, ist B so oft Vielfache von A wie A von der Eins. Also verhält sich die Eins zu A wie A zu B.
Da A multipliziert mit B gleich C ist, ist C so oft Vielfache von B wie B von der Eins. Also verhält sich die Eins zu A wie B zu C. Somit verhält sich A zu B wie B zu C.
Da B und C Kubikzahlen, sind sie Rauminhalte ähnlicher Körper, also können sie mit zwei Zahlen zu einer fortlaufend gleichen Proportion ergänzt werden. Da sich B zu C verhält wie A zu B, können auch A und B zu einer fortlaufend gleichen Proportion ergänzt werden.



B ist eine Kubikzahl, deshalb ist auch A eine Kubikzahl, was zu zeigen war.

Anmerkung:

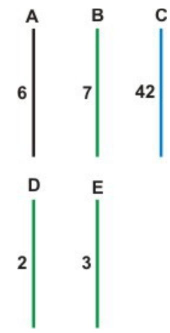
Ist $A^2 = B$, $A \cdot B = C$, dann ist $A : B = B : C$ und $C = A \cdot A^2$ eine Kubikzahl.
Da B und C Kubikzahlen sind, ist in $A \cdot B = C$ auch A eine Kubikzahl (Satz IX.5.).

Ist $A^2 = b^3$, dann $A = a^3$ und $(a^3)^2 = (a^2)^3$.

IX.7.

Die Multiplikation eines Produktes mit einer beliebigen Zahl ergibt stets ein Produkt aus drei Faktoren.

Wenn ein Produkt A mit der Zahl B multipliziert wird und sich das Produkt C ergibt, dann, sage ich, ist C ein Produkt aus drei Faktoren.



Denn da A ein Produkt ist, hat A einen Teiler; dieser sei D.
Es ist dann A so oft Vielfache von D wie ein E von Eins.
Also ist D multipliziert mit E gleich A.
Da A multipliziert mit B gleich C und D multipliziert mit E gleich A ist, ist D multipliziert mit E multipliziert mit B gleich C.

Damit ist C das Produkt aus den drei Faktoren D, E, B, was zu zeigen war.

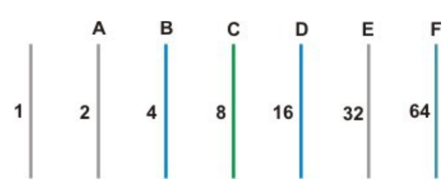
IX.8.

In einer fortlaufend gleichen Proportion, deren erstes Glied die Eins ist, ist das dritte Glied und jedes darauf mit einem Glied Abstand folgende eine Quadratzahl, ist das vierte Glied und jedes darauf mit zwei Gliedern Abstand folgende eine Kubikzahl und ist das siebte Glied und jedes darauf mit fünf Gliedern Abstand folgende Quadrat- und Kubikzahl zugleich.

Wenn die Zahlen A, B, C, D, E, F mit der Eins als erstem Glied in einer fortlaufend gleichen Proportion stehen, dann, sage ich, sind das dritte Glied B und die darauf mit einem Glied Abstand folgenden D, F Quadratzahlen, sind das vierte Glied C und die darauf mit zwei Gliedern Abstand folgende F Kubikzahlen und ist das siebte Glied F Quadrat- und Kubikzahl zugleich.

Denn da sich die Eins zu A verhält wie A zu B, ist A so oft Vielfache der Eins wie B von A.
Es ist B so oft Vielfache von A wie A von Eins, also ist A multipliziert mit sich gleich B, und B damit Quadratzahl. Da B, C, D in fortlaufend gleicher Proportion stehen und B Quadratzahl ist, ist auch D Quadratzahl. Aus den gleichen Gründen ist auch F Quadratzahl.
Ebenso ist zu zeigen, dass jedes darauf mit einem Glied Abstand folgende Glied eine Quadratzahl ist.

Nun sage ich, das vierte Glied und jedes darauf mit zwei Gliedern Abstand folgende ist eine Kubikzahl.
Denn das sich die Eins zu A verhält wie B zu C, ist A so oft Vielfache der Eins wie C von B.
Es ist C so oft Vielfache von B wie A von Eins, also ist A multipliziert mit B gleich C.
Da A multipliziert mit sich gleich B und A multipliziert mit B gleich C ist, ist C eine Kubikzahl.
Da C, D, E, F in fortlaufend gleicher Proportion stehen und C Kubikzahl ist, ist auch F eine Kubikzahl.
Ebenso ist zu zeigen, dass jedes darauf mit zwei Gliedern Abstand folgende Glied eine Kubikzahl ist.



Da F Kubikzahl und, wie gezeigt, auch Quadratzahl ist, ist das siebte Glied Quadrat- und Kubikzahl zugleich.

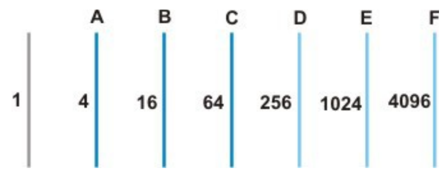
Ebenso ist zu zeigen, dass jedes darauf mit fünf Gliedern Abstand folgende Glied eine Quadrat- und eine Kubikzahl zugleich ist, was zu zeigen war.

IX.9.

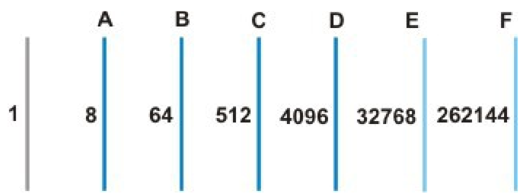
Ist in einer fortlaufend gleichen Proportion, deren erstes Glied die Eins ist, das auf die Eins folgende Glied eine Quadratzahl, dann sind alle folgenden Glieder Quadratzahlen, ist es eine Kubikzahl, dann sind alle folgenden Glieder Kubikzahlen.

Wenn die Zahlen A, B, C, D, E, F mit der Eins als erstem Glied in einer fortlaufend gleichen Proportion stehen und die auf die Eins folgende A eine Quadratzahl ist, dann, sage ich, sind alle folgenden Glieder Quadratzahlen.

Denn da, wie gezeigt, das dritte Glied B eine Quadratzahl ist, sind alle darauf mit einem Glied Abstand folgenden Glieder Quadratzahlen.
Ich sage, auch alle übrigen sind Quadratzahlen.
Da A, B, C in fortlaufend gleicher Proportion stehen und A eine Quadratzahl ist, ist auch C eine Quadratzahl.
Da B, C, D in fortlaufend gleicher Proportion stehen und B eine Quadratzahl ist, ist auch D eine Quadratzahl.
Ebenso ist zu zeigen, dass alle übrigen Glieder Quadratzahlen sind.



Ist nun A eine Kubikzahl, dann, sage ich, sind auch alle übrigen Glieder Kubikzahlen.
Denn da, wie gezeigt, das vierte Glied C eine Kubikzahl ist, sind alle darauf mit zwei Gliedern Abstand folgenden Glieder Kubikzahlen.
Ich sage, auch alle übrigen sind Kubikzahlen.
Denn da sich die Eins zu A verhält wie A zu B, ist A so oft Vielfache der Eins wie B von A.
Es ist B so oft Vielfache von A wie A der Eins, also ist A multipliziert mit sich gleich B.
Da A eine Kubikzahl ist und da eine Kubikzahl mit sich multipliziert eine Kubikzahl ergibt, ist B eine Kubikzahl.
Da die vier Zahlen A, B, C, D in fortlaufend gleicher Proportion stehen und A eine Kubikzahl ist, ist auch D eine Kubikzahl. Aus den gleichen Gründen ist auch E eine Kubikzahl.



Ebenso ist zu zeigen, dass auch die übrigen Glieder Kubikzahlen sind, was zu zeigen war.

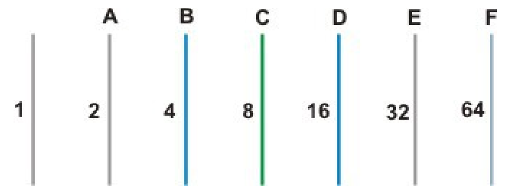
IX.10.

Ist in einer fortlaufend gleichen Proportion, deren erstes Glied die Eins ist, das auf die Eins folgende Glied keine Quadratzahl, dann sind keine anderen Glieder Quadratzahlen, als das dritte und die darauf mit einem Glied Abstand folgenden, und ist das auf die Eins folgende Glied keine Kubikzahl, dann sind keine anderen Glieder Kubikzahlen, als das vierte und die darauf mit zwei Gliedern Abstand folgenden.

Wenn die Zahlen A, B, C, D, E, F mit der Eins als erstem Glied in einer fortlaufend gleichen Proportion stehen und die auf die Eins folgende A keine Quadratzahl ist, dann, sage ich, sind keine anderen Glieder, als das dritte und die darauf mit einem Glied Abstand folgenden, Quadratzahlen.

Denn wenn nicht, ist C Quadratzahl und es ist B Quadratzahl [wie IX.8.].
Es verhält sich A zu B wie B zu C.
Somit stehen dann A und B in einer fortlaufend gleichen Proportion von Quadratzahlen.

Da B eine Quadratzahl ist, ist dann auch A eine Quadratzahl [wie VIII.24.], was der Voraussetzung widerspricht.
Also ist C keine Quadratzahl.
Ebenso ist zu zeigen, dass auch keine anderen Glieder der fortlaufend gleichen Proportion, als das dritte und die darauf mit einem Glied Abstand folgenden, Quadratzahlen sind.



Ist A keine Kubikzahl, dann, sage ich, sind keine anderen Glieder, als das vierte und die darauf mit zwei Gliedern Abstand folgenden, Kubikzahlen.

Denn wenn nicht, ist D Kubikzahl und es ist C Kubikzahl [wie IX.8.].
Es verhält sich B zu C wie C zu D.
Somit stehen B und C in einer fortlaufend gleichen Proportion von Kubikzahlen.
Da C Kubikzahl ist, ist auch B Kubikzahl [wie VIII.25.].
Da sich die Eins zu A verhält wie A zu B, ist B so oft Vielfache von A wie A von Eins.
Somit ist A multipliziert mit sich gleich B.
Da eine Zahl, die mit sich multipliziert eine Kubikzahl ergibt, selbst Kubikzahl ist [wie IX.6.], ist damit A eine Kubikzahl, was der Voraussetzung widerspricht.
Also ist D keine Kubikzahl.

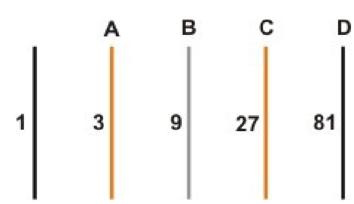
Ebenso ist zu zeigen, dass auch keine anderen Glieder der fortlaufend gleichen Proportion, als das vierte und die darauf mit zwei Gliedern Abstand folgenden, Kubikzahlen sind, was zu zeigen war.

IX.11.

In einer fortlaufend gleichen Proportion, deren erstes Glied die Eins ist, ist jedes größere Glied so oft Vielfache eines kleineren Glieds wie eines der kleineren Glieder angibt.

Wenn die Zahlen A, B, C, D mit der Eins als erstem Glied in einer fortlaufend gleichen Proportion stehen, dann, sage ich, ist D so oft Vielfache von A wie eines der Glieder B, C angibt.

Denn, da sich die Eins zu A verhält wie C zu D, ist A so oft Vielfache der Eins wie D von C.
Es ist, nach Umordnung, C so oft Vielfache der Eins wie D von A.



Also ist das größere Glied D so oft Vielfache des kleineren Glieds A wie das kleinere Glied C angibt, was zu zeigen war.

Zusatz:

Offensichtlich ist ein Glied einer fortlaufend gleichen Proportion, deren erstes Glied die Eins ist, so oft Vielfache eines kleineren Glieds, das so viele Glieder nach der Eins folgt, wie ein Glied angibt, das ebenso viele Glieder vor ihm steht, was zu zeigen ist.

IX.12.

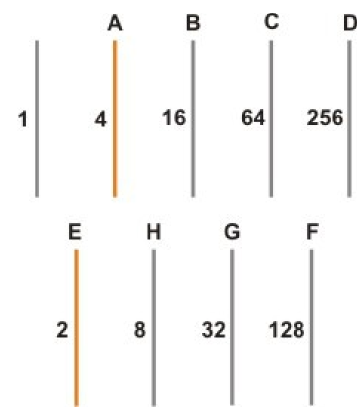
Eine Primzahl, die Teiler des letzten Glieds einer fortlaufend gleichen Proportion ist, deren erstes Glied die Eins ist, ist auch Teiler des Glieds, das auf die Eins folgt.

Wenn die Zahlen A, B, C, D und die Eins als erstes Glied in einer fortlaufend gleichen Proportion stehen, dann, sage ich, eine Primzahl, die Teiler von D ist, ist auch Teiler von A.

Denn ist die Primzahl E Teiler von D, dann, sage ich, ist E auch Teiler von A.

Wenn nicht, sind alle Zahlen, die nicht Vielfache von E sind, teilerfremd zu E [wie VII.31.], somit ist dann E zu A teilerfremd.
Ist dann D so oft Vielfache von E wie die Zahl F angibt, ist E multipliziert mit F gleich D.
Da D so oft Vielfache von A ist, wie C angibt, ist A multipliziert mit C gleich D.
Damit ist A multipliziert mit C gleich E multipliziert mit F.
Also verhält sich dann A zu E wie F zu C [wie VII.19.].

Da dann A und E teilerfremd sind, sind sie die kleinsten Zahlen, die in ihrem Verhältnis stehen.
Da die kleinsten beiden Zahlen von allen Zahlen, die im gleichen Verhältnis wie sie stehen, die gleichen Teiler sind, die kleinere von den kleineren so wie die größere von den größeren [wie VII.22.], ist C so oft Vielfache von E wie die Zahl G angibt.
Damit ist dann E multipliziert mit G gleich C.
Da dann A multipliziert mit B gleich C ist, ist A multipliziert mit B gleich E multipliziert mit G.
Also verhält sich dann A zu E wie G zu B.



Da dann A und E teilerfremd sind, sind sie die kleinsten Zahlen, die in ihrem Verhältnis stehen.
Da die kleinsten beiden Zahlen von allen Zahlen, die im gleichen Verhältnis wie sie stehen, die gleichen Teiler sind, die kleinere von den kleineren so wie die größere von den größeren, ist B so oft Vielfache von E wie die Zahl H angibt.
Damit ist dann E multipliziert mit H gleich B.
Da A multipliziert mit sich gleich B ist, ist E multipliziert mit H gleich A multipliziert mit sich.
Also verhält sich dann E zu A wie A zu H.

Da dann A und E teilerfremd sind, sind sie die kleinsten Zahlen, die in ihrem Verhältnis stehen.
Da die kleinsten beiden Zahlen von allen Zahlen, die im gleichen Verhältnis wie sie stehen, die gleichen Teiler sind, die kleinere von den kleineren so wie die größere von den größeren, ist aber E Teiler von A, was dann nicht möglich ist.

Damit sind E und A nicht teilerfremd. E ist eine Primzahl und damit Teiler von A.

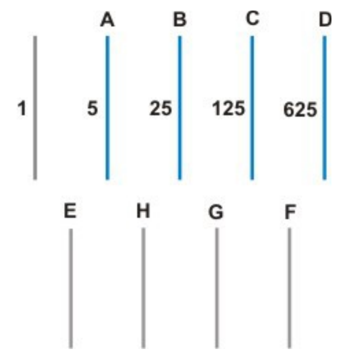
Ebenso ist zu zeigen, dass eine weitere Primzahl, die Teiler von D ist, auch Teiler von A ist, was zu zeigen war.

IX.13.

Ist in einer fortlaufend gleichen Proportion, deren erstes Glied die Eins ist, das auf die Eins folgende Glied eine Primzahl, dann hat das letzte Glied keine anderen Teiler als die Zahlen, die in der Proportion vor ihm stehen.

Wenn die Zahlen A, B, C, D zusammen mit der Eins als erstem Glied in einer fortlaufend gleichen Proportion stehen und die der Eins folgende A eine Primzahl ist, dann, sage ich, hat D keine anderen Teiler als A, B, C.

Denn wenn nicht, ist eine von A, B, C verschiedene Zahl E Teiler von D.
Offensichtlich kann E keine Primzahl sein, denn ist sie Primzahl, dann ist sie als Teiler von D auch Teiler der von ihr verschiedenen Primzahl A, was nicht möglich ist.



Also ist E keine Primzahl, sondern Vielfache einer Primzahl.
Ich sage, E ist eine Vielfache keiner anderen Primzahl als A.
Denn eine andere Primzahl, die Teiler von E ist, ist auch Teiler von D, da E Teiler von D ist; sie ist dann auch Teiler der von ihr verschiedenen Primzahl A [wie IX.12.], was nicht möglich ist.
Also ist E Vielfache von A. D ist dann so oft Vielfache von E wie dann die Zahl F angibt.

Ich sage, F ist verschieden von A, B, C.
Denn ist F gleich einer der Zahlen A, B, C, dann ist, da D Vielfache von E ist, D so oft Vielfache einer der Zahlen A, B, C wie E angibt. Da D dann so oft Vielfache einer der Zahlen A, B, C ist, wie eine der Zahlen A, B, C angibt [wie IX.11.], ist E gleich einer der Zahlen A, B, C, was der Voraussetzung widerspricht.
Also ist dann F verschieden von A, B, C und, wie zu zeigen, Vielfache von A.
Ebenso ist zu zeigen, dass F keine Primzahl ist, denn da sie dann Teiler von D ist, ist sie dann auch Teiler der Primzahl A, was nicht möglich ist. Somit ist dann F Vielfache einer Primzahl.
Ich sage, F ist Vielfache keiner anderen Primzahl als A.

Denn ist eine andere Primzahl Teiler von F, ist, da F Teiler von D ist, diese auch Teiler der von ihr verschiedenen Primzahl A, was nicht möglich ist.
Also ist dann F Vielfache von A.

Da D so oft Vielfache der E ist wie F angibt, ist dann E multipliziert mit F gleich D.
Es ist A multipliziert mit C gleich D, somit ist A multipliziert mit C gleich E multipliziert mit F.
Damit verhält sich A zu E wie F zu C. Da E Vielfache von A ist, ist C Vielfache von F; sie ist dies dann so oft wie die Zahl G angibt.

Es ist ebenso zu zeigen, dass dann G von A, B verschieden und Vielfache von A ist.
Da C so oft Vielfache von F ist, wie G angibt, ist dann F multipliziert mit G gleich C.
Da A multipliziert mit B gleich C ist, ist A multipliziert mit B gleich F multipliziert mit G.
Somit verhält sich dann A zu F wie G zu B.

Da F Vielfache von A ist, ist B Vielfache von G; sie ist dies dann so oft wie die Zahl H angibt.
Es ist ebenso zu zeigen, dass dann H von A verschieden ist. Da B so oft Vielfache von G ist wie H angibt, ist dann G multipliziert mit H gleich B. Da A multipliziert mit sich gleich B ist, ist G multipliziert mit H gleich A multipliziert mit sich.

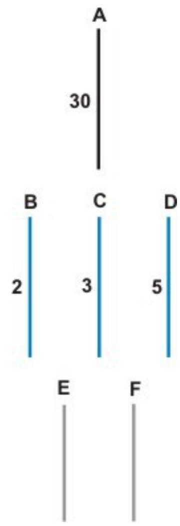
Somit verhält sich dann H zu A wie A zu G. Da A Teiler von G ist, ist dann H Teiler der von ihr verschiedenen Primzahl A, was nicht möglich ist.

Deshalb sind keine anderen Zahlen Teiler von D als A, B, C, was zu zeigen war.

IX.14.

Das kleinste Produkt aus Primzahlen hat keine anderen Teiler als diese Primzahlen.

Wenn A das kleinste Produkt aus den Primzahlen B, C, D ist, dann, sage ich, hat A keine anderen Teiler als B, C, D.



Denn wenn nicht, ist eine von B, C, D verschiedene Primzahl E Teiler von A.

Da E Teiler von A ist, ist A so oft Vielfache von E wie dann die Zahl F angibt.
Es ist dann E multipliziert mit F gleich A.
Da A das Produkt aus B, C, D ist, und da dann, wenn ein Produkt zweier Zahlen das Vielfache einer Primzahl ist, auch einer der Faktoren das Vielfache einer Primzahl ist [wie VII.32.], deshalb sind die Primzahlen B, C, D dann Teiler entweder von E oder von F.
Es sind B, C, D nicht Teiler der von ihnen verschiedenen Primzahl E.
Sie sind dann Teiler der Zahl F, die kleiner als A ist, was nicht möglich ist, da A das kleinste Produkt aus B, C, D ist.

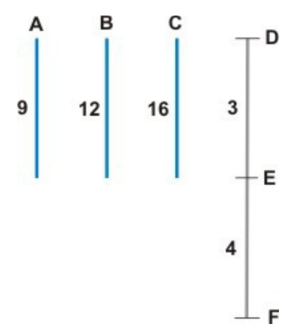
Deshalb hat A keine anderen Teiler als die Primzahlen B, C, D, was zu zeigen war.

IX.15.

Von drei Zahlen einer fortlaufend gleichen Proportion in kleinstmöglichen Zahlen, ist die Summe zweier beliebiger Glieder teilerfremd zum dritten Glied.

Wenn die drei Zahlen A, B, C in fortlaufend gleicher Proportion die kleinsten sind, die in ihrem Verhältnis stehen, sage ich, die Summe zweier beliebiger Glieder ist teilerfremd zum dritten Glied, es sind also A und B zusammen teilerfremd zu C, es sind B und C zusammen teilerfremd zu A, sowie A und C zusammen teilerfremd zu B.

Denn mit zwei kleinstmöglichen Zahlen DE, EF im Verhältnis der Zahlen A, B, C ist DE multipliziert mit sich gleich A, ist DE multipliziert mit EF gleich B und ist EF multipliziert mit sich gleich C.
Da DE, EF die kleinsten Zahlen in ihrem Verhältnis sind, sind sie teilerfremd [wie VII.24.].
Da die Summe zweier teilerfremder Zahlen zu den Summanden teilerfremd ist [wie VII.30.], ist die Summe DF aus DE und EF teilerfremd zu DE und zu EF.
Da das Produkt zweier Zahlen, die zu einer anderen teilerfremd sind, teilerfremd zu dieser Zahl ist [wie VII.26.], ist das Produkt aus DF mit DE teilerfremd zu EF.
Ebenso ist das Produkt aus DF mit DE teilerfremd zur Quadratzahl von EF [wie VII.27.].
Es ist das Produkt aus DF mit DE gleich der Summe aus DE multipliziert mit EF und DE zum Quadrat [wie II.3.].
Damit ist die Summe aus DE multipliziert mit EF und DE zum Quadrat teilerfremd zu EF zum Quadrat.
Es ist DE zum Quadrat gleich A, es ist DE multipliziert mit EF gleich B und es ist EF zum Quadrat gleich C.
Damit sind A und B zusammen teilerfremd zu C.
Wie ebenso zu zeigen, ist B und C zusammen teilerfremd zu A.



Ich sage, dann sind A und C zusammen teilerfremd zu B.
Denn da DF teilerfremd zu DE, EF ist, ist DF zum Quadrat teilerfremd zum Produkt aus DE mit EF.

Da DF zum Quadrat gleich der Summe aus DE zum Quadrat, EF zum Quadrat und dem doppelten Produkt aus DE mit EF ist [wie II.4.], ist die Summe aus DE zum Quadrat, EF zum Quadrat und dem doppelten Produkt aus DE mit EF teilerfremd zum Produkt aus DE mit EF. Damit ist auch die Summe aus DE zum Quadrat und EF zum Quadrat teilerfremd zum Produkt aus DE mit EF.

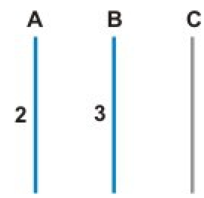
Da DE zum Quadrat gleich A ist, da DE multipliziert mit EF gleich B und EF zum Quadrat gleich C ist, sind A und C zusammen teilerfremd zu B, was zu zeigen war.

IX.16.

Sind zwei Zahlen teilerfremd, gibt es keine Zahl, die zur zweiten Zahl im gleichen Verhältnis steht wie die erste zur zweiten.

Wenn die Zahlen A und B teilerfremd sind, dann, sage ich, gibt es keine Zahl, zu der B im gleichen Verhältnis steht wie A zu B.

Denn wenn nicht, dann verhält sich A zu B wie B zur Zahl C.
Da A und B teilerfremd sind, sind sie die kleinsten Zahlen, die in ihrem Verhältnis stehen.
Da die kleinsten beiden Zahlen von den Zahlen, die im gleichen Verhältnis wie sie stehen, die gleichen Teiler sind, die kleinere von der kleineren so wie die größere von der größeren [wie VII.22.], ist dann A Teiler von B, so wie B Teiler von C, was nicht möglich ist, denn A und B sind teilerfremd.



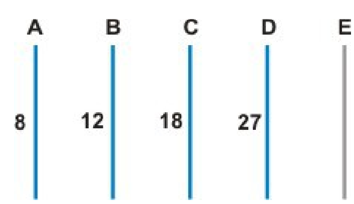
Also gibt es keine Zahl, zu der B im gleichen Verhältnis steht, wie A zu B, was zu zeigen war.

IX.17.

Sind das erste und das letzte Glied einer fortlaufend gleichen Proportion teilerfremd, gibt es keine Zahl, die zum letzten Glied im gleichen Verhältnis steht wie das erste zum zweiten.

Wenn die Zahlen A, B, C, D in fortlaufend gleicher Proportion stehen und A, D teilerfremd sind, dann, sage ich, gibt es keine Zahl, zu der D im gleichen Verhältnis steht wie A zu B.

Denn wenn nicht, dann verhält sich A zu B wie D zu Zahl E.
Nach Umordnung verhält sich dann A zu D wie B zu E.
Da A und D teilerfremd sind, sind sie die kleinsten Zahlen, die in ihrem Verhältnis stehen.
Da die kleinsten beiden Zahlen von den Zahlen, die im gleichen Verhältnis wie sie stehen, die gleichen Teiler sind, die kleinere von der kleineren so wie die größere von der größeren [wie VII.22.], ist dann A Teiler von B so wie D Teiler von E.
Es verhält sich A zu B wie B zu C.
Somit ist B Teiler von C, damit A auch Teiler von C.
Da sich B zu C verhält wie C zu D, ist dann B Teiler von C sowie C Teiler von D.
Da A Teiler von C ist, ist dann A auch Teiler von D, was nicht möglich ist, da sie teilerfremd sind.



Also gibt es keine Zahl, zu der D im gleichen Verhältnis steht, wie A zu B, was zu zeigen war.

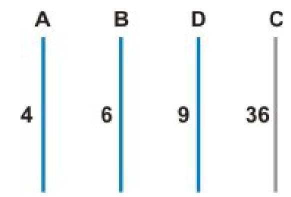
IX.18.

Zu zwei Zahlen, wenn möglich, die dritte Zahl zur fortlaufend gleichen Proportion finden.

Zu den Zahlen A, B soll, wenn möglich, die dritte Zahl zur fortlaufend gleichen Proportion aufgesucht werden.

A, B sind teilerfremd oder nicht.
Sind sie teilerfremd, dann gibt es, wie gezeigt, keine Zahl, zu der B im gleichen Verhältnis steht wie A zu B [wie IX.16.].

Sind A, B nicht teilerfremd, dann sei B multipliziert mit sich gleich C.
A ist dann Teiler von C oder nicht.



Ist C so oft Vielfache von A wie die Zahl D angibt, dann ist A mal D gleich C. Es ist B multipliziert mit sich gleich C ist und somit gleich A mal D. Es verhält sich dann A zu B wie B zu D, womit D das dritte Glied der fortlaufend gleichen Proportion mit A, B ist.
Ist C nicht Vielfache von A, dann, sage ich, gibt es keine dritte Zahl, die A, B zur fortlaufend gleichen Proportion ergänzt.
Denn gibt es diese Zahl D, dann ist A mal D gleich B zum Quadrat [wie VII.20.].
Da B zum Quadrat gleich C ist, ist A mal D gleich C. Damit ist C Vielfache von A, was nicht möglich ist.

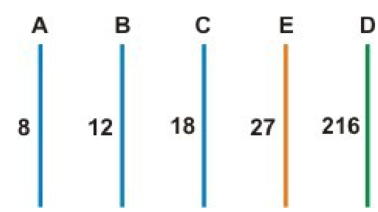
Also gibt es keine dritte Zahl, die A, B zur fortlaufend gleichen Proportion ergänzt, wenn C nicht Vielfache von A ist, was zu zeigen war.

IX.19.

Zu drei Zahlen, wenn möglich, die vierte Zahl finden, zu der sich die dritte verhält wie die erste zur zweiten.

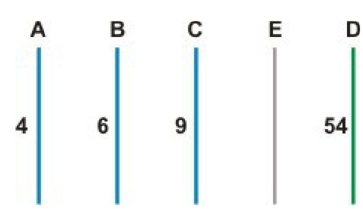
Zu den Zahlen A, B, C soll, wenn möglich, die vierte Zahl gefunden werden, zu der sich C verhält wie A zu B.

Es stehen A, B, C in fortlaufend gleicher Proportion oder nicht.



Stehen A, B, C in fortlaufend gleicher Proportion, dann sind A und C teilerfremd oder nicht.
Sind in fortlaufend gleicher Proportion A und C teilerfremd, dann kann, wie gezeigt, keine Zahl gefunden werden, zu der C im gleichen Verhältnis steht wie A zu B [wie IX.17.].

Sind in fortlaufend gleicher Proportion A und C nicht teilerfremd und ist B mal C gleich D, dann ist D eine Vielfache von A oder nicht.
Ist dann D eine Vielfache von A so oft wie die Zahl E angibt, dann verhält sich A zu B wie C zu E, womit die vierte Zahl in Proportion gefunden ist.



Ist aber D nicht Vielfache von A, dann verhalte sich A zu B wie C zur Zahl E. Es ist dann A mal E gleich B mal C.
Es ist auch B mal C gleich D. Also ist dann D eine Vielfache von A, was nicht möglich ist.
Somit ist dann keine vierte Zahl in Proportion auffindbar.

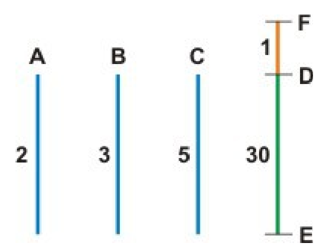
Stehen A, B, C nicht in fortlaufend gleicher Proportion und sind A und C teilerfremd, dann verhält sich A zu B wie C zur Zahl D und es verhält sich B zu C wie D zur Zahl E.
Damit verhält sich A zu C wie C zu E.
Da A und C teilerfremd sind, sind sie die kleinsten Zahlen, die in ihrem Verhältnis stehen.
Da die kleinsten beiden Zahlen von den Zahlen, die im gleichen Verhältnis wie sie stehen, die gleichen Teiler sind, die kleinere von der kleineren so wie die größere von der größeren [wie VII.22.], ist dann A Teiler von C so wie C Teiler von E, was nicht möglich ist.
Also kann dann keine vierte Zahl zur fortlaufend gleichen Proportion gefunden werden.

Stehen A, B, C nicht in fortlaufend gleicher Proportion, sind dazu A und C nicht teilerfremd, dann sei B mal C gleich D.
Es ist dann ebenso zu zeigen, dass dann, wenn D Vielfache von A ist, die vierte Zahl in Proportion gefunden werden kann, und dann nicht, wenn D nicht Vielfache von A ist, was zu zeigen war.

IX.20.

Die Anzahl der Primzahlen ist größer als jede Zahl, die vorgelegt wird.

Wenn A, B, C Primzahlen sind, dann, sage ich, ist die Anzahl der Primzahlen größer als die Anzahl der A, B, C.

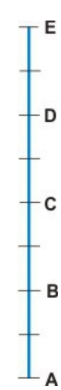


Denn zu A, B, C sei ED das kleinste gemeinsame Vielfache [wie VII.38.].
Die Summe aus ED und der Einheit DF sei EF.
Es ist dann EF Primzahl oder nicht.
Ist EF Primzahl, dann ist die Anzahl der Primzahlen A, B, C, EF größer als die der A, B, C.
Ist EF keine Primzahl, dann ist EF Vielfache einer Primzahl G [wie VII.34.].
Ich sage, G ist verschieden von A, B, C.
Denn wenn nicht, ist, da A, B, C Teiler von ED sind, auch G Teiler von ED.
Da G Teiler von EF ist, ist dann G auch Teiler der Einheit DF, was nicht möglich ist.
Also ist G verschieden von A, B, C.

Da G Primzahl ist, ist die Anzahl der Primzahlen A, B, C, G größer als die der A, B, C, was zu zeigen war.

IX.21.

Die Summe gerader Zahlen ist gerade.



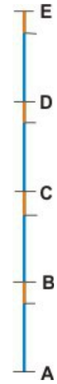
Wenn beliebige gerade Zahlen AB, BC, CD, DE zusammengezählt werden, dann, sage ich, ist die Summe AE gerade.

Denn da AB, BC, CD, DE gerade sind, sind sie in zwei gleiche Teile teilbar, deshalb ist auch AE in zwei gleiche Teile teilbar.
Eine Zahl, die in zwei gleiche Teile teilbar ist, ist gerade.

Deshalb ist AE gerade, was zu zeigen war.

IX.22.

Die Summe einer geraden Anzahl ungerader Zahlen ist gerade.



Wenn eine gerade Anzahl ungerader Zahlen AB, BC, CD, DE zusammengezählt werden, dann, sage ich, ist die Summe AE gerade.

Da die Zahlen AB, BC, CD, DE ungerade sind, bleiben von ihnen, wenn von jeder Eins subtrahiert wird, gerade Zahlen, deren Summe gerade ist.
Da auch die Anzahl der subtrahierten Einsen gerade ist, ist deren Summe gerade.
Beides zusammen gezählt ergibt AE.

Deshalb ist AE gerade, was zu zeigen war.

IX.23.

Die Summe einer ungeraden Anzahl ungerader Zahlen ist ungerade.

Wenn eine ungerade Anzahl ungerader Zahlen AB, BC, CD zusammengezählt wird, dann, sage ich, ist die Summe AD ungerade.

Denn wenn von CD Eins subtrahiert wird, bleibt die gerade Zahl DE.
Da AC gerade ist, ist AE gerade. Diesem die DE, die gleich Eins ist, hinzugezählt, ergibt AE.

Deshalb ist AE ungerade, was zu zeigen war.

IX.24.

Wird von einer geraden Zahl eine gerade Zahl subtrahiert, ist der Rest gerade.

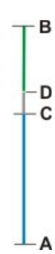
Wenn von der geraden Zahl AB die gerade Zahl BC subtrahiert wird, dann, sage ich, ist der Rest CA gerade.

AB kann, da gerade, in zwei gleiche Teile geteilt werden.
Ebenso kann BC in zwei gleiche Teile geteilt werden.
Also kann auch CA in zwei gleiche Teile geteilt werden.

Deshalb ist AC gerade, was zu zeigen war.

IX.25.

Wird von einer geraden Zahl eine ungerade Zahl subtrahiert, ist der Rest ungerade.



Wenn von der geraden Zahl AB die ungerade Zahl BC subtrahiert wird, dann, sage ich, ist der Rest CA ungerade.

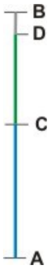
Denn wenn von BC die CD, die Eins ist, subtrahiert wird, dann ist DB gerade.
Da AB gerade ist, ist AD gerade.
Davon CD, die Eins ist, subtrahiert, bleibt CA.

Deshalb ist CA ungerade, was zu zeigen war.

IX.26.

Wird von einer ungeraden Zahl eine ungerade Zahl subtrahiert, ist der Rest gerade.

Wenn von der ungeraden Zahl AB die ungerade Zahl BC subtrahiert wird, dann, sage ich, ist der Rest CA gerade.



Denn wenn von der ungeraden AB eine BD, die gleich Eins ist, subtrahiert wird, dann ist die restliche AD gerade.
Aus dem gleichen Grund ist CD gerade.

Also ist, wird CD von AD subtrahiert, die restliche CA gerade, was zu zeigen war.

IX.27.

Wird von einer ungeraden Zahl eine gerade Zahl subtrahiert, ist der Rest ungerade.

Wenn von der ungeraden Zahl AB die gerade Zahl BC subtrahiert wird, dann, sage ich, ist der Rest CA ungerade.

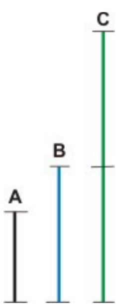
Denn wenn von AB eine AD, die gleich Eins ist, subtrahiert wird, ist die restliche DB gerade. Wird davon die gerade BC subtrahiert, ist die restliche DC gerade.
DC zusammen mit AD, die gleich Eins ist, ergibt CA.

Also ist CA ungerade, was zu zeigen war.

IX.28.

Das Produkt einer ungeraden Zahl mit einer geraden ist gerade.

Wenn die ungerade Zahl A mit der geraden B multipliziert das Produkt C ergibt, dann, sage ich, ist C eine gerade Zahl.



Da A mit B multipliziert C ergibt, ist C aus so vielen Zahlen, die gleich B sind, zusammen gezählt, wie A aus Zahlen, die gleich Eins sind.
Da B gerade ist, ist C aus einer geraden Anzahl ungerader Zahlen zusammen gezählt. Die Summe einer geraden Anzahl ungerader Zahlen ist gerade.

Also ist C gerade, was zu zeigen war.

IX.29.

Das Produkt ungerader Zahlen ist ungerade.

Wenn die ungerade Zahl A mit der ungeraden B multipliziert das Produkt C ergibt, dann, sage ich, ist C ungerade.
Da A mit B multipliziert C ergibt, ist C aus so vielen Zahlen, die gleich B sind, zusammen gezählt, wie A aus Zahlen, die gleich Eins sind.
Da B ungerade ist, ist C aus einer ungeraden Anzahl ungerader Zahlen zusammen gezählt. Die Summe einer ungeraden Anzahl ungerader Zahlen ist ungerade.

Also ist C ungerade, was zu zeigen war.

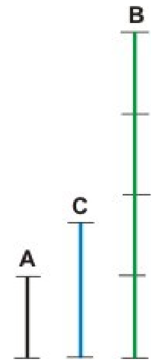
IX.30.

Ist eine gerade Zahl Vielfache einer ungeraden Zahl, dann ist auch ihre Hälfte Vielfache der ungeraden Zahl.

Wenn die gerade Zahl B Vielfache der ungeraden A ist, dann, sage ich, ist auch die Hälfte der B Vielfache von A.
Denn B ist so oft Vielfache der A wie die Zahl C angibt.

Ich sage, C ist nicht ungerade. Denn wenn nicht, ist C ungerade.
Da A multipliziert mit C gleich B ist, ist B dann aus einer ungeraden Anzahl ungerader Zahlen zusammen gezählt.
Also ist dann B ungerade, was nicht möglich ist.
Deshalb ist C nicht ungerade, sondern gerade.
Damit ist B so oft Vielfache von A wie eine gerade Zahl angibt.

Deshalb ist die Hälfte von B eine Vielfache von A, was zu zeigen war.



IX.31.

Ist eine ungerade Zahl teilerfremd zu einer andern, dann ist sie auch teilerfremd zu deren Doppeltem.

Wenn die ungerade Zahl A zur beliebigen Zahl B teilerfremd und C das Doppelte von B ist, dann, sage ich, sind A und C teilerfremd.

Denn wenn nicht, haben sie einen gemeinsamen Teiler D.
Da A ungerade ist, ist dann D ungerade.
Es ist D ungerade und C gerade, also ist auch die Hälfte von C Vielfache von D.
Da B die Hälfte von C ist, ist dann B Vielfache von D.
Da auch A Vielfache von D ist, ist dann D gemeinsamer Teiler der teilerfremden A, B, was nicht möglich ist. Also sind dann A und C nicht teilerfremd.

Deshalb sind A und C teilerfremd, was zu zeigen war.

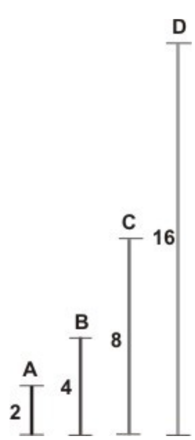
IX.32.

Keine, von der Zahl Zwei ausgehend, durch fortgesetzte Verdopplung sich ergebende Zahl ist geradeמal ungerade.

Wenn sich, von A ausgehend, die gleich Zwei ist, durch Verdopplung nacheinander B, C, D ergeben, dann, sage ich, sind B, C, D nicht gerademal ungerade.

Offensichtlich sind B, C, D gerademal gerade, da sie sich, von Zwei ausgehend, durch Verdopplung ergeben.
Ich sage, sie sind nicht gerademal ungerade.
Denn da sie mit der Eins als erstem Glied in fortlaufend gleicher Proportion stehen und die erste Zahl nach der Eins, A, eine Primzahl ist, hat das letzte Glied D keine anderen Teiler als die vor ihm stehenden Zahlen [wie IX.13.].
Da A, B, C gerade sind, ist D nicht gerademal ungerade.

Ebenso ist zu zeigen, dass B, C nicht gerademal ungerade sind, was zu zeigen war.



IX.33.

Keine Zahl, deren Hälfte ungerade ist, ist grademal gerade.

Wenn die Hälfte der Zahl A ungerade ist, dann, sage ich, ist A nicht grademal gerade.

Offensichtlich ist A grademal ungerade, da sie gerade Vielfache einer ungeraden Zahl ist.
Ich sage, sie ist nicht grademal gerade.
Denn ist sie grademal gerade, dann ist ihre Hälfte, die ungerade ist, eine gerade Zahl, was nicht möglich ist.

Deshalb ist A nicht grademal gerade, was zu zeigen war.

IX.34.

Ergibt sich eine gerade Zahl, deren Hälfte gerade ist, nicht durch fortgesetzte Verdopplung von der Zwei ausgehend, dann ist sie grademal gerade und grademal ungerade.

Ist A eine Zahl, deren Hälfte gerade ist und sich nicht aus fortgesetzter Verdopplung, von der Zwei ausgehend, ergibt, dann, sage ich, ist A grademal gerade und grademal ungerade.

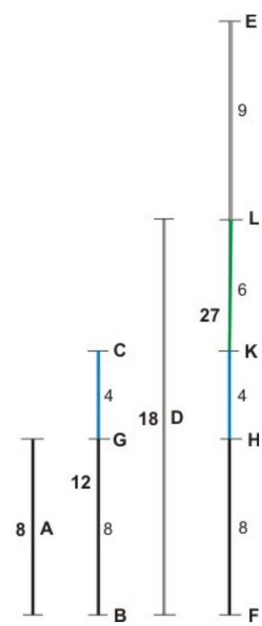
Offensichtlich ist die Zahl A grademal gerade, da ihre Hälfte gerade ist.

Ich sage, sie ist auch grademal ungerade.
Denn wird A halbiert, dann die Hälfte halbiert und so fortgesetzt, ergibt sich eine ungerade Zahl, deren gerades Vielfaches A ist. Denn wenn nicht, müsste sich nach fortgesetztem Halbieren die Zwei ergeben, was nicht möglich ist, da sich dann A durch fortgesetzte Verdopplung, von der Zwei ausgehend, ergeben hätte.
Also ist A grademal ungerade und, wie gezeigt, grademal gerade.

Deshalb ist A grademal gerade und grademal ungerade, was zu zeigen war.

IX.35.

Wird vom zweiten und vom letzten Glied einer fortlaufend gleichen Proportion eine Zahl gleich dem ersten Glied subtrahiert, dann verhält sich der Rest des zweiten zum ersten Glied wie der Rest des letzten Glieds zur Summe aus den übrigen Gliedern.



Wenn die Zahlen A, BC, D, EF mit der davon kleinsten Zahl A in fortlaufend gleicher Proportion stehen und von BC, EF, die der A gleichen Zahlen BG, FH subtrahiert werden, dann, sage ich, verhält sich GC zu A wie EH zur Summe aus A, BC, D.

Denn ist die Zahl FK gleich BC und die Zahl FL gleich D, dann ist FK gleich BC und FH gleich BG, somit HK gleich GC.
Damit verhält sich EF zu D wie D zu BC und wie BC zu A.

Da D gleich FL, da BC gleich FK und da A gleich FH ist, verhält sich EF zu FL wie LF zu FK und wie FK zu FH.

Es verhält sich nach Verkleinerung der Verhältnisse [wie V. Erklärung 15.] EL zu LF wie LK zu FK und wie KH zu FH.
Da sich in einer Proportion die erste zur zweiten Zahl verhält wie die Summe der Vorderglieder zur Summe der Hinterglieder [wie VII.12.], verhält sich KH zu FH wie die Summe aus EL, LK, KH zur Summe aus LF, FK, HF.
Da KH gleich CG und FH gleich A ist, ist die Summe aus LF, FK, HF gleich der Summe aus D, BC, A. Also verhält sich CG zu A wie EH zur Summe aus D, BC, A.

Deshalb verhält sich der Rest aus dem zweiten Glied zum ersten wie der Rest aus dem letzten zur Summe aus den übrigen Gliedern, was zu zeigen war.

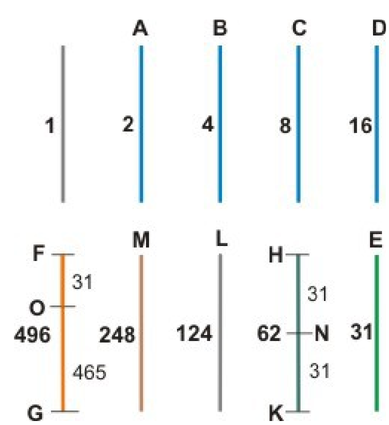
IX.36.

Ist die Summe der Zahlen, die sich, beginnend mit der Eins, durch fortgesetzte Verdopplung ergeben, eine Primzahl, dann ist das Produkt aus dieser Summe mit der letzten dieser Zahlen eine vollkommene Zahl.

Wenn die Zahlen A, B, C, D, beginnend mit der Eins, durch fortgesetzte Verdopplung gefunden werden, ihre Summe gleich der Primzahl E und das Produkt aus E mit D gleich FG ist, dann sage ich, ist FG eine vollkommene Zahl.

Denn werden, von E ausgehend, durch Verdopplung so viele Zahlen E, HK, L, M bestimmt wie Zahlen A, B, C, D gefunden sind, dann verhält sich A zu D wie E zu M.

Es ist dann E mal D gleich A mal M.
Da A mal M gleich FG ist, ist E mal D gleich FG.
FG ist so oft Vielfache von A wie M angibt.
Da A gleich Zwei ist, ist FG gleich dem doppelten M.
Somit stehen E, HK, L, M, FG in fortlaufend gleicher Proportion.
Werden vom zweiten Glied HK und vom letzten Glied FG Zahlen HN, FO, die gleich dem ersten Glied E sind, subtrahiert, dann verhält sich der Rest des zweiten Glieds zum ersten Glied E wie der Rest des letzten Glieds zur Summe aus den übrigen Gliedern [IX.35.].
Damit verhält sich NK zu E wie OG zur Summe aus M, L, KH, E.
Da HK gleich dem doppelten E und HN gleich E ist, ist NK gleich E.
Also ist OG gleich der Summe aus M, L, KH, E.
Es ist FO gleich E und es ist E gleich der Summe aus A, B, C, D und Eins.
Damit ist FG gleich der Summe aus E, HK, L, M, A, B, C, D und Eins und ist Vielfache aller dieser Zahlen.



Ich sage, FG ist nicht Vielfache einer anderen Zahl als A, B, C, D, E, HK, L, M und Eins.

Denn wenn doch, dann sei FG Vielfache der Zahl P, die von A, B, C, D, E, HK, L, M und Eins verschieden ist.
Es ist dann FG so oft Vielfache von P wie die Zahl Q angibt, somit ist Q mal P gleich FG.
Da E mal D gleich FG ist, verhält sich dann E zu Q wie P zu D.
Da A, B, C, D mit der Eins als erstem Glied in fortlaufend gleicher Proportion stehen und A eine Primzahl ist, hat D keine anderen Teiler als A, B, C.

Da P von A, B, C verschieden ist, ist damit P nicht Teiler von D.
Es verhält sich P zu D wie E zu Q, somit ist auch E nicht Teiler von Q.
Da E eine Primzahl ist, sind dann E und Q teilerfremd und damit die kleinsten Zahlen in ihrem Verhältnis.
Es sind die kleinsten beiden Zahlen von allen Zahlen, die im gleichen Verhältnis wie sie stehen, die gleichen Teiler, die kleinere von den kleineren so wie die größere von den größeren.
Da sich E zu Q wie P zu D verhält, ist dann P so oft Vielfache der E wie D Vielfache der Q.
D hat keine anderen Teiler als A, B, C, also ist Q gleich einer der Zahlen A, B, C.
Ist dann Q gleich B, dann verhält sich B zu D wie E zu L, da E, HK, L im gleichen Verhältnis stehen wie B, C, D.
Damit ist B mal L gleich D mal E und gleich Q mal P. Es verhält sich dann Q zu B wie L zu P.
Da Q gleich B ist, ist L gleich P, was nicht möglich ist, da P verschieden von den Teilern von FG ist. Also hat FG keine anderen Teiler als A, B, C, D, E, HK, L, M und Eins.

Es ist, wie gezeigt, FG gleich der Summe aus A, B, C, D, E, HK, L, M und Eins und auch Vielfache dieser Zahlen.

Deshalb ist FG eine vollkommene Zahl, was zu zeigen war.
